தொழிலகங்களில் கணித, புள்ளியியல் முறைகள்

பாகம் I

(MATHEMATICAL AND STATISTICAL METHODS IN INDUSTRIES)

PART I

துரை. இரத்தினசபாபதி



த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்— 793

தொழிலகங்களில் கணித, புள்ளியியல் முறைகள்-I

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

துரை. இரத்தினசபாபதி, எம்.எஸ்ஸி., டி.ஐ.எஸ்.ஐ.,
இணைப்பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition.— February, 1978
Number of Copies — 2000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 793

MATHEMATICAL AND STATISTICAL METHODS IN INDUSTRIES - I

DURAI. RATNASABAPATHI

Price Rs. 11-45

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by
KUMARAN OFFSET PRINTERS,
2/65, Broadway
Madras-600 001.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேழாண்டு கள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர் களின் ஊக்கம். பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற் கெனத் தந்த உழைப்பு. தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித்தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை. அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சி யைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப் பொருளியல் புவியியல். புவியமைப்பியல், மனையியல், கணித வியல், இயற்பியல். வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளி யியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல். சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல் கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான தொழிலகங்களில் கணித, புள்ளியியல் முறைகள்-1 என்னும் இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத் தின் 793 ஆவது வெளியீடாகும் கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 828 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும். தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளி தாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ்; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித் தாகுக.

செ. அரங்கநாயகம்

பொருளடக்கம்

பகுதி-I

1. செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி—அறிமுகம்

(Operations Research - Introduction)

அறிமுகம்

செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சியின் தன்மைகள் (Nature of Operations Research) : செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி (Operations Research) என்பது உள்சிக்கல் நிறைந்த நிறுவனங்களின் ஒழுங் கமைப்புச் செயல்முறைகளையொத்த அல்லது செயல்முறைகளுக் கேற்ற தீர்மானங்களை உண்டாக்கும் ஒரு விஞ்ஞான அடிப்படை யாகும். இச் செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சியை 'OR' என்று சுருக்க மாக வழங்குகிறோம். தீர்வுகாணும் பிரச்சினைகளுக்கு அளவு சார்ந்த (quantitative) முறையில் தீர்வு காண்பதால், இந்த 'OR' முறையைச் செயலாட்சி விஞ்ஞானத்தின் (Management Science) ஒரு திருப்புமுனை (corner-stone) என்றே கூறலாம். ஒரு நிறுவனத்தினுள்ளே காணப்படும் செயல்முறைகளையோ அல்லது நடவடிக்கைகளையோ எப்படி வழிநடத்தி எவ்வாறு ஓரினப்படுத் துவது (co-ordinate) என்ற பிரச்சினைகளுக்கு இம் முறை பயன் படுத்தப்படுகிறது. நிறுவனங்கள் என்பன எந்த வகையையும் சார்ந்தவையாக இருக்கலாம். அதாவது வாணிகத் தொழில், தொழிலகம், இராணுவம், படைத்துறை சாராத அரசு அலுவலகங் கள் Civil Governments), மருத்துவமனைகள், பொதுநலத்துறைகள் (Public Utilities) முதலிய பல நிறுவனங்களிலும் இந்தச் செயல் முறை ஆராய்ச்சி மிகவும் விரிவான முறையில் பயன்படுத்தப் படுகிறது. எனவே, பயன்முறைகளின் தன்மையானது அசாதா ரணமான அளவில் மிகவும் விரிவானதாகக் காணப்படுகிறது. யுனைடட் கிங்டம் செயல் முறை ஆராய்ச்சிக் கழகக்குழு (Council of United Kingdom Operational Research Society), OR ஐப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறது: தொழிற்சாலை, வாணிகத் தொழில், அரசாங்கம், பாதுகாப்புத் துறைகள், இவற்றில் ஆள்கள், இயந்திரங்கள், பொருள்கள், பணம் இவற்றின் பெரிய ஒழுங்கு முறைமைகளைச் (large systems) செயலாற்றி வழிநடத்திச் செல்

கையில் உண்டாகும் பல சிக்கலான பிரச்சினைகளுக்கான நவீன விஞ்ஞானமுறைத் தாக்குதலே 'செயல்முறை ஆராய்ச்சி' என வழங்கப்படுகிறது. இத் தனி வேறுபட்ட அணுகு நெறியானது (approach) தற்செயல் நிகழ்வு (chance), இடர்வரவு (risk) இவை போன்ற காரணிகளின் அளவுகளைக் கொண்டு ஒருங்கிணைந்த ஒழுங்குமுறையின் ஒரு விஞ்ஞான உருப்படிவத்தைத் தோற்றுவிப்பது ஆகும். மாறுபடும் தன்மையுடைய தீர்மானங்கள், போர்முறைத் திறமை முறைகள் (strategies) அல்லது கட்டுப்பாடுகள் இவற்றின் விளைவுகளை மேற்கண்ட காரணி அளவுகளின் மூலம் முன்கூட்டி அறிந்து ஒப்பீடு செய்வதற்கேற்றவாறு விஞ்ஞான உருப்படிவம் தோற்றுவிக்கப்படுகிறது. ஒரு நிறுவனமானது, அதன் செயல்திற நுட்பம், செயல் நடவடிக்கைகளை விஞ்ஞான ரீதியில் உறுதிசெய்வதற்கு உதவுவதே இதன் நோக்கம் ஆகும்.

சுருக்கமாகக் கூறினுல், ஒரு தீர்மானப் பிரச்சினைக்கான செயல் முறை ஆராய்ச்சி அணுகுமுறையானது ஒரு கணிதவியல் உருப் படிவத்தைக் கண்டுபிடித்து அதன்மூலம் தீர்வுகளை உய்த் துணர்வது (inference) ஆகிறது. பிரச்சினையைக் கவனத்துடன் முறைப்படுத்தி, கூர்ந்து நோக்கி, உண்மையான பிரச்சினையின் சாராம்சத்தைப் பிரித்து விளக்கக்கூடிய ஒரு விஞ்ஞான உருப் படிவத்தை இங்குப் புனைந்தியற்றுகிறோம். பிரச்சினையின் இன்றி யமையாத கூறுகளை (தோற்றங்களை) இந்த உருப்படிவம் துல்லி யமாக விளக்குகிறது என்று அனுமானிப்போம். இந்த உருப் படிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் தீர்வுகள் உண்மையான பிரச்சினை களுக்கும் பொருந்துமாறு அனுமானம் செய்யப்படுகிறது. இந்த அனுமானம் சரியான சோதனைகளின்மூலம் மாற்றி அமைத்துச் சரிபார்க்கப்படுகிறது. ஆதலால், செயல்முறை ஆராய்ச்சியானது செயல்முறைகளின் அடிப்படைப் பண்புகளில் ஆக்கப் பூர்வமான விஞ்ஞான ஆராய்ச்சியைக் கொண்டு அமைகிறது.

செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சியின் ஒரு சிறப்பான அம்சம் என்னவென்றுல், அது நிறுவன முறைகளைச் சார்ந்துள்ளது. மேலும், நிறுவன அமைப்புக்கூறுகளிடையே ஏற்படும் முரண்பாடு களைத் தீர்வு காண முயல்கிறது. அதாவது நிறுவனத்துக்கு மொத்தத்தில் சாதகம் ஏற்படும் வகையில் தீர்வு காண்கிறது எனலாம். உதாரணமாக ஒரு நிறுவனத்தின் சரக்குப் பட்டியல் தத்துவத்தைப் (Inventory Control Theory) பற்றி வெவ்வேறு துறைகளின் முரண்பாடான கருத்துக் கோணங்களை (clashing view-points) ஆராய்வோம். ஓர் உற்பத்தித் துறையானது அமைப்புச் செலவையும் மாற்றீட்டுச் செலவையும் (replacement

cost) அதனால் ஏற்படும் மொத்த உற்பத்திச் செலவையும் மீச் சிறுமப்படுத்தவல்ல நீண்டதொரு குறுக்கீடற்ற (un-interrupted) உற்பத்தி ஓட்டச் சுற்று முறைகளுக்காக முயலுகிறது. இதன் பயன் விளைவு, சார்ந்த உற்பத்திப் பொருள்கள் சிலவற்றின் மிக அதிகமான சரக்குப் பட்டியலேயாகும். ஒரு சந்தைக்களமானது (marketing) அதிகமான ஒரு சீரக்குத் தேக்கப் பட்டியலை விரும்புகிறது. ஆனால், அதே சமயத்தில் விற்பனையை மிக உச்ச மாக்குவதற்காக வெவ்வேறு உற்பத்திப் பொருள்களைத் தன் னிடத்தே கொள்வதற்கு முயற்சி செய்கிறது. நிதித் துறையானது பண முதலீட்டைக் (capital investment) குறைப்பதற்காகச் சரக் குத் தேக்கநிலைகளை மீச்சிறுமப்படுத்த முயல்கிறது. ஒரு நிறுவ னத்தின் எந்த நிலையிலும், முரண்பாடான இவ்விதக் (கருத்துகள்) குறியிலக்குகள் உண்டாகின்றன. ஒருமித்த ஒழுங்கு அமைப்புக் கான சிறந்த விளைவுகளைக் கணிக்கக்கூடிய செயல்முறையைத் தேர்ந்தெடுக்க 'OR' முயற்சி செய்கிறது. இதன் இரண்டாவது பண்பியல் யாதெனில், கவனிக்கப்படும், பிரச்சினைக்கான சிறந்த தொரு அல்லது பெரிதும் உகந்ததொரு தீர்வினைக் கண்டறிய 'OR' உதவுகிறது. மொத்தமாகக் குறியிலக்குகளில் தேவைப்படுவதும், வாய்ப்பு வளங்களில் உபயோகப்படுவதுமான வெவ்வேறு கிடைக்கக்கூடிய மாறுபட்ட செயற்பாங்குகளில் எந்தச் செயற் பாங்கு பெரிதும் உகந்தது என்று கண்டுணர்கிறோம். இதுகாறும் உள்ள நிலையை வெறுமனே செம்மைப்படுத்தித் திருப்தியடை வதைவிடச் சிறந்ததொரு செயல் நடவடிக்கையைக் கண்டறி வதே நம் நோக்கமாகும்.

OR-ன் தோற்றம் (பிறப்பு)

ஆங்கில விஞ்ஞானியர்கள் குழு ஒன்று இரண்டாம் உலக யுத்தத்தின்போது பல விதமான போர் முறைகளைப் பற்றி ஆராய எடுத்துக்கொண்ட முயற்சிகளிலிருந்து செயல்முறை ஆராய்ச்சி தோன்றியது. முதலாவது செயல்முறை ஆராய்ச்சிக் குழுக்கள் இங்கிலாந்தில் ஏற்படுத்தப்பட்டுப் போர்த்திறம் சார்ந்த பிரச்சினை களுக்கான சரியான செயல் நடவடிக்கைகளைப் பரிந்து அளிக்கும் வேலை தரப்பட்டது. அமெரிக்காவில் இதே போன்ற ஆராய்ச்சிக் குழுக்கள் அத்தகைய இராணுவத் தளங்களில் நிறுவப்பட்டன. இராணுவப் பயன் உறுதி நிலைகளைச் செம்மைப்படுத்தக்கூடிய திட்டங்களைச் சிபாரிசு செய்வதற்கு இந்தக் குழுக்கள் பல நிலை களில், செயல்முறை ஆதிக்கங்களுக்கு இணைக்கப்பட்டன. இராணுவத் தீர்வு காணலின் கடுமைவாய்ந்த சிக்கல் நிறைந்த பணிகளில் ஒத்துழைக்க, கணித வல்லுநர்கள், பொறியாளர்கள்,

மனோதத்துவ நிபுணர்கள், இயற்பியல் ஆராய்ச்சியாளர்கள் மற்றும் தேவைப்பட்ட பலரும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டனர்.

இராணுவத்தில் செயல்முறை ஆராய்ச்சியின் வெற்றியினால் உந்தப்பட்டுத் தொழில் துறையும் இம் முறைகளில் ஆர்வம் கொண்டு படிப்படியாக இச் செயல்முறைகளை ஏற்றுக்கொள்ள ஆரம்பித்தது. உலக யுத்தத்துக்குப் பின்னான காலத்திய தொழில்துறையினர்தாம் OR தத்துவங்களை அதிகமாக உபயோகப்படுத்துகின்றனர். கடுமையான செயல்முறைகளை மேற்கொள்ளும் பிரச்சினைகளுக்கான OR அணுகு நெறியின் மிகப் பெரிய இயல்திறன்களை அறிந்துகொள்ளத் தொழில்நிபுணர்களுக்கு அதிக நேரம் பிடிக்கவில்லை. 1950ஆம் ஆண்டு ஆரம்பத்தில் பல்கலைக்கழகங்களிலும் OR பாடத்தைப் (வெளிநாடுகளில்) புகுத்தினர். 1957ஆம் ஆண்டு முதல் OR பாடத்தில் டாக்டர் (Ph.D) பட்டங்கள் வல்லுநர்களுக்கு அளிக்கப்பட ஆரம்பித்தன. OR-ன் முன்னேற்றம் 1960ஆம் ஆண்டிலிருந்து வெளிவந்த OR இலக்கிய ஏடுகளின் வியப்பான வளர்ச்சிகளிலிருந்து நன்கு தெரியவருகிறது. செயல்முறை ஆராய்ச்சியின் இத்தகைய விரைவான வளர்ச்சிக்குக் குறைந்த வகையில் இரண்டு காரணங்கள் உள்ளன. முதலாவது செயல்முறை ஆராய்ச்சிக்கு நாம் உபயோகித்த உத்திகளை (techniques) அல்லது வழிமுறைகளைச் செம்மைப்படுத்தி அமைப்பதற்கு ஆரம்பத்திலேயே மேற்கொள்ளப்பட்ட கணிசமான முன்னேற்றம் ஒரு காரணம் ஆகும். மேலும், இப் படிப்பில் நல்ல ஆராய்ச்சிகள் செய்யப்பட்டு முக்கிய வளர்ச்சிகள் ஏற்பட்டன. இரண்டாவதாக, மின்னியக்கக் கணிப்பான்களின் பிறப்பும் அவற்றின் உபயோகமும் செயல்முறை ஆராய்ச்சியின் விரைவான வளர்ச்சிக்கு மற்றொரு முக்கியக் காரணமாகும். OR-ன் நிறைய அளவு தீர்வு உத்திகள் அதிக அளவு கணிப்புகளைக் கொண்டுள்ளது என்பதால், மின்னியக்க இலக்கக் கணிப்பான்களின் (electronic digital computer) வளர்ச்சி OR-க்கு ஒரு பெரிய வரப்பிரசாதம்போல உள்ளது.

OR அணுகு நெறி

குறிப்பிடத்தக்க செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சிப் படிப்பின் முக்கியப் படிநிலைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு சுருக்கி எழுதலாம் :

(அ) பிரச்சினையை முறைப்படுத்தி எடுத்துக்காட்டல் (formulating).

(ஆ) கவனிக்கப்படும் ஒழுங்குமுறையை விளக்கும் ஓர் உருப்படிவத்தைத் தோற்றுவித்தல்.

(இ) அந்த உருப் படிவத்திலிருந்து ஒரு தீர்வு காணல்.

(ஈ) உருப்படிவத்தையும் அதன்மூலம் கண்ட தீர்வினை யும் சோதித்தல்.

(உ) தீர்வுகளின்மேல் கட்டுப்பாடுகளை விதித்தல்.

(ஊ) தீர்வினைச் செயற்படுத்துதல். அதாவது தீர்மானங்களை நிறைவேற்றுதல் (implementation).

(அ) பிரச்சினையை முறைப்படுத்துதல் : ஒரு பிரச்சினைக் கான OR அணுகு நெறியின் முதல் கட்டமாக அப் பிரச்சினைக் கான ஒழுங்கு முறையை ஆராய்ந்து அதன்மூலம் ஒரு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட (கூற்றை) விவரத்தை விளக்குகிறோம். அதாவது பொருத்தமான குறிக்கோள்கள், செயல்படவேண்டிய கட்டுப்பாடுகள், ஆராயப்பட வேண்டிய எல்லை (பரப்பளவு) களின் இடை உறவுத்தன்மைகள் (inter relationship), செய லாட்சிக்கு உகந்த மற்ற அளவுகள், மாற்றுவிதமான செயற் பாங்குகள், தீர்மானத்திற்கான கால வரம்புகள் முதலிய பல விவரங்களைத் தீர்மானித்தலையும் சேர்த்துதான் முறைப்படுத்து தல் என்கிறோம்.

பொருத்தமான குறிக்கோள்களைத் தீர்மானிப்பதற்கு, முதலில் கவனிக்கப்படும் ஒழுங்குமுறைக்குத் தீர்வு காண்பவர் (decision maker) யார் என்று கண்டு உணர்ந்து பிறகு அவரது குறிக் கோளைச் சார்ந்தவாறு எல்லாவிதமான ஏற்புடைய குறிக்கோள் களையும் (pertinent objectives) ஆராயவேண்டும். தீர்வு காண் பவரின் குறிக்கோளைத் தெரிந்து அறிந்த பின்னர், அவற்றை ஆய்ந்து (analysed) மற்றெல்லாக் குறிக்கோள்களையும் தன்ன கத்தே உடைய முடிவான குறிக்கோள்களை இனம் அறிவதற் காக (கண்டு உணர்வதற்காக) வரிசைப்படுத்தி எழுதவேண்டும். இந்த முடிவான குறிக்கோள்களில் சார்ந்துள்ள முக்கியத் துவத்தைத் தீர்மானிக்க முக்கிய நோக்கங்களையும் மாறுபட்ட நோக்கங்களையும் நன்றாகத் தெரிவிக்கும் வகையில் குறிக்கோள் களை வரிசைப்படுத்துகிறோம்.

உதாரணமாக நிலைத்த இலாபங்களை அதே அளவுகளில் நிலை, நிறுத்தல், சந்தையில் ஒருவரின் பங்குகள் (shares) உற்பத்தி விரிவாக்கம், நிலைத்த விலைகள் இவற்றை அதிகரித்தல் (நிலை நிறுத்தல்), தொழிலாளர்களின் ஒழுங்குணர்வைச் செம்மைப் படுத்தல், குழுமத்தின் கீர்த்தியை (prestige) அதிகரித்தல் போன்ற பலவிதக் குறிக்கோள்கள் குறிப்பிடத்தக்கனவாகும்.

(ஆ) கணித உருப்படிவத்தைத் தோற்றுவித்தல்: தீர்வு காண்பவரின் பிரச்சினையை முறைப்படுத்திய பின்னர், அடுத்த கட்டமாகப் பிரச்சினையின் சாராம்சத்தை விளக்கக் கூடிய ஒரு கணித உருப்படிவத்தை (ஆய்வை எளிதாகக் கண்டறியும் வகையில்) உண்டாக்குவோம். கணித உருப்படிவங்கள் கருத்தியலான விளக்கங்களாகும்; அவை வடிவங்களிலும், எண்ணுருக் கோவைகளிலும் (symbols and expressions) குறிக்கப்படுகின்றன. இந்தக் கணித உருப்படிவங்கள் மிகவும் பயனுள்ளவையாகும். ஏனென்றால், இவை பிரச்சினையின் மொத்தக் கட்டமைப்பை (structure) மிகவும் சுருக்கமான முறையில் தெரிவிக்கின்றன. இப்படிவம் முக்கியக் 'காரணம் – விளைவு' உறவுகளைக் (cause and effect relationships) காட்ட உதவுகிறது. மற்ற எந்தக் கூடுதலான விவரங்கள் ஆய்வுக்குத் தேவை என்பதை இது காட்டுகிறது. பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண மிகச் சக்தி வாய்ந்த கணித உத்திகளையும் மின்னியக்கக் கணிப்பான்களையும் பயன்படுத்துவதில் இது உதவுகிறது.

கருத்தியல்புகள், தோராய மதிப்புகள், எளிதாக்கப்பட்ட அனுமானங்கள் இவற்றைப் புகுத்திய பின்னரும், உருப்படிவம், உண்மைப்பிரச்சினையின் முறைமையான விளக்கமாக எப்போதும் அமைவதற்குத் தகுந்த கவனம் எடுத்துக்கொள்ளப்பட வேண்டும். பிரச்சினையின் குறிக்கோளைக் கணித வடிவில் தெளிவாக — மிகவும் கவனமாகக் — குறிக்கவேண்டும். முறைப்படுத்திய பிரச்சினையில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட குறிக்கோள்கள் இருப்பின் அவற்றின் அளவுகளை மாற்றியமைத்து ஒருங்கிணைத்து நிறுவனத்தின் உயர்ந்த இலட்சியத்திற்கேற்றதொரு தனித்த வினைப் பயனுறுதியின் அளவைக் (measure of effectiveness) காணவேண்டும்.

(இ) தீர்வு காணுதல்: OR பிரச்சினையின் பொதுவான நோக்கம் (கருத்து) என்னவென்றால், பெரிதும் உகந்த அல்லது சிறந்த ஒரு தீர்வினைத் தேடுதல் ஆகும். உண்மையாகவே பலவிதக் கணிதப் படிவங்கள் தோற்றுவிக்கப்பட்டு அவற்றின் மூலம் பலவிதத் தீர்வு முறைகளும் முன்பே விளக்கப்பட்டுள்ளன. அப்படி இல்லாவிட்டால் நமக்குக் கிடைக்கக்கூடிய கணித உத்திகளைப் பின்பற்றிப் பொருத்தமான வழிமுறையை நாம் விளக்கவேண்டும்.

பயன்படுத்தப்படும் படிவங்களைச் சார்ந்தே இந்தத் தீர்வுகள் பெரிதும் உகந்தவையாக இருக்கவேண்டும் என்று நாம் அனு

மானிக்கிறோம். படிவம் நல்லமுறையில் முறைப்படுத்தப்பட்டுச் சோதிக்கப்பட்டிருந்தால், அதனுல் விளையும் தீர்வு உண்மைப் பிரச்சினைக்கான கருத்தியல் சார்ந்த செயல் நடவடிக்கைகளுக்கு ஒரு சிறந்த தோராய மதிப்பை நோக்கி அமையவேண்டும். OR ஆராய்ச்சி முறையின் பயன்முறை வெற்றிக்கான சோதனை மற்ற வழிமுறைகளால் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் செயல் நடவடிக்கை களைவிடச் சிறந்த வழிகாட்டியாக இருக்கவேண்டும்.

(ஈ) படிவத்தையும் தீர்வினையும் சோதித்தல் : OR-ன் முதல் முக்கியப் படிப்பினையானது ஒருவரது அகத்திற உணர்வைப் பொறுத்து மட்டும் அமையாது. பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண்பதில் இது பயன்படுவதுமட்டுமல்லாமல், தரப்பட்ட பிரச்சினையை விளக்குவதற்கு ஏற்ற உருப்படிவத்தை உண்டாக்கு வதிலும் பயன்படுகிறது. ஓர் உருப்படிவத்தின் நேர்மைத் தகவைக் காண, முறையான சோதனையானது, முழுமையான தீர்வுகளுக்கேற்ற திட்ட நுட்பத்துடன், மாறிமாறி வரும் செயல் நடவடிக்கைகளின் தொடர்பான பலன்களை முன்கூட்டி உரைக்கிறதா, இல்லையா என்று அறிவதாகும். பிரச்சினையின் முறைப்படுத்தலை மறுபரிசீலனை செய்து அதை உருப்படிவத் துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால் ஏதாவது தவறுகள் படிவத்தில் இருப்பது (இருந்தால்) தெரியவரும். எல்லாக் கணித எண்ணுருக் கோவைகளும் அவை பயன்படும் விதத்தில் ஒரே அலகில் சரியாக உள்ளனவா என்பதையும் சோதித்து அறியலாம். OR குழுவோ அல்லது தீர்வு காண்பவரோ உருப்படிவத்திஞல் கிடைத்த தீர்வில் குறைபாடுகள் இருப்பின், அவற்றைக் கண்டு பிடிக்கமுடியும். உருப்படிவங்களைச் சோதிக்கப் 'பின்னோக்கிய' (retrospective) சோதனையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

(உ) தீர்வுகளில் கட்டுப்பாடுகள் விதித்தல் : சோதனைகள் அவற்றின் திருத்தங்கள் இவற்றின் தொகுதிக்குப்பின் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட ஓர் உருப்படிவத்தையும் தீர்வையும் விளக்கு வதாகக் கொள்வோம். மேலும், இந்தத் தீர்வு திரும்பத் திரும்ப உபயோகப்படுத்தப்படுவதாகவும் கொள்வோம். எனினும், ஓர் உண்மைப் பிரச்சினையில் நிபந்தனைகள் அடிக்கடி மாறிக் கொண்டு வருகின்றன என்பதால் இந்த உருப்படிவத்தைப் பய ஞற்றதாகச் செய்யக்கூடிய மாற்றங்களும் நிகழலாம். உட்புகு சுட்டுறுப்புகளின் (Input parameters) மதிப்புகள் பொருளுடைய தாக மாறக்கூடும். இவ்வாறு நிகழ்ந்தால் அதை உடனே கண்டு பிடித்து அந்த உருப்படிவம், அதன் தீர்வு, அதனுல் ஏற்படும் செயல் நடவடிக்கைகள் இவற்றை மாற்றி அமைக்கலாம். இதற்கு அந்த நிலைமையின் பொதுக் கவனக் கண்காணிப்புக்கான

(surveillance) வழியில் ஓர் ஒழுங்குக் கட்டுப்பாட்டை ஏற்படுத்த வேண்டியது அவசியமாகிறது. இதற்காக உருப்படிவத்தின் தீர்வுக் கட்டமான உட்புகு சுட்டு உறுப்புகளைக் கண்டுணர்வது மிகவும் அத்தியாவசியமாகிறது. அதாவது தீர்வினைப் பொரு ளுடைய முறையில் பாதிக்கும் மாற்றங்களைக் கொண்ட அந்தச் சுட்டு உறுப்புகளைத் தேர்ந்து எடுப்பது அவசியமாகிறது. இதையே நாம் 'கூர் உணர்வுத்திறன் ஆய்வு' (Sensitivity Analysis) என்கிறோம். இதன்மூலம் அந்தச் சுட்டு உறுப்புகள், விளையும் தீர்வில் மாறுபாட்டின் தரத்தைத் தீர்மானிக்கவேண்டிய, நிகழக்கூடிய மதிப்புகளைச் சார்ந்து மாறுபடுகின்றன. அடுத்த படியாகக் கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்களின் வாயிலாகத் தீர்வுக் கட்டமான சுட்டு உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றின் புள்ளியியல் பொருளுடைத்தான மாற்றங்களையும் கண்டுபிடித்து அறிவதற்கு ஒரு வழிமுறை வகுக்கப்படுகிறது. கடைசியாக எங்கு எங்கு அத்தகைய மாற்றம் கண்டுபிடிக்கப்படுகிறதோ அங்கு எல்லாம் தீர்வினையும் அதைச் சார்ந்த செயல்முறைகளையும் சரிப்படுத்த வழி வகுக்கப்படுகிறது.

(ஊ) செயல் நிறைவேற்றம் (Implementation) : கணித உருப்படிவத்தை அமைக்கும்போது சில காரணிகள் தரத்தின் பாற்பட்டவையாக இருந்து அவற்றையும் மற்ற எல்லாக் காரணிகளையும் நாம் கவனிக்கத் தவறிவிடுவதும் உண்டு. தீர்வு காண்பவர் அப்படி அளவினால் குறிப்பிடமுடியாத காரணிகளை அறிந்து உணர்ந்து, படிவத்தின்மூலம் கிடைக்கும் தீர்வைச் செயலாற்றும்போது, தனது செயல்முறை அனுபவத்தையும் உள் ளுணர்வு சார்ந்த திறனாய்வு முடிவினையும் (Intuitive Judgement) உபயோகப்படுத்தவேண்டும். அதாவது, OR முறைகள் எந்த ஒரு பிரச்சினைக்கும் உடனடியாகச் செயலாற்றும் வகையில் தீர்வினைத் தந்துவிடுவதில்லை. எனவே, மதிப்பின் திறனாய்வு முடிவு முறையானது மிகவும் அத்தியாவசியமாகிறது. ஆனால், OR முறை (அணுகுநெறி)யானது உருப்படிவத்தில் அமைந்த எல்லாக் காரணிகளையும் கவனத்தில் கொள்வதால் செயலாட்சி யரின் பணி மிகவும் எளிதாகிறது. வெற்றிகரமான ஒரு செயல் நிறைவேற்றத்துக்கு மேல்மட்டச் செயலாட்சி, செயல்முறைச் செயலாட்சி இவை இரண்டின் நல்ல ஒத்திசைவு இன்றியமை யாதது ஆகும். எனவே, OR குழுவானது பிரச்சினையை முறைப் படுத்துவதிலும், தீர்வைக் காண்பதிலும் செயலாட்சியின் முழுமை யான பங்கேற்பை விரும்பி ஊக்குவிக்கவேண்டும். செயல் நிறை வேற்றத்திலும் ஒத்திசைவிலும், பொறுப்பினை ஒவ்வொரு செயற் பாங்கிற்கும், மிக நுட்பமாகக் குறிப்பிடவேண்டும்.

OR-ன் உத்தி முறைகள் (Techniques of OR)

செயலாட்சித் தீர்மானப் பிரச்சினைகளை OR ஆய்வாளர்கள் (ஆராய்ச்சியாளர்கள்) அவர்கள் முறையிலேயே பகுத்து விளக்குவதில் முனைந்து மிக்க தேர்ச்சியும் பெற்றுள்ளனர். ஒவ்வொரு செயலாட்சிக்கும் (நிறுவனத்துக்கும்) ஏற்றவாறு பொதுவான கணித வடிவங்களை அமைத்துத் தீர்வு உத்திகளைக் கண்டு பிடிக்கக் கீழ்க்கண்ட வகை முறைகள் பெரிதும் உதவுகின்றன:

(அ) வாய்ப்பு வளங்களின் இட ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினைகள்.

(ஆ) பதிலமர்த்தீட்டுப் பிரச்சினைகள்.

(இ) சரக்குப்பட்டியல் பிரச்சினைகள்.

(ஈ) வரிசைமுறைத் தொகுதிப் பிரச்சினைகள்.

(உ) முறை வரிசையில் காத்திருக்கும் பிரச்சினைகள் (Queueing Theory).

(ஊ) செயற் போலி முறைகள் (Simulation).

(எ) குறுக்குமறுக்குக் கட்ட அமைவு ஆய்வு (Net work Analysis).

(ஏ) விசை இயக்க, நேர்கோடற்ற திட்ட அமைப்புகள் (Dynamic and Non Linear Programming).

கொடுக்கப்பட்ட ஓர் உண்மையான உலகப் பிரச்சினை, மேற்கண்ட உத்தி வகைகளில் ஏதேனும் ஒன்றையோ பலவற்றையோ மேற்கொண்டு தீர்வு காணவேண்டும் என்ற அவசியம் இல்லை. உண்மையாக, பலவிதத் தீர்மானப் பிரச்சினைகள் இது வரை குறிப்பிடப்படாத முறைகளில் உருப்படிவம் அமைக்கப் பட்டு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வகை முறைகளை உபயோகப்படுத்தக்கூடிய பிரச்சினைகளும் உள்ளன. எனவே, OR ஆய்வாளர் ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட பிரச்சினையையும் அதன் தன்மைக்கு ஏற்றவாறு ஆராய வேண்டியது அவசியமாகிறது.

2. இட ஒதுக்கீட்டு உருப்படிவங்கள் நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டம்

(Allocation Models - Linear Programming)

இட ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினைகளாவன, செய்யப்பட வேண்டிய வேலைகளுக்கான வாய்ப்பு வளங்களை (resources) ஒதுக்கீடு செய்யும் முறைகளைப் பற்றி ஆராய்வதாகும். கிடைக்கக் கூடிய வாய்ப்பு வளங்கள் ஒவ்வொரு வேலையையும் மிகத் திறமையுடன் செய்யக்கூடிய அளவுக்குப் போதுமானதாக இல்லாதபோது ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினைகள் ஏற்படுகின்றன. எனவே. நமது நோக்கம் என்னவென்றால், ஆகும் மொத்தச் செலவை நீச்ச மாக்குவகையில் அல்லது மொத்த வரவை உச்சமாக்கும் வகையில் வேலைகளுக்கு வாய்ப்பு வளங்களை ஒதுக்குவதேயாகும்.

மிகப் பெரும்பாலான ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினைகளைக் கீழே தரப் பட்டுள்ள ஓர் அணியின் (matrix) மூலம் குறித்துக்காட்டலாம். இங்கு ஒவ்வொரு கூறிலும் (cell) உள்ள மதிப்பு C_{ij} ஆனது R_i என்ற ஓர் அலகு வாய்ப்பு வளத்தை J_j என்ற வேலைக்கு ஒதுக்கீடு செய்தால் ஆகும் செலவினைக் (வரவினை) குறிக்கிறது. இந்தக் கூறுகள் தற்சார்புடையனவாகவோ (dependent) அல்லது தற்சார்பற்றனவாகவோ இருக்கலாம். பெரும்பாலும் எல்லாவித ஒதுக்கீட்டு அறிமுறைகளும் தற்சார்பற்ற செலவு அல்லது வரவுகளைக் கொண்ட பிரச்சினைகளைப் பற்றியதாகும். இங்கு ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினைகள் தற்சார்பற்றனவாக இருப் பதால் உருப் படிவம் (Model) எழுதவும் தீர்வு காணவும் எளிதாக இருக்கிறதே தவிர, தற்சார்பற்றனவாகத்தான் எப்போதும் இருக்கவேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

இப்போது iஆவது வாய்ப்பு வளத்திலிருந்து j-வேலைக்கு ஒதுக்கீடு செய்யும் தொகை அளவு x_{ij} என்றால், இதற்கான செலவு (வரவு) $x_{ij}.c_{ij}$ ஆகும்.

இஃது ஒரு நேர்கோட்டுக்குரிய ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினையாகும். தற்சார்பற்ற நேர்கோட்டுக்குரிய செலவுச் சார்பலன்களுடன்

அட்டவணை

வாய்ப்பு வளங்கள்	செய்தற்குரிய வேலைகள்						கிடைக்கக்கூடிய வாய்ப்பு வளங்களின் எண்ணிக்கை
	J_1	J_2	......	J_j	......	J_n	
R_1	C_{11}	C_{12}	......	C_{1j}	......	C_{1n}	b_1
R_2	C_{21}	C_{22}	......	C_{2j}	......	C_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
R_i	C_{i1}	C_{i2}	......	C_{ij}	......	C_{in}	b_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
R_m	C_{m1}	C_{m2}	......	C_{mj}	......	C_{mn}	b_m
தேவைப்படும் வாய்ப்பு வளங்களின் எண்ணிக்கை	a_1	a_2	......	a_j	......	a_n	

கூடிய ஒதுக்கீட்டுப்பிரச்சினைகள் (linear programming techniques) நேர்கோட்டுத் திட்ட நுட்ப வழிமுறைகளின் வாயிலாகப் படித்து அறியப்பட்டுள்ளன. எனினும், சில நேர்கோட்டுக் கொவ்வாத (non-linear) ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காணும் நுட்ப வழிமுறைகளும் இருக்கின்றன. ஒதுக்கீடுகளின் ஒவ்வொரு வரிசை முறையும் (sequence) மற்றதுடன் தற்சார்பற்றதாக இருப்பின், அஃது ஒரு நிலையியல் திட்டப் பிரச்சினை (Static programming problem) ஆகும். அப்படி இல்லாவிடில் அஃது ஒரு விசையியக்கத் திட்டப் பிரச்சினை (Dynamic programming problem) ஆகும். இயக்கவியல் பிரச்சினைகளைவிட நிலையியல் பிரச்சினைகளுக்கு முக்கியக் கவனம் பெரும்பாலும் தரப்படுகிறது. என்றாலும், இயக்கவியல் ஒதுக்கீட்டு உருப்படிவங்களுக்கு விசை இயக்க நேர்கோட்டுத் திட்ட நுட்பம் (Dynamic linear programming), இயக்கவியல் திட்ட நுட்பம் (Dynamic programming) போன்ற நுட்ப வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்தலாம். சுட்டுறுப்புகளின் (para-

meters) நிகழக் கூடிய எதிர்கால மதிப்புகளை மதிப்பீடு செய்யத் தற்போதைய தீர்மானங்கள்.

ஸ்டொகேஸ்டிக் திட்ட நுட்பம், சிலபல இயக்கவியல் பிரச்சினைகளுக்குப் பயன்படுகிறது. இங்கு நடப்புமுடிவுகள் சுட்டுறுப்புகளின் (parameters) தோராய எதிர்கால மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதைப் பொறுத்து அமைகின்றன என அறிகிறோம். (உதாரணமாக ஓர் அலகு செலவு, விற்பனை விலை, தேவைகள் முதலியன சுட்டுறுப்புகள் ஆகும்.) இந்தச் சுட்டுறுப்புகளின் நிகழ்தகவு மாறாமல் இருக்கும். ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினைகளில், முக்கிய நேர் கோட்டுத் திட்ட நுட்பத்தில் தலையாய நுட்ப முறைகள் கீழ்க் காணும் அனுமானங்களைக் கொண்டிருப்பனவாகும். கிடைக்கக் கூடிய வாய்ப்பு வள அளவுகள் a_j செலவுகள் C_{ij} என்பன (பிழையின்றி) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்க. எப்போதும் இவை பிழையின்றிக் கொடுக்கப்படுகின்றன எனக் கொள்ள முடியாது. அச் சமயங்களில் அந்தக் கெழுக்களில் (co-efficients) ஏற்படும் பிழைகளுக்கு ஓர் ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினையின் தீர்வு எந்த அளவுக்குக் கூர் உணர்வு உடையதாக (sensitive) உள்ளதெனத் தீர்மானிக்க வேண்டியிருக்கிறது.

இத்தகைய கூர் உணர்வுத்திறன் உணர்வுகள் (Sensitivity analyses) சுட்டுறுப்புக்கான நேர்கோட்டுத் திட்ட (parametric linear programming) அமைப்புகளால் விளக்கப்படுகின்றன.

$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$ என இருக்கையில் அஃது ஒரு சமநிலை (balanced) ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினையாகிறது. $\Sigma a_j \neq \Sigma b_j$ என்றால் அஃது ஒரு சரிசம நிலையற்ற (unbalanced) ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினையாகும்.

இத்தகைய பிரச்சினையில், எந்த வேலைகளுக்கு எவ்வளவு வாய்ப்பு வளனை ஒதுக்கலாம் என்பது மட்டுமன்றி, எந்த வேலைகளைச் செய்யக்கூடாது ($\Sigma b_i < \Sigma a_j$ எனில்) என்பதையோ அல்லது எந்த வாய்ப்பு வளனைப் பயன்படுத்தக்கூடாது ($\Sigma b_j > \Sigma a_j$ எனில்) என்பதையோ தீர்மானிக்க வேண்டியதும் ஆகிறது. உதாரணமாக ஒரு பொருளின் தேவை (demand) குறைகிறதென்றால் எந்த இயந்திரம் (machine) அல்லது உற்பத்திப் போக்கு (production line) அல்லது எந்தத் தொழிற்சாலையை (plant) அப்போதைக்கு நிறுத்தி வைத்தல் (shut down) அவசியமாகின்றது எனக் கண்டு

அறிகிறோம். உபரித் தேவை ஏற்பட்டாலோ எந்தப் பணி (செயற் கட்டளை) களைப் பூர்த்தியாகாமல் விடுவது, புதிய தொழிற்சாலை ஏதாவது ஆரம்பிப்பதா, அத்தகைய தொழிற்சாலை அதன் பருமன் எவ்வளவு, எங்கு அதை அமைப்பது என்பன போன்ற வற்றைத் தீர்மானிக்க வேண்டியது அவசியமாகிறது. கிடைக்கக் கூடிய வாய்ப்பு வளங்களின் அளவும், ஒவ்வொரு வேலைக்குத் தேவையான அளவும் 1 ஆக இருந்தால் அதாவது $a_j = b_i$, $m=n$ என்றவாறு எல்லா i, j மதிப்புகளுக்கும் (மேலும் எல்லா ஒதுக்கீடுகளிலும் $x_{ij} = 1$ மற்றவைகளுக்கு $x_{ij} = 0$ என்றிருக்கும் போதும்) ஒரு வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினை (Assignment problem) என லாம். இத்தகைய பிரச்சினையில் ஒவ்வொரு வேலைக்கும் ஒரே ஒரு வாய்ப்பு வளமும் ஒரே ஒரு வேலைக்கு மட்டுமே பயன்படுகிறது. வாய்ப்பு வளங்கள் வேலை யாவற்றுக்கும் வகுபடக்கூடியதல்ல (divisible). அதே போல வேலைகளும் வாய்ப்பு வளங்கள் யாவற் றுக்கும் வகுபடக்கூடியதல்ல. வாய்ப்பு வளங்கள் வேலைகளுக்கு மிடையே வகுபடக்கூடியதென்றால், சில பல வேலைகள் வாய்ப்பு வளங்களின் ஒரு சேர்மானமாக (combination) அமையும். வேலைகள், வாய்ப்பு வளங்கள் இரண்டும் ஒரே அளவுகோலின் மீது (on the same scale) எண்ணலகுகளில் (units) குறிக்கப் பட்டால் அதை ஒரு சரக்கேற்ற போக்குவரத்துப் பிரச்சினை (Transportation problem) அல்லது ஒரு பகிர்ந்தளிப்புப் பிரச்சினை (Distribution problem) என்று வழங்குகிறோம். வேலைகளும் வாய்ப்பு வளங்களும் ஒரே எண்ணலகுகளில் குறிக்கப்படா விட்டால், அஃது ஒரு பொதுவான இட ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினை யாகின்றது (general allocation problem).

நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டம்
அல்லது
ஒருபடித்தான அமைப்புத் திட்டம்
(Linear Programming)

ஒரு நேர்கோட்டு அமைப்புத்திட்டம் ஆனது இடஒதுக்கீட்டு உருப்படிவங்களின் (allocation model) ஒரு சிறு கிளையாகும். இதை நேர்கோட்டுத் தன்மை அனுமானத்தின்கீழ் அருமையான அல்லது பற்றாக்குறையான செயல்களைப் (scarce activities) பங்கீடு செய்யும் முறை எனக் கூறலாம். இந்த நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டத்தில் கொள்குறிச் சார்பும் (objective function), கட்டுப்பாடு களும் (constraints) இரண்டுமே ஒருபடித்தானவை (linear) என்று அனுமானிக்கப்படுகின்றன.

இத்தகைய அமைப்புத் திட்ட நுட்பக் கணக்குகளைத் தீர்வு காணப் பொதுவான ஒரு செயல்முறையை முதன் முதலில் கண்டு பிடித்த பெருமை பேராசிரியர் ஜார்ஜ் பி. டான்ட்சிஸ் (George B. Dantzig) எனபவரையே சாரும். 1951ஆம் வருடத்தில் பேராசிரியர் டான்ட்சிஸ் தாம் எழுதிய ஓர் ஆராய்ச்சித் தாளில் சிம்ப்ளக்ஸ் உத்தியின்மூலம் இந்த நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டத்தை நன்கு விளக்கித் தீர்வு கண்டார்.

இந்த நேர்கோட்டுக்குரிய (ஒருபடித்தான) அமைப்புத் திட்டம் நிர்வாகத்திற்கு ஏற்றதோர் ஒழுங்குமுறைப் பாதைக்கான (systems approach) ஒரு நோக்கு(aspect)அல்லது தோற்றம் எனக் கூறலாம். இப் பாதை தீர்வு காணலில் ஏகப்பட்ட குறியிலக்குகளைக் (multiplicity of objectives) கண்டுணர்கிறது.

ஒருபடித் திட்டத்தை மூன்று பகுதிகளாகப் பிரித்து விளக்கலாம். முதலாவதாக மீப்பெரு மதிப்பையோ, அல்லது மீச்சிறு மதிப்பையோயடைவதாக இருப்பதான ஒருபடிகொள் குறிசார் பலனை எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டாவது தரப்பட்ட வகைத் துறை வாய்ப்புகளையோ (resources), தேவைகளையோ (requirements), வாய்ப்பு வளங்களையோ ஒட்டி வரையறுக்கப்பட்ட ஒருபடித்தான கட்டுப்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக்கொள்வோம். மூன்ருவது எதிர்மறையற்ற (non-negativity constraints) தொகுப்பை எடுத்துக்கொள்வோம். மேலே சொன்ன மூன்று பண்புகளையும் கருத்தில் கொண்ட உத்திக் கணக்குகளைத் தீர்வு காண்பதே (நேர்கோட்டு அல்லது ஒருபடித்தான) திட்டத்தின் தீர்வு காணலாகும். நிறையச் செயல்களைச் செயலாற்றுகையில் பங்கீடுதலில் பல சிக்கல்கள் ஏற்படுகின்றன. வகைமுறை வாய்ப்புகளோ அல்லது அவை செலவிடப்படும் விதங்களோ, வரையறுக்கப்பட்ட, கட்டுப்பட்ட நிலையில் இருந்தால் ஒவ்வொரு செயலுக்குமான சிறந்ததொரு ஒதுக்கீடு சிரமமாகிறது. இச் சமயத்தில் மொத்தச்செயல்படும் திறனை உச்சப்படுத்தக்கூடியதொரு திட்டத்தை ஏற்படுத்தி அதன்மூலம் கிடைக்கும் வகைமுறை வாய்ப்புகளை ஒதுக்கீடு செய்ய விரும்புகிறோம். எனவே, அமைப்புத் திட்ட உத்திக் கணக்குகள் கொடுக்கப்பட்ட குறிக்கோளை அடைவதற்குக் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட வாய்ப்புகளை மிகச் சிறந்த முறையில் பங்கிடுவதைத் தீர்மானிப்பதில் ஈடுபடுகின்றன. உதாரணமாக ஆள்கள், இயந்திரங்கள், மூலப்பொருள்கள் போன்ற வகைமுறை வாய்ப்புகள் (வாய்ப்பு வளங்கள்) தரப்பட்டு அவை சேர்ந்து ஓர் உற்பத்திப்பொருளையோ அல்லது பல உற்பத்திப்பொருள்களையோ உண்டாக்குகின்றன என்றால்

அச் சந்தர்ப்பத்தில் அமைப்புத் திட்ட உத்திக்கணக்குகள் மேற் கூறிய கட்டுப்பாடுகளுடன், குறிக்கோளை அடைவதற்கு எவ்வளவு எவ்வளவு பொருள்களை உற்பத்தி செய்யவேண்டும் எனத் தீர் மானிக்க உதவுகின்றன.

சில சமயங்களில் சில வாய்ப்புகளின்மீது கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன. சில நேரங்களில் எல்லா வாய்ப்புகளின்மீதும் கட்டுப் பாடுகள் இருந்து, உற்பத்தி செய்யக் கூடிய பொருள்களின்மீதும் கட்டுப்பாடு இருப்பின், இங்கு ஏராளமான பயனெளிமையான (feasible) பங்கீடுகள் காணப்படுகின்றன. நாம் அந்த எல்லாவித வாய்ப்புப் பங்கீடுகளின்மூலம் பெரிதும் உகந்ததொரு பங்கீட்டைக் கண்டுபிடிக்க முடியும். அப் பங்கீடானது மீப்பெரு இலாபத் தையோ அல்லது மீச்சிறு செலவையோ ஒட்டியதான பங்கீடாகும்.

எனவே, ஒருபடித்தான அமைப்புத் திட்டம், மாறிகளின் எல்லாச் சார்புகளும் ஒருபடித்தானதாகவும், அத்துடன் குறிக் கோள் சார்பலனும் ஒருபடித்தானதாகவும்,அமைந்த உத்திக் கணக்குகளைப் பற்றியதே என்பது புலனுகிறது. ஒருபடித் திட் டத்தின் பொது உத்திக் கணக்குகள் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கப் படுகின்றன. 'm' ஒருபடித்தான சமனிலிகள் அல்லது சமன் பாடுகள் n மாறிகளில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அந்தக் கட்டுப் பாடுகளைத் திருப்திப்படுத்தியும், அந்த மாறிகளின் ஏதாவது ஒரு நேர்கோட்டுச் சார்பலனை உச்சப்படுத்தியோ அல்லது மீச்சிறுமப் படுத்தியோ, இருக்குமாருன மாறிகளின் எதிர்மறையற்ற மதிப் களைக் கண்டுபிடிக்க விரும்புகிறோம். கணிதமுறையில் விளக்கினல் $m \gtrless n$ என்ருல் கீழ்க்கண்ட சமனிலை அல்லது சமன்பாடுகளை எழுதலாம் :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \ \{<,=,>\}\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \ \{<,=,>\}\ b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n \ \{<,=,>\}\ b_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \ \{<,=,>\}\ b_n \end{array}\right\} \ldots (1)$$

இங்கு ஒவ்வொரு கட்டுப்பாடும் $<,=,>$ என்ற மூன்றில் ஏதாவது ஒன்றினைத் தழுவி (ஏற்று) நிற்கும்.

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + C_n x_n \qquad \ldots \quad (2)$$

என்ற குறிக்கோள் சார்பலனை எழுதினால், c_{ij}, b_i, c_j என்பன அறிந்த நிலை எண்கள் எனக் கொள்வோம். சார்பலன் (1) ஐத் திருப்திப்படுத்தியுடன் சார்பலன் (2)ஐ உச்சமாக்கவோ, நீச்ச மாக்கவோ முடியுமானதுமான எதிர்மறையற்ற மாறிகளின் மதிப்பைக் காண முயல்வோம். அதாவது $X_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ என்ற X_j மாறிகளின் மதிப்பைக் காண முயலுவோம். மாறிகளின் மதிப்புகள் முழு எண்களாகத்தான் இருக்கவேண்டும் என்ற கூடுதல் நிபந்தனையையும் விதித்தால், நமக்கு ஒருபடித்தான அமைப்புத் திட்டம் கிடைக்காது. அதற்குப்பதில் இந்த உத்திக் கணக்கு முழு எண் அமைப்புத் திட்டமாகிவிடும் (Integer programming problem). உச்ச நிலையையோ அல்லது மீச்சிறும நிலையையோ அடையும். சார்பலனை நாம் குறிக்கோள் சார்பலன் அல்லது கொள்குறிச் சார்பலன் என்று சொல் கின்றோம்.

X_j மாறிகளின்மீதான நிபந்தனை அதாவது $x_j \geq 0$ என்பு தனை எதிர்மறையற்ற கட்டுப்பாடு (Non-negatively restriction) என்கிறோம். மேலே காணப்படும் (1) கட்டுப்பாடுகளை ஏற்று திற்கும் எந்தவித X_j தொகுப்பினையும் நாம் ஒருபடித் திட்டத்தின் தீர்வு எனக் கூறுகிறோம்.

எதிர்மறையற்ற கட்டுப்பாட்டினைத் திருப்திப்படுத்தும் எந்தத் தீர்வையும் பயனெளிமையுடைய (அல்லது நடைபெறக் கூடிய) (feasible solution) தீர்வு என்கிறோம். குறிக்கோள் சார்பலனை உச்சப்படுத்தியோ அல்லது மீச்சிறுமப்படுத்தியோ காட்டும் எந்த வித நடைபெறக்கூடிய தீர்வையும் நாம் உச்சக்கட்ட (நடை பெறக்கூடிய அல்லது பயனெளிமையுடைய) தீர்வு (optimal feasible solution) என்று வழங்குகிறோம்.

உத்திக்கணக்கில் m கட்டுப்பாடுகள் (நிபந்தனைகள்) இருந்து, m-க்கு மேற்படாத X_j மதிப்புகள் மிகை எண்களானால், அத் தகைய பயனெளிமை யுடைய தீர்வை ஓர் அடிப்படைப் பயனெளிமையுடைய தீர்வு (basic feasible solution) எனலாம். (இங்கு m கட்டுப்பாடுகளும் நேர்கோட்டுத் தொடர்பு அற்றவை களாக இருக்கவேண்டும் என்பது முக்கியம்). சரியாக m மிகை X_j மதிப்புகள் இருப்பின், அத் தீர்வை ஒரு சீர்குலைவற்ற (பண்புச் சிதைவற்ற) அடிப்படைப் பயனெளிமையுடைய தீர்வு (Non-degenerate basic feasible solution) என்கிறோம். m-க்குக் குறைந்த X_j மதிப்புகள் மிகை மதிப்புகளாயின், அத் தீர்வை ஒரு சீர்குலைவான (பண்புச் சிதைவுற்ற) அடிப்படைப் பயனெளிமை

யுடைய தீர்வு (Degenerate basic feasible solution) என்கின்றோம்.

ஒரு படிக்குரிய அமைப்புத் திட்டக் கணக்குகளைத் தீர்வு காணுகையில் ஓர் உச்சகட்ட பயனெளிமையுடைய தீர்வை நோக்கியே நாம் செல்கிறோம்; பொதுவாக ஒருபடிக்குரிய திட்டக் கணக்கில் எண்ணற்கரிய பயனெளிமையுடைய தீர்வுகள் இருக்கும். அவை யாவற்றிலும் சிறந்ததொரு தீர்வு, குறிக்கோள் சார்பலனை உச்சகட்டம் ஆக்கும் ஒரு தீர்வேயாகும். சில சிறப்புடைய (Classical) நே.அ.தி. பிரச்சினை (நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டப் பிரச்சனை)களில் சிலவற்றை இங்குக் கவனிப்போம்.

மாதிரி 1. உற்பத்திக் கலவைப் பிரச்சினை (Product mix problem)

ஓர் உற்பத்தியாளர் தாம் உற்பத்தி செய்யும் 3 பொருள்களில் ஒவ்வொன்றிலும் எந்தெந்த அளவு உற்பத்தி செய்வது எனத் தீர்மானம் செய்ய விரும்புகின்றார். இத்தகைய உற்பத்திப் பொருள்களால் ஏற்படும் எண்ணலகு இலாபம் (unit profit) முறையே 25 ரூபாய், 70 ரூபாய், 20 ரூபாய் எனக் கொள்க. ஒவ்வொரு பொருளும் துளைகளிடும் இயந்திரம் (milling machine), கடைசல் இயந்திரம் (lathe), அரைக்கும் இயந்திரம் (grinder) இம் மூன்று இயந்திரங்களின் வழியாகவும் இயங்கப்படுகிறது. அவற்றுக்கான இயந்திர நேரங்களை ஓர் அணியில் கீழே கண்டவாறு காட்டினால், இலாபத்தை மீப்பெருமமாக்கும் மாதாந்திர உற்பத்திப் பட்டியல் என்ன?

இயந்திரம்	ஓர் அலகுக்கான இயந்திர நேரம் (மணிகளில்)			
	உற்பத்திப் பொருள்			மொத்தம் கிடைக்கக்கூடிய மாதாந்திர இயந்திரம் நேரங்கள் (மணிகளில்)
	1	2	3	
துளைகளிடும் இயந்திரம்	8	2	3	2400
கடைசல் இயந்திரம்	4	3	0	1200
அரைக்கும் இயந்திரம்	2	0	1	600

இங்கு மொத்தம் மூன்று வேலைகள் அதாவது X_1, X_2, X_3 என்ற அளவு மூன்று உற்பத்திப் பொருள்கள் செய்யப்பட்டு உள்ளன. X_1, X_2, X_3 என்பன மாதாந்திர உற்பத்தி அளவுகளானால் மொத்த இலாபம்

$$Z = 25X_1 + 70X_2 + 20X_3$$

இந்த இலாபத்தை மீப்பெருமமாக்க உற்பத்தியாளர் முனைகிருர். இங்கு X_1, X_2, X_3 என்பன எதிர்மறையற்றதாக உள்ளன. கிடைக்கக்கூடிய இயந்திர நேரங்களையும் ஒவ்வொரு பொருளுக்குமான ஓர் அலகு இயந்திர நேரங்களையும் துளையிடும் இயந்திரத்தில் பயன்படுத்தி ஒரு சமனிலியை எழுதலாம். இவ்வாறே மற்ற இயந்திரங்களுக்கும் சமனிலிகளை எழுதினுல் மூன்று சமனிலிகள் கிடைக்கின்றன. அவையாவன:

$$3X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 2400$$
$$4X_1 + 3X_2 \leq 1200$$
$$2X_1 + \quad + X_3 \leq 600$$

எனவே பிரச்சினை என்னவென்ருல், $25X_1 + 70X_2 + 20X_3$-ன் மதிப்பை மீப்பெருமமாக்க வல்லதும், மேலேகண்ட சமனிலிகளைத் (கட்டுப்பாடுகளை) திருப்திப்படுத்துவதுமான எதிர்மறையற்ற ஒரு (X_1, X_2, X_3) மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியதே ஆகும். ஆகவே, இது ஒரு நேர்கோடு அமைப்புத் திட்ட பிரச்சினை யாகிறது.

மாதிரி 2. ஒரு மருந்துமுறை உணவு, பத்திய உணவுப் பிரச்சினை: (A diet problem)

முட்டைகள், பால், மாட்டு இறைச்சி இவற்றைக் கொண்ட ரு மருந்துமுறை உணவைத் தீர்மானிக்கும் பிரச்சினையை எடுத்துக்கொள்வோம். A,C,D என்ற வைட்டமின்கள் குறைந்த சில அளவுத் தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்யக்கூடிய உணவு தேவைப்படுகிறது.

இந்த உணவுகளில் உள்ள 3 வைட்டமின் மி.கிராம் அளவு களும் கீழே உள்ள அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை

வைட்டமின்	பால் காலன்களில்	மாட்டு இறைச்சி பவுண்டு	முட்டை டஜன்களில்	மீச்சிறுமமான தினசரி தேவை மில்லி கிராம்
A	1	1	10	1 மி. கிராம்
C	100	10	10	50 மி.கி.
D	10	10	10	10 மி.கி.
மொத்தச் செலவு	ரூ. 5/-	ரூ. 8/-	ரூ. 4/-	

ஒவ்வோர் உணவின் ஓர் அலகு விலை அணியில் தரப் பட்டுள்ளது. தினசரித் தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்யும் அளவில் எவ்வழியில் மீச்சிறுமமாக்கும் உணவுச் செலவைக் காணலாம் எனக் கண்டுபிடி.

இங்கு X_1 காலன்கள் பாலும், X_2 பவுண்டு மாட்டு இறைச்சியும், X_3 டஜன் முட்டைகளும் ஒரு பத்திய உணவுப் பிரச்சினையில் தீர்வாகக் கண்டால், இதற்கான மொத்தச் செலவு $= 5X_1 + 8X_2 + 4X_3$ ஆகிறது. இந்த மொத்தச் செலவை மீச்சிறுமமாக்கவல்ல X_1, X_2, X_3-ன் மதிப்புகளைத் தரப்பட்ட (நிபந்தனை) கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டவாறு கணித்தால் அதுவே ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வாகும்.

கட்டுப்பாடுகள் : $X_1 + X_2 + 10X_3 \geqslant 1$

ஏனெனில், அணியில் முதல் நிரையில் மீச்சிறு தினசரித் தேவை 1 என்பதால் "$\geqslant$" சமனிலியைப் பயன்படுத்துகிறோம். இதேபோல மற்ற இரண்டு சமனிலிகளும்,

$100X_1 + 10X_2 + 10X_3 \geqslant 50$

$10X_1 + 100X_2 + 10X_3 \geqslant 10$ எனக் குறிக்கலாம்.

இந்த மூன்று சமனிலிகளையும் மூன்று கட்டுப்பாடுகளாகக் கொண்டு X_1, X_2, X_3 மதிப்புகள் எதிர்மறையற்றதாக இருப்பதாலும், இந்த நிபந்தனைகளுடன் $Z = 5X_1 + 8X_2 + 4X_3$ ஐ மீச்சிறுமமாக்கக் கூடியதொரு (X_1, X_2, X_3) தீர்வைக்காண விழைகிறோம். எனவே, இதுவும் ஒரு நேர்கோட்டு அமைப்புத்திட்ட பிரச்சினை ஆகிறது.

மாதிரி 3. இட ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினை (Allocation problem)

ஒரு தொழிற்சாலையில் தானே இயங்கும் கடைசல் இயந்திரம் (auto-lathe) ஒன்று உள்ளது. பெரியவிட்டமுள்ள மரைகளை உற்பத்தி செய்வதென்றால் ஒரு வாரத்துக்கு 400 மரைகள் வரை செய்யும் திறனுண்டு. சிறிய விட்டமுள்ள மரைகளை உற்பத்தி செய்வதென்றால், வாரம் ஒன்றுக்கு 300 மரைகள் வரை செய்யும் திறனுண்டு. இதே அளவுக்கு விற்பனை வாய்ப்பும் (Sales potential) உண்டு. இந்த மரைகளைத் தயார் செய்யக் கிடைக்கும் உலோகக் கம்பி (rod)யின்மூலம் இருவித மரைகளிலும் வாரம் ஒன்றுக்கு மொத்தம் 380 மரைகள் வரைதான் உற்பத்தி செய்ய முடியும். பெரிய விட்டமறை ஒன்றிற்கு 2 பைசா இலாபமும் சிறிய விட்டமுள்ள மரை ஒன்றிற்கு 5 பைசா இலாபமும் கிடைக்

கிறது. இயந்திரத்தின் மொத்த இலாபத்தை மீப்பெருமமாக்க எவ்வளவு பெரிய விட்டம் உள்ள மறைகள், எவ்வளவு சிறிய விட்டம் உள்ள மறைகள் தயாரிக்கவேண்டும் எனக் கண்டுபிடி. X_1 என்பது தயாரிக்கப்படும் பெரிய விட்ட மரைகளின் எண்ணிக்கை எனவும், X_2 என்பது தயாரிக்கப்படும் சிறியவிட்ட மரைகளின் எண்ணிக்கை எனவும் கொள்க.

$X_1 > 0$, $X_2 > 0$ ஆகும்.

இயந்திரங்களின் மீதும், விற்பனைத்திறன் மீதுமான கட்டுப்பாடுகள் $\left\} \begin{array}{l} X_1 < 400 \\ X_2 < 300 \end{array}\right.$

மூலப்பொருள்களின் கட்டுப்பாடு : $X_1 + X_2 < 380$

கொள்குறிச் சார்பலன் : $Z = 2X_1 + 5X_2$

எனவே, தரப்பட்ட பிரச்சினையைக் கணிதமுறை வடிவாக்கத்தில் (mathematical formulation) காட்டப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி 4. ஒரு தோல் கம்பெனி இரு வித தோல்பட்டை வார்களைத் (belts) தயாரிக்கிறது. உயர்தரமான A வார்களையும் குறைந்த தரமான B வார்களையும் தயார் செய்கிறது. அவற்றின் இலாபங்கள் முறையே வார் ஒன்றுக்கு 40 பைசா, 30 பைசா ஆகும். A வித வார் ஒவ்வொன்றும் தயார் செய்ய, B-க்கு ஆகும் நேரத்தைப் போல இரட்டிப்பு மடங்கு நேரமாகிறது. எல்லா வார்களும் B விதத்தைச் சேர்ந்தனவாக இருந்தால் மொத்தம் 100 பட்டை வார்கள் நாளொன்றுக்குத் தயார் செய்ய முடியும். இரண்டு விதங்களிலும் சேர்த்து நாளொன்றுக்கு 800 பட்டை வார்கள் தயாரிக்கும் அளவுக்குத்தான் தோல் அளிப்பும் இருக்கிறது. (பட்டை வார் A-க்கு ஒரு நாகரிக வார்ப் பூட்டுத் தேவைப்படுகின்றது). அவையும் நாளொன்றுக்கு 400 தான் கிடைக்கின்றன. இதேபோல B விதப் பட்டை வார்களுக்கு ஏற்கெனவே 700 வார்ப் பூட்டுகள் உள்ளன என்றால், ஒவ்வொரு விதத்திலும் எத்தனை பட்டை வார்கள் தயார் செய்ய வேண்டும் ?

X_1 : தயாரிக்கும் A வித வார்களின் எண்ணிக்கை.

X_2 : தயாரிக்கும் B வித வார்களின் எண்ணிக்கை என்று கொள்க.

$$\left.\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &\leqslant 1000 \\ X_1 + X_2 &\leqslant 800 \\ X_1 &\leqslant 400 \\ X_2 &\leqslant 700 \\ X_1, X_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கேற்ப

இலாபச் சார்பலன் $Z = 0{\cdot}4X_1 + 0{\cdot}3X_2$ ரூபாயை மீப்பெரும மாக்கு என்பதே பிரச்சினையின் கணித வடிவாக்கமாகும்.

எனவே, மேற்கூறிய நான்கு மாதிரிகளின்மூலம் எந்த ஒரு பிரச்சினையிலும் சில நிபந்தனைகள் விதிக்கப்பட்டு மொத்த இலாபத்தை / மொத்தச் செலவை மீப்பெரும / மீச்சிறுமமாக்கக் கூடியவாறு எந்த அளவு பொருள்களை வாங்க/உற்பத்தி செய்ய முடியும் என்பதைக் கணித வடிவாக்கத்தில் காட்டிவிளக்குகிறோம்.

இப்போது கணித வடிவாக்கத்தில் உள்ள பிரச்சனைக்குத் தீர்வு காண முற்படுவோம். ஒருபடி அமைப்புத் திட்ட/ஒரு நேர் கோட்டுத் திட்ட அமைப்புப் பிரச்சினையைத் தீர்வு காண்பதற்கு முன்னர் கவனிக்கவேண்டிய விதிமுறைகளாவன :

1. தீர்வுகளில் எல்லா X_j மாறிகளும் எதிர்மறையற்ற மதிப்பு களுடன் இருக்கவேண்டும்.

2. கட்டுப்பாடுகள் ஒரு படித்தானதாக இருக்கவேண்டும்.

3. கொள் குறி சார்பலனும் ஒருபடித்தானதாக இருக்க வேண்டும்.

4. கட்டுப்பாடுகளில் சில $\geqslant$ என்ற சமனிலியுடனும், சில $\leqslant$ என்ற சமனிலியுடனும் சில "$=$" என்ற சமனிலியுடனும் இருக்கலாம். அல்லது எல்லாமே $\leqslant$ என்றோ, $\geqslant$ என்றோ, அல்லது எல்லாமே $=$ என்றோ இருந்தாலும் தீர்வு காண இயலும்.

5. சமனிலிகளின் வலது பக்கமுள்ள b_i மதிப்புகள் நிச்சய மாக எதிர்மறையற்ற எண்களாக இருந்தாகவேண்டும். அப்படி இல்லாமல் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட b_i மதிப்புகள் எதிர்மறை எண்களாக இருந்தால், அந்தக் குறிப்பிட்ட சமனிலி களை (-1) எண்ணால்பெருக்கி எதிர்மறை b_i மதிப்புகளை எதிர்மறை யற்ற b_i மதிப்புகளாக மாற்றிக் கொள்ளவேண்டும். இதனால் "$\leqslant$" சமனிலியானது $\geqslant$ சமனிலியாக மாறிவிடும். இதேபோல "$\geqslant$" சமனிலி $\leqslant$ சமனிலியாக மாறும். "$=$" சமன்பாடு அப்படியே $=$ என இருக்கும்.

6. கொள் குறிசார்பலன் இலாபத்தைக் (profit) குறிக்கு மாயின், இச் சார்பலனின் மீப்பெரு (உச்ச) நிலையை காண்பதே

நமது இலட்சியம். அதே சமயத்தில் இச் சார்பலன் செலவுத் தொகை (Cost)யைக் குறிப்பதாயின், இச் சார்பலனின் மீச்சிறும (நீச்ச) நிலையை நாம் காணவேண்டும். எனவே, கொள் குறி சார்பலன் எத்தகையதாயினும் (இலாபச் சார்பலனையோ அல்லது செலவுத் தொகைச் சார்பலனையோ) நாம் அச் சார் பலனின் பெரிதும் உகந்ததொரு (Optimal) மதிப்பைக் காண வேண்டியது அவசியமாகிறது.

வரைபட முறையில் தீர்வு காணல் (Solution by Graphical method)

இருமாறிகளை மட்டுமே கொண்ட நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டம் பிரச்சினையை வரைபட முறையில் தீர்வு காண்பது சுலபமான முறையாகும். ஜியோமிதி முறைகளில் இருமாறி களுக்கான இத்தகைய தீர்வு மிகவும் முக்கியதுவம் வாய்ந்தது. ஏனெனில், இதன்மூலம் நிறைய மாறிகளுக்கு ஆன பொதுவான முறைகளில் தீர்வு எவ்வாறு இருக்க முடியும் என முன்னறிவுத் திறன்மூலம் (insight) ஊகிக்க முடிகிறது. இப்போது கீழ்க்காணும் ஒரு நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்ட பிரச்சினைக்கு வரைபடத் தீர்வைக் காண்போம்.

உதாரணம் 1 :

$$X_1 > 0 \quad \dots \quad (1)$$
$$X_2 > 0 \quad \dots \quad (2)$$
$$X_1 < 4 \quad \dots \quad (3)$$
$$X_2 < 6 \quad \dots \quad (4)$$
$$3X_1 + 2X_2 < 18 \quad \dots \quad (5)$$

இந்த நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்றவாறு $Z = 3X_1 + 5X_2$ஐ மீப் பெருமமாக்குக.

தீர்வு :

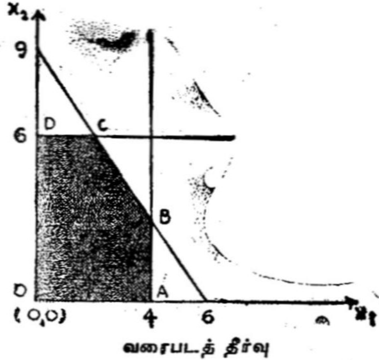
இஃது ஒரு நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்ட கணக்காகும். இங்குக் கட்டுப்பாடுகளும் கொள் குறி சார்பலனும் ஒருபடித் தானவை. இருமாறிகள் X_1, X_2 ஐக் கொண்ட இக் கணக்கில் X_1, X_2-களுக்கான சமனிலிகளைப் பயன்படுத்தி X_1, X_2 அச்சுக் கோடுகளில் கட்டுப்பாடுகளை வரை கோடுகள்மூலம் கீழ்க் கண்டவாறு குறிப்போம். $X_1 > 0$, $X_2 > 0$ என்பனவற்றால் தீர்வு தேக்காட்டின் ஆயக்கூறுகளில் (Cartesian co-ordinates) முதல் கால்வட்டத்தில் (First quadrant) அமைகிறது.

X_1, X_2 அச்சுகளில் அளவு கோல் ஏற்படுத்தி $X_1 < 4$ என்ற சமனிலியைப் பயன்படுத்த $X_1 = 4$, என்ற இடத்தில் X_2 அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்கோடு முதல் கால் வட்டத்தில் வரையவும். இப்போது அந்தக் கோட்டிலும் அந்தக் கோட்டுக்கு இடது பக்கத்திலும்தான் தீர்வு அமைய முடியும் எனக் காண்கிறோம். ஏனெனில், $X_1 < 4$.

இதேபோல $X_2 < 6$ ஐப் பயன்படுத்த, $x_2 = 6$ என்ற இடத்தில் X_1 அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்கோடு முதல் கால் வட்டத்தில் வரையவும். இப்போது அக் கோட்டிலும் அக் கோட்டிற்கு கீழேயும்தான் தீர்வு அமைய முடியுமே தவிர, அக் கோட்டிற்கு மேலே அமையமுடியாது என அறிகிறோம். ஏனெனில், $X_2 < 6$.

கடைசி சமனிலி $3X_1 + 2X_2 < 18$-க்கான ஒரு கட்டுப்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க $3X_1+2X_2 = 18$ என்ற சமன்பாட்டிற்கான கோட்டை வரையலாம். இக் கோட்டை வரைவதற்கு இரு புள்ளிகள் நிச்சயமாகத் தெரியவேண்டும். இப்போது $X_1=0$ என வைத்துக்கொண்டால் $3(0) + 2X_2 = 18$ i.e. $X_2 = 9$ ஆகிறது. இதேபோல $X_2 = 0$ ஆனால் $3X_1 + 2(0) = 18$. எனவே, $X_1 = 6$ ஆகிறது.

∴ இரு புள்ளிகளாவன (0,9), (6,0) ஆகும். இப்புள்ளிகளைக் குறித்து இவற்றின் வழியாகக் கோடு வரையவும் இப்போது இக் கோட்டின்மீதோ அல்லது இக் கோட்டுக்குள்ளேயோ தான் தீர்வு இருக்கும். ஏனெனில், $3X_1+2X_2 < 18$. எனவே, இந்தக் கோடுகள் எல்லாவற்றிற்கும் பொதுவாக அமைகின்ற பொதுவான பரப்பளவைத் தனி வேறுபட்ட மாதிரி (distinct) மை தீட்டியோ, சிறு அடைப்புக் கட்டங்களினால் குறித்தோ காட்டலாம்.



வரைபடத் தீர்வு

இங்குள்ள 5 முனைக் கோட்டின் புள்ளிகள் 0, A, B, C, D என்பன. இந்தப் புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்களை எழுதுவோம்.

0 புள்ளி : (0,0)

A புள்ளி : (4,0)

*B புள்ளி : (4,3)

**C புள்ளி : (2,6)

D புள்ளி : (0,6)

[குறிப்பு : அம்புக்குறியினுள் சூழ்ந்த பரப்பளவில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் (infinite number of points) தீர்வுகள் காணப்படினும் முனைப் புள்ளிகளில்தான் மீப்பெருமம் காணப்படும் என்ற ஒரு நியதியைப் பின்பற்றி முனைப்புள்ளிகளைக் கண்டறிந்த பின்னர், அம் முனைப்புள்ளிகளில் எந்த முனைப்புள்ளி ஒரு மீப்பெருமப் புள்ளியோ அதுதான் ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வை ஏற்படுத்துகிறது என்பது தத்துவம். அதன்படி இப்போது தீர்வு காண்போம்.]

*B புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை :

$\left.\begin{array}{l} X_1 = 4 \\ 3X_1 + 2X_2 = 18 \end{array}\right\}$ என்ற கோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி B ஆகும்.

$$3X_1 + 2X_1 = 18;\ 2X_2 = 6;\ X_2 = 3$$

எனவே,

$B = (4,3)$ ஆகிறது.

**இதேபோல $X_2 = 6$

$3X_1+2X_2 = 18$ என்ற கோடுகளின் சந்திப்புப்புள்ளி C ஆகும்.

$$3X_1 + 12 = 18;\ 3X_1 = 6;\ X_1 = 2$$

எனவே, $C = (2,6)$ ஆகிறது.

இந்த முனைப்புள்ளிகளில் C கொள்குறி சார்பலன் Z-ன் மதிப்புகளைக் கண்டால் $= 3X_1 + 5X_2$

0 புள்ளியில் $Z_0 = 0$

A புள்ளியில் $Z_A = 3\ (4) + 5\ (0) = 12$

B புள்ளியில் $Z_B = 3\ (4) + 5\ (3) = 27$

C புள்ளியில் $Z_C = 3\ (2) + 5\ (6) = 36$

D புள்ளியில் $Z_D = 3\ (0) + 5\ (6) = 30$

கொள்குறி சார்பலன் மொத்த இலாபத்தைப் பற்றியதாலும் இதன் மீப்பெரும மதிப்பைக் காண வேண்டியிருப்பதாலும் இங்கு C புள்ளியில் $Z_C = 36$ மதிப்பே மீப்பெரும மதிப்பாகிறது எனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே $C = (2, 6)$ என்ற புள்ளியில் பெரிதும் உகந்த தொரு தீர்வு ஏற்படுகிறது. எனவே, தீர்வு $X_1 = 2$ அலகுகள் $X_2 = 6$ அலகுகள். இவ்வாறு வரைபடத் தீர்வு காண்கின்றோம்

உதாரணம் 2 :

மாதிரி 4-ல் குறிப்பிடப்பட்ட தோல்பட்டை வார்களைப் பற்றிய பிரச்சினையின் கணித வடிவாக்கத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். அதற்கு ஒரு வரைபடத் தீர்வு காண்போம்.

X_1 = உற்பத்தி செய்யப்படும் A விதப் பட்டை வார் எண்ணிக்கை.

X_2 = உற்பத்தி செய்யப்படும் B விதப் பட்டை வார் எண்ணிக்கை.

(i) எதிர்மறையற்ற கட்டுப்பாடு $X_1 > 0$, $X_2 > 0$ என்பன.

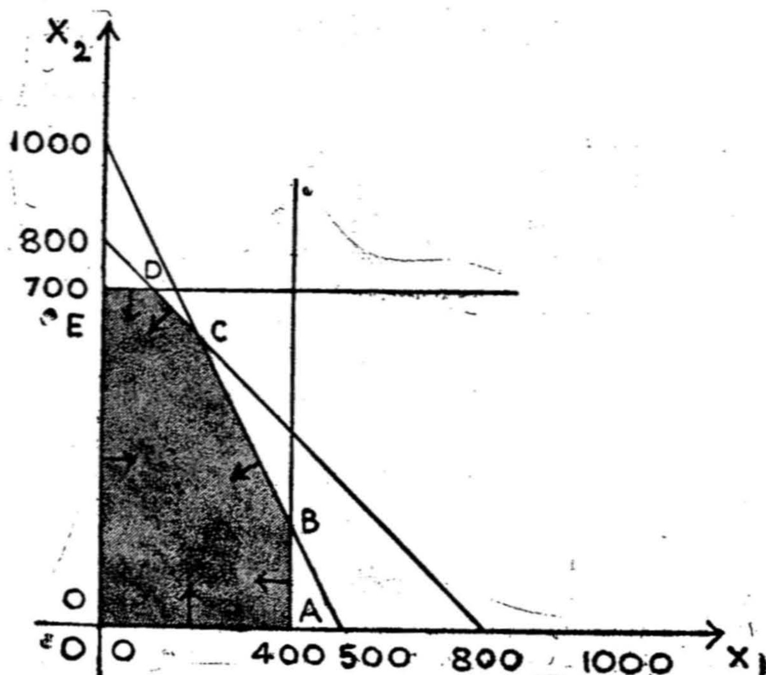
(ii) ஒருபடித்தான கட்டுப்பாடுகள்.

$$X_1 < 400$$
$$X_2 < 700$$
$$X_1 + X_2 < 800$$
$$2X_1 + X_2 < 1000$$

(iii) கொள்குறி சார்பலன் $Z = 0{\cdot}40X_1 + 0{\cdot}30X_2$ஐ மீப் பெருமமாக்க வேண்டும்.

வரைபடத்திலில் $X_1 > 0$, $X_2 > 0$ என்பன முதல் கால் வட்டத்தில் தீர்வு இருப்பதைக் காட்டுகின்றன.

$X_1 = 400$-க்கு ஒரு X_2-ன் இணை நேர்கோடும், $Z_2 = 700$க்கு ஒரு X_1-ன் இணை நேர்கோடும் வரையவும். $X_1 + X_2 = 800$-க்கு ஒரு நேர்கோடு வரைய $X_1 = 0$ என்றால், $X_2 = 800$; $X_2 = 0$ என்றால் $X_1 = 800$ என்றும், இரு புள்ளிகள் (0,800), (800,0) மூலமாக நேர்கோடு வரையவும். $2X_1 + 2X_2 = 1000$-க்கு $X_1 = 0$ எனில், $X_2 = 1000$ என்றும் $X_2 = 0$ எனில் $X_1 = 500$ எனவும் அறிகிறோம். இந்த இரு புள்ளிகள் (0,1000), (500,0) மூலமாக நேர்கோடு வரைகிறோம். இந்தக் கோடுகளில் கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கப் பொதுவான பரப்பளவை மையிட்டு அல்லது தீர்க்கமான முறையில் குறித்துக்காட்டிப் பிறகு முனைப்புள்ளிகளில் எந்த முனைப் புள்ளியில் இலாபம் மீப்பெருமத்தை அடைகிறதோ அப் புள்ளியின் X_1, X_2 மதிப்பே ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வென்கிறோம்.



வரைபடத் தீர்வு

0 (0,0)	$B : X_1 = 400$
A (400,0)	$2X_1 + X_2 = 1000$
B (400,200)	$\therefore \; X_2 = 1000 - 800 = 200$
C (200,600)	$\therefore \; B = (400,200)$
D (100,700)	$C = X_1 + X_2 = 800$
E (0,700)	$2X_1 + X_2 = 1000$
	$X_1 = 200$
	$X_2 = 600$

$D : X_2 = 700$

$Z = 0{\cdot}40X_1 + 0{\cdot}30X_2$ எனில்

$X_1 + X_2 = 800$

$X_1 = 100$

இந்த முனைப் புள்ளிகளில் Z-ன் மதிப்பைக் கண்டால்,

$Z = 0{\cdot}40X_1 + 0{\cdot}30X_2$

$Z_0 = 0$

$Z_A = 0{\cdot}40\ (400) + 0{\cdot}30\ \ (0) \ = 160{\cdot}00$ ரூ.

$Z_B = 0{\cdot}40\ (400) + 0{\cdot}30\ (200) = 220{\cdot}00$ ரூ.

$Z_C = 0{\cdot}40\ (200) + 0{\cdot}30\ (600) = 260{\cdot}00$ ரூ.

$Z_D = 0{\cdot}40\ (100) + 0{\cdot}30\ (700) = 250{\cdot}00$ ரூ.

$Z_E = 0{\cdot}40\ \ (0)\ + 0{\cdot}30\ (700) = 210{\cdot}00$ ரூ.

$\therefore$ பெரிதும் உகந்த தீர்வு $C = (200,600)$ அதாவது

$X_1 = 200$ அலகுகள்

$X_2 = 600$ அலகுகள் ஆகும்.

உதாரணம் 3 :

கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடுகள் ஆவன:

(1) $X_1 \geqslant 0,\ \ X_2 \geqslant 0$

(2) $X_1 + X_2 < 6$

(3) $X_1 - 3X_2 > -10$

(4) $X_1 + 3X_2 > 6$

(5) $2X_1 + X_2 \geqslant 4$

இக் கட்டுப்பாடுகளுக்குச் சரியான, ஒரு கொள்குறி சார்பலனை $Z = X_1 + 2X_2$ ஐ மீப்பெருமப்படுத்துக. இங்கு (3) ஆவது கட்டுப்பாட்டைச் சிறிது மாற்றியமைத்தால் $-X_1 + 3X_2 < 10$ என்றாகிறது. ஏனெனில் b_i மதிப்புகள் எதிர்மறையற்றதாக இருக்கவேண்டும்.

வரைபடம் வரைவதற்கு $X_1 + X_2 = 6,\ X_1 - 3X_2 = 10$ $X_1 + 3X_2 = 6;\ 2X_1 + X_2 = 4$ என்பதற்கான நேர்க்கோடு களை வரையத் தேவையான புள்ளிகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

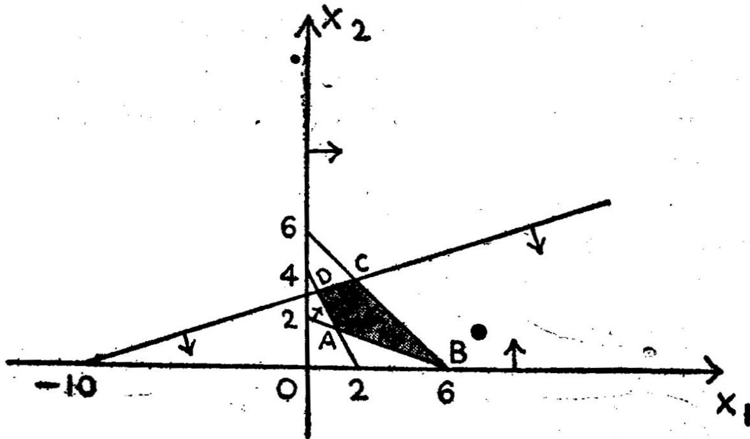
(அ) $X_1 + X_2 = 6\ \ X_1 = 0;\ X_2 = 6,\ X_2 = 0$ எனில், $X_1 = 6$ ஆகும். எனவே, $(0, 6), (6, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் இக் கோடு அமைகிறது.

(ஆ) $-X_1 + 3X_2 = 10; X_1 = 0$ எனில், $X_2 = 3{\cdot}3\ X_2 = 0$ $X_1 = -10$ ஆகும். எனவே, $(-10, 0), (0, 3{\cdot}33)$ இரு புள்ளி களில் இக்கோடு அமைகிறது.

(இ) $X_1 + 3X_2 = 6\ X_1 = 0$ எனில், $X_2 = 2,\ \ X_2 = 0$ எனில், $X_1 = 6$ ஆகும். $\therefore$ $(0,\ \ ), (6, 0)$ இரு புள்ளிகளில் இக் கோடு அமைகிறது. இங்கு முக்கியமாக கவனிக்கவேண் டியது இச் சமனிலி $\geqslant$ ஆகும். எனவே, இந்த கோட்டுக்கு வெளியில்தான் தீர்வு அமையும் என்பது தெளிவாகிறது.

(ஈ) $2X_1 + X_2 = 4$; $X_1 = 0$ எனில், $X_2 = 4$, $X_2 = 0$ எனில், $X_1 = 2$ ஆகும்.

(0, 4), (2, 0) புள்ளிகளில் இக் கோடு அமைகிறது.



வரைபடத் தீர்வு

B புள்ளியின் மதிப்பைத் தவிர மற்ற A, C, D புள்ளிகளின் மதிப்பைச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

$$A: \quad X_1 + 3X_2 = 6$$
$$2X_1 + X_2 = 4$$
$$\underline{2X_1 + 6X_2 = 12}$$
$$5X_2 = 8$$
$$X_2 = 1{\cdot}6; \; X_1 = 6 - 4{\cdot}8 = 1{\cdot}2$$

$$C: \quad -X_1 + 3X_2 = 10$$
$$\underline{X_1 + X_2 = 6}$$
$$4X_2 = 16$$
$$X_2 = 4; \; X_1 = 2$$

$$\therefore \quad C = (2,4)$$

$$D: \quad 2X_1 + X_2 = 4$$
$$-X_1 + 3X_2 = 10$$
$$\underline{-2X_1 + 6X_2 = 20}$$
$$7X_2 = 24$$
$$X_2 = 3{\cdot}4 \quad \therefore \quad X_1 = 0{\cdot}3$$

எனவே, $D = (0.3, 3.4)$

$A = (1.2, 1.6)$; $B = (6, 0)$; $C = (2,4)$; $D = (0.3, 3.4)$

இரு புள்ளிகளின் $Z = X_1 + 2X_2$-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$$Z_A = 1 \cdot 2 + 2\,(1 \cdot 6) = 4 \cdot 4$$

$$Z_B = 6 + 2\,(0) = 6 \cdot 0$$

$$Z_C = 2 + 2\,(4) = 10 \cdot 0$$

$$Z_D = 0 \cdot 3 + 2\,(3 \cdot 4) = 7 \cdot 1$$

Z மீப்பெரும மதிப்பாதலால் $C = (2,4)$ அதாவது $X_1 = 2$ அலகு; $X_2 = 4$ அலகு என்பதே பெரிதும் உகந்த தீர்வு. இதுவே வரைபடம் மூலம் கிடைத்த தீர்வு ஆகிறது.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறை (Simplex method)

நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்ட பிரச்சினைக்குத் தீர்வுகாண ஓர் எளிதான வழிமுறையைச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை எனக் கூறுகின்றோம். வரைபடங்களின்மூலம் தீர்வு காணுவது சிரமமாகும் போது இந்த சிம்ப்ளக்ஸ் முறை மிகவும் பயன்படுகிறது.

ஒரு பொதுவான நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டமானது

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\, x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \quad i = 1, 2, \dots m$$

என்று r மாறிகளில் m சமனிலிகள் இருப்பின் எல்லா $X_j \geq 0$, என்றால், ஒரு கொள்குறிச் சார்பலன் $Z = \sum_{j=1}^{r} c_j\, x_j$-ன் மீப்பெரும, மீச்சிறு மதிப்பைக் காணவல்ல ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வு "X" ஐக் கண்டுபிடிக்க இந்தச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை பயன்படுகிறது.

இங்குச் சில புது விதமான மாறிகளை வரையறுக்கின்றோம். எல்லாச் சமனிலிகளையும் சமன்பாடுகளாக்கினால் தீர்வு காண்பது சுலபம். இங்கு "$\leq$" சமனிலிகளுக்கு ஒரு மாறியைக் கூட்டி "$=$" சமன்பாடாக்கினால் அந்த மாறியைத் தளர்வான மாறி (slack variable) என்கிறோம். உதாரணமாக, $\sum_{j=1}^{r} a_{hj}\, x_j \leq b_h$ என்ற சமனிலிகளுக்கு $x_{r+h} \geq 0$ என்றவாறான ஒரு புது

மாறியை $x_{r+h} = b_h - \sum_{j=1}^{r} a_{hj}\, x_j > 0$ என்று அறிமுகப்படுத்தினுல் இந்த மாறி x_{r+h} ஐ ஒரு தளர்வான மாறி அல்லது தளர் மாறி (தோய்வான மாறி) (slack variable) என்று வழங்குகின்ரேம். ஏனென்ருல், கிடைக்கக்கூடிய வாய்ப்பு வளம் h-ன் மீப்பெரு மதிப்பாக b_h ஐக் கருதுகின்ரேம். அதேபோல எந்த ஒரு x_j தொகுதிக்கும், $\Sigma a_{hj}\, x_j$ மதிப்புதான் உண்மையாகவே உபயோகப்படுத்தப்பட்ட மதிப்பளவு என்றும் கருதுகிரேம். ஆகவே, கிடைக்கும் அளவுக்கும் உண்மையாக உபயோகப் படுத்தப்பட்ட அளவுக்கும் இடையே உள்ள வேற்றுமையளவை (Difference) தளர்மாறினுல் குறிக்கின்ரேம்.

$$\text{இதேபோல,}\quad \sum_{j=1}^{r} a_{kj}\, x_j > b_k$$

என்ற வேறு வித சமனிலிகளை ஆராய்ந்து, x_{r+k} என்ற புது மாறியை,

$$x_{r+k} = \sum_{j=1}^{k} a_{kj}\, x_j - b_k$$

எனக் குறித்தால் அது ஓர் உபரி மாறி (Surplus variable) ஆகும். ஏனெனில், உற்பத்தி செய்யப்படவேண்டிய அளவுக்கு மேற்பட்ட உண்மையான உற்பத்தி அளவுகளின் உபரிதான் இவ்வாறு வழங்கப்படுகிறது.

எனவே, மூலதனமான (Original) கட்டுப்பாடுகள் நேர் கோட்டுக்குரிய ஒழுங்கைச் சமன்பாடுகளில் (Simultaneous Linear Equations) ஒரு தொகுப்பாகக் கீழ்க்கண்ட வடிவத்தில் மாற்றப்பட்டுள்ளன :

$$\sum_{j=1}^{r} a_{hj}\, x_j + X_{r+h} = b_h;\quad h=1, 2, \ldots k$$

$$\sum_{j=1}^{r} a_{kj}\, X_j + X_{r+h} = b_k;\quad k=u+1, \ldots v$$

$$\Sigma a_{pj}\, X_j = b_p;\quad p = v + 1, \ldots m$$

இப்போது n மாறிகளில் m சார்பலன்கள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன. இந்தக் கட்டுப்பாட்டுச் சார்பலன்களின் தொகுதியை ர் அணி வடிவத்தில் (Matrix form) எழுதலாம்.

$$AX = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots\ldots + x_n a_n = b$$

இங்கு a_j என்பன A நிரல்களாகும். எனவே, இந்தப் பொது நேர்கோட்டு, அமைப்புத் திட்ட பிரச்சினையைத் திருத்திய சுருக்க–விதிமுறையில் (reformulated form) கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம் :

$$AX = b = a_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots + x_n a_n$$

என்ற m ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தொகுதியைத் திருப்தி படுத்திக் கொள்குறிச் சார்பலன் $Z = CX = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_n x_n$ ஐ மீப்பெரும, மீச்சிறுமமாக்கவல்ல, ஓர் எதிர்மறையற்ற திசையிலி (vector) $X = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \geqslant 0$.ஐக் காண்க.

இங்கு, b திசையிலி ஒரு தேவை திசையிலி (Requirement vector) a_j என்பது ஒரு செயல் (நடவடிக்கை) திசையிலி (activity vector) என வழங்கப்படுகின்றன. இந்தச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் ஆரம்பிக்கப்பட்ட ஓர் அடிப்படை பயனெளிவான தீர்விலிருந்து முறைப்படுத்தப்பட்ட வழிகளில் (systematic steps) மற்ற அடிப்படை பயனெளிவான தீர்வு கண்டு அறிந்து கடைசியில் ஒரு வரையரைக்குட்பட்ட வழி எண்ணிக்கையில் பெரிதும் உகந்ததொரு தீர்வைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இங்கு ஒவ்வொரு வழிமுறையிலும் (each step) முந்தியதைவிட சிறந்ததாகக் கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்பு உள்ளது.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் தீர்வு காணப் படிப்படியான விளக்க முறைகள் :

(1) நாம் கொடுக்கப்பட்ட m நேர்க்கோட்டுச் சமனிலிகள் (சமன்பாடுகள்),

$$(\Sigma a_{ij}\ x_j)\ \{\leqslant, =\ \geqslant\}\ b_i,\ i=1,\ 2,\ldots m \qquad \ldots\ (1)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கும் எல்லா $X_j \geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ldots r)$ என்ற எதிர்மறையற்ற நிபந்தனைக்கும் ஏற்றவாறு $Z = \sum_{j=1}^{r} C_j\ X_j$ என்ற ஒரு நேர்கோட்டுக் கொள்குறிச் சார்பலனை மீப்பெருமமாக்க விரும்புகிறோம்.

முதலில் எல்லா b_i-களும் எதிர்மறையற்றனவையா எனத் தீர்மானிக்கின்றோம். தேவைப்பட்டால் ஒரு சமனிலியை -1 ஆல் பெருக்கி b_i ஐ எதிர்மறையற்றதாக்கிக் கொள்வோம். அடுத்தபடியாக தளர் மாறிகளையோ, உபரி மாறிகளையோ கூட்டிச் சமனிலியைச் சமன்பாடாக மாற்றிவிடுவோம். பிறகு,

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} X_j < b_i \quad \text{என்பது} \qquad \ldots (2)$$

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} X_j + X_{r+i} = b_i, \; x_{r+i} > 0 \qquad \ldots (3)$$

என்று மாறிவிடுகிறது. இதேபோல,

$$\Sigma a_{ij} X_j > b_i\text{-ம்} \qquad \ldots (4)$$

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} X_j - X_{r+i} = b_i, \; x_{r+i} > 0 \qquad \ldots (5)$$

என மாறிவிடுகின்றது.

ஒவ்வொரு தளர்மாறி, உபரி மாறிக்கும் விலை மதிப்பு பூஜ்யம் என்று கொள்ளப்படுகிறது. பிரச்சினையை மாற்றி வேறுவிதமாக எழுதலாம்.

"$AX = b, \; X > 0, \; A = (a_1, a_2 \ldots\ldots a_n)$ என்றால்,

$Z = CX$ ஐ மீப்பெருமமாக்கு" i ஆவது சமனிலிக்கு ஒரு தளர் மாறியைக் கூட்டினால், x_{r+i}-க்கு ஏற்ற A அணியின் நிரல் e_i ஆகிறது.

$$\text{இங்கு, } c_i = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \; i \text{ ஆவது எண்.}$$

இதேபோல i சமனிலிக்கு ஓர் உபரி மாறியைக் கூட்டினால் அந்த X_{r+i}-க்கு ஏற்ற A அணியில் நிரல் $-e_i$ ஆக இருக்கும். $-e_i = (00 \ldots\ldots 0, -1, 0 \ldots\ldots 0)$.

2. A அணியை (ஆராய்ந்து) சோதித்து அது ஒரு $m \times m$ முற்றொருமை அணியைக் (Identity matrix) கொண்டுள்ளதா என்று அறிய வேண்டும். ஒரு முற்றொருமை அணி I_m என்பது கீழ்க்கண்டவாறு m நிரைகள் m நிரல்கள் கொண்ட அணியாக இருக்கும்.

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

$$= [e_1, e_2, \dots c_m] \text{ ஆகும்.}$$

அந்த ஒரு முற்றொருமை அணி I_m ஐ உண்டாக்க நிரல்களை இடைப்பரிமாற்றம் செய்ய வேண்டிய (Interchange) அவசியம் ஏற்பட்டால் அவ்வாறும் செய்யலாம்.

ஒரு முற்றொருமை அணி I_m கிடைக்காவிட்டால் தேவையான அளவுக்கு q_i செயற்கை திசையிலிகளையும் (artificial vector), செயற்கை மாறிகள் x_{ai}ஐயும் முற்றொருமை அணி கிடைக்கும் படியாக நாம் கூட்ட வேண்டும். இத்தகைய தொரு செயற்கை மாறி ஒவ்வொன்றின் விலை மதிப்பும் மிகப் பெரிய எதிர் மறை மதிப்பு $(-M)$ ஆக இருக்கட்டும். M ஐ நாம் தீர்மானிப்போம். (ஒவ்வொரு செயற்கை மாறிக்கும் ஒரே மதிப்பாக உபயோகிக்கலாம்). M-ன் மதிப்பு மிகப்பெரியதாக இருப்பதால் ஓர் ஏற்புடைய (நேரிய) மாறி (legitimate variable) க்கான விலைமதிப்பு. Mஉடன் ஒத்துப்பார்க்கையில், புறக்கணிக்கத் தக்கவாறு மிகச் சிறியதாக இருக்க வேண்டும். இயந்திரக் கணிப்பில் எந்த ஒரு நேரிய மாறியின் விலைமதிப்பு மிக அதிகமாக உள்ளதோ அந்த மதிப்பின் 1000 மடங்கு பெரியதாக உள்ளதாக Mஐ எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையை ஆரம்பிக்க இந்த முற்றொருமை அணியை ஓர் அடிப்படை அணியாக (basis matrix) எப்போதும்

உபயோகிப்போம். ஏனெனில், பொதுவாக வேறு எந்த ஒரு அடிப்படைப் பயனெளியமையான தீர்வையும் நாம் கண்டுபிடிப்பது மிகச் சிரமமாகிறது. ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வு $X_B = b > 0$ ஆக இருக்கிறது. X_B என்பது B என்ற ஆரம்ப அடிப்படை அணிக்கு ஏற்ற X திசையிலியின் மதிப்பு.

விளக்கம்

(அ) இங்கு a_i ன் மதிப்புகளை y_{ij} என்று குறித்துள்ளோம். ஒரு நிலைப் படுத்தப்பட்ட முறையில் எழுதுவதற்காக a_{ij} யானது y_{ij} ஆக மாற்றப்பட்டு எழுதப்பட்டுள்ளதை அறியவும்.

(ஆ) மேலும் C_j மதிப்புகளை C_B என்ற முதல் நிரலில் காணலாம். அடித்தளத்தில் C_j-ன் மதிப்புகளையே C_B என்று வழங்குகின்றோம்.

(இ) செயற்கை திசையிலிகளை $q_1, q_2, \ldots q_k$ என்று வரையறுத்துள்ளோம்.

3. அடுத்த பக்கத்தில் உள்ள வடிவத்தில் தொடங்குகிற ஒரு டிபலை அமைப்போம். $X_B = b$ என்பதாலும் செயல் நடவடிக்கைத் திசையிலி (activity vector) $y_i = a_j$ என்பதாலும் இந்தப் பட்டியல் சுலபமாகத் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு கடைசி நிரை Z, $Z_j - C_j$ மதிப்புகளை $Z = C_B\, b$; $Z_j - C_j = C_B\, a_j - C_j \rightarrow$ (7) சமன்பாடுகளிலிருந்து கணித்துவிடுகிறோம். இங்குச் சார்ன்ஸ் 'Charns' என்பவர் அடித்தளத்திலிருந்து செயற்கை திசையிலியை வெளியேற்றுவதற்காகச் செயற்கை திசையிலியின் விலை மதிப்பை ஒரு பெரிய எதர்மறையான மதிப்பினால் குறிக்கிறார். எனவே, இதை உபயோகிக்கும் முறையைச் சார்ன்ஸின்—M முறை என்கிறோம்.

4 பெரிதும் உகந்த தத்துவத்தின் தேர்வு முறை: உத்தம சோதனை (Optimality criterion).

எல்லா $Z_j - C_j > 0$ ஆக இருந்தால், அடிப்படை பயனெளிவு தீர்வு பெரிதும் உகந்ததாகிறது. ஒன்றோ அல்லது நிறைய $Z_j - C_j$ மதிப்புகளோ (< 0) எதிர் மறையாக இருந்தால் சிம்ப்ளக்ஸ் சோதனை I ஐ உபயோகித்து எந்த திசையிலி அடிப்படை தளத்திற்குள் (அடித்தளப்) (basis) இடம் பெற வேண்டும் (to enter) என்று தீர்மானிக்கிறோம்.

C_B	அடிப்படை திசையிலி Vectors in basis	b	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n	$\pm M$	$\pm M$	...	$\pm M$
			a_1	a_2	...	a_j		a_n	q_1	q_2	...	q_s
C_{B1}	b_1	$x_{B1}=y_{10}$	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1n}	$y_{1,n+1}$	$y_{1,n+2}$	...	$y_{1,n+s}$
C_{B2}	b_2	$x_{B2}=y_{20}$	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2n}	$y_{2,n+1}$	$y_{2,n+2}$	...	$y_{2,n+s}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Bm}	b_m	$x_{Bm}=y_{m0}$	y_{m1}	y_{m2}		y_{mj}	...	y_{mn}	$y_{m,n+1}$	$y_{m,n+2}$		$y_{m,n+s}$
		$Z= y_{m+1,0}$	$Z_1-C_1= y_{m+1,1}$	$Z_2-C_2= y_{m+1,2}$	...	$Z_j-C_j= y_{m+1,j}$		$Z_n-C_n= y_{m+1,n}$	...	...	...	...

சிம்ப்ளக்ஸ் சோதனை I : $Z_j - C_j < 0$ என்றால் அத்தகைய $(Z_j - C_j)$ மதிப்பில் மீச்சிறு மதிப்பை,

$$Z_K - C_K = \text{மீச்சிறு } (Z_j - C_j) \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

என்போம். எனவே a_K திசையிலி அடி(ப்படை)த் தளத்தில் இடம் பெறுகிறது (enters). மீச்சிறு மதிப்பு ஒத்தனவையாக (Tie) இருப்பின், ஒத்தனவான திசையிலிகளில் (Tied Vectors) ஏதேனும் ஒன்றை அடித்தளத்தில் இடம் பெறத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். பொதுவாக ஒத்தனவான திசையிலிகளில், மிகச் சிறிய j மதிப்புடைய திசையிலியைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். a_K திசையிலி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட உடனேயே இரண்டு சாத்தியகூறுகள் (possibilities) நமக்குப் புரிகின்றன. (i) $y_{ik} < 0$ எல்லா i-களுக்கும் என்றால் அடித்தளத்தின் திசையிலிகளையும் a_k திசையிலியையும் சேர்ந்த ஒரு வரையறையற்ற தீர்வு (Unbounded solution) கிடைக்கிறது என அறிகிறோம். பொதுவாக ஒரு வரையறையற்ற தீர்வு அடிப்படையான தீர்வாக இருக்க முடியாது. ஆனால் பூஜ்யத்திலிருந்து மாறுபட்ட $(m + 1)$க்கு மேற்படாத மாறிகள் இருக்கக்கூடிய வரையறையற்ற தீர்வுகள் அங்குக்கிடைக்கின்றன.

(ii) $y_{ik} > 0$ ஒரு i மதிப்புக்கே ஆயினும் என்றால் $\hat{z} > z$ என்றவாறான ஓர் அடிப்படைப் பயனெளிமையான புதிய தீர்வைக் காண முடியும்.

5. ஒரு மதிப்பிற்காயினும் $y_{ik} > 0$ என்றால் சிம்ப்ளக்ஸ் சோதனை II ஐ உபயோகித்து எந்தத் திசையிலி அடித்தளத்தை விட்டு விலகுகிறது என்று தீர்மானிக்கவும். (B-ன் நிரலை a_k திசையிலியால் பதிலமர்த்திடுக).

சிம்ப்ளக்ஸ் சோதனை II (Simplex Criterion II)

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \underset{i}{\text{மீச்சிறு}} \left\{ \frac{x^{Bi}}{y^{ik}}, y_{ik} > 0 \right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

என்ற மதிப்பைக் கணிக்கவும். அடித்தளத்தின் r நிரலிலுள்ள a_r திசையிலியை நீக்கிவிட்டு a_k திசையிலியை பதிலமர்த்திடவும். ஒத்தன்மை (Tie) ஏற்பட்டால், ஒத்தனவான நிரல்களில் ஏதாவது ஒன்றை நீக்கிவிட்டு a_k ஐப் பதிலமர்த்திடவும். மிகப்பெரிய y_r மதிப்புடைய நிரலைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்வது ஒரு சுலபமான முறையாகும். இப்படிச் செய்வது, ஒத்தனமையைச் சரிக்கட்ட முடியாவிடில் (if this does not break the tie) சிறிய i மதிப்புடைய நிரலின் திசையிலியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

6. சுற்றிச் சுற்றி வரும் முறையையோ (ring around the rosy method) அல்லது திசையிலி உருமாற்ற வரைபாடு (vector

transformation formulae) முறையையோ பயன்படுத்திப் புதிய பட்டியல் தயாரிக்கலாம்.

(i) சுற்றிச்சுற்றிவரும் முறையின் விளக்கம்

எந்தத் திசையிலி அடித்தளத்திலிருந்து விலகுகின்றதோ அதற்கேற்ப, y_{ij}-க்களின் மதிப்புகளைக் கணிப்பதற்கு சுற்றிச் சுற்றி வரும் முறையைக் காணக் கீழ்க்கண்ட வாய்பாடுகளை உபயோகிக்கலாம். வாய்பாடுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன, (விளக்கம் பின்னால் உதாரணத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.)

வாய்பாடுகள்: (சூத்திரங்கள்)

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \text{ எல்லா } j \text{ மதிப்புக்களுக்கும்}$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots m+1, \; i \neq r$$

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \text{ எல்லா } j \text{ மதிப்புக்களுக்கும்}$$

இதைப்போலவே x_B , Z, $Z_j - C_j$ மதிப்புக்களைக் கணிக்க

$$x_B = y_0$$

$$Z = y_{m+1, 0}$$

$$Z_j - C_j = y_{m+1, j} \qquad j = 1, 2, \ldots m$$

இவற்றைப் பயன்படுத்தவும். இம் மதிப்புக்களை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம் என்பதைப் பின்னால்வரும் மாதிரி 2 (பக்கம் 43) நன்கு விளக்குகிறது.

(ii) திசையிலி உருமாற்ற வாய்பாடு

வாய்பாடு:

$\hat{Y}_j = Y_j + y_{rj}\,\Phi$ என்ற வாய்ப்பாட்டினை உபயோகித்து ஒவ்வொரு திசையிலியின் மதிப்பையும் கணிக்கலாம்.

இங்கு, $Y_j = [Y_j + y_{m+1, j}] = [y_{1j}, y_{2j}, \ldots y^{+}{}_j, y_{m+1, j}]$

$$\Phi = \left[-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}, \ldots\ldots, \frac{-y_{r-1, k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{rk}} - 1; \; -\frac{y_{r+1, k}}{y_{rk}}, \ldots\ldots\ldots \frac{-y_{r+1, k}}{y_{rk}} \right] \text{ ஆகும்.}$$

(விளக்கம் பின்னால்மாதிரி 3 பக்கம் 46-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

"C_B" நிரலின் rவது நிலையில் விலை மதிப்பானது C_jயால் பதிலமர்த்தப்படுகிறது. அடித்தளத்திசையிலி(Vector in basis) யில் rஆவது நிலையில் உள்ள திசையிலியை a_K யினுல் மாற்றீடு செய்யவும்

இப்போது 4ஆவது வழிமுறைக்குத்திரும்பச் சென்று அதற்கு மேல் தீர்வைத் தொடர்ந்து காணவும். சிம்ப்ளக்ஸ் முறையானது ஒரு நிலைத்த திரும்பத் திரும்பச் செய்யும் செயற்பாங்காகும். நிலைத்த வழிமுறை எண்ணிக்கையில் இஃது ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வுக்கு (அல்லது வரையறையற்ற தீர்வுக்கு) வழி காணுகின்றது.

ஒரு சீர் குலைவு (degeneracy) ஏற்பட்டால் மீண்டும் மீண்டும் சுழற்சி ஏற்பட்டுப் பெரிதும் உகந்ததொரு தீர்வே அடைய முடியாதபடியான ஒரு மிகவும் அபூர்வமான சாத்தியக்கூறும் நிகழலாம். ஆனல் எந்த ஒரு செயல்முறை அனுபவத்திலும் இப்படி எப்போதும் நடைபெருது.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் ஒவ்வொரு திரும்பத் திரும்பச் செய்யும் வழி வகையிலும் கிடைத்த தீர்வு பெரிதும் உகந்ததா என அறியலாம். அப்படி இல்லாவிடில், ஒரு புதிய அடிப்படைத் தீர்வு வடிவாக்க முடியுமா அல்லது ஒரு வரையறையற்ற தீர்வு கிடைக்கிறதா எனக் கண்டுபிடிக்க முடியும். பொதுவாக ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வை அடையத் தேவைப்படும். திரும்பத் திரும்பச் செய்யும் முறைகளின் எண்ணிக்கை (number of iterations) கட்டுப்பாடுகளின் எண்ணிக்கை m ஆகில் m-க்கும் $2m$-க்கும் இடையில் இருக்கும்.

சிம்ப்ளக்ஸ் வழிமுறை உதாரணம் :

$$X_1, X_2 > 0$$

$$3X_1 + 5X_2 < 15$$

$5X_1 + 2X_2 < 10$ எனும் கட்டுப்பாடுகளுக்கேற்ப

$Z = 5X_1 + 3X_2$ஐ மீப்பெருமமாக்கும் ஒரு தீர்வினை சிம்ப்ளக்ஸ் வழிமுறை மூலம் கணிக்கவும். தளர்மாறிகளைக் கூட்டினல்,

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$$

$$a_1 = (3,5)\ ;\ a_2 = [5,2]\ ;\ a_3 = [1,0]\ ;\ a_4 = [0,1]$$

$$b = [15,10]$$

இங்கு $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற மூற்றொருமையணி உள்ளது.
எனவே, a_3, a_4ஐ அடித்தளத்தில் கொண்ட ஒரு ஆரம்ப கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமையுடைய தீர்வு உடனே நமக்குக் கிடைக்கிறது. தளர் மாறிகள் பூஜ்ய மதிப்புடனிருப்பதால் இத்தகைய அடிப்படைத் தீர்விற்கு $C_B = (0,0)$ ஆகிறது. மேலும் $X_B = [15, 10]$, $Z = 0$, $Z_j - C_j = -C_j$ இப்போது சிம்பளக்ஸ் பட்டியல் தயாரிப்போம். இரு $(Z_j - C_j)$ மதிப்புகள் எதிர் மறையானவை. எனவே, ஆரம்பத் தீர்வு பெரிதும் உகந்ததல்ல.

C_B	அடித்தளத்தில் திசையிலி	C_j	5	3	0	0
		b	a_1	a_2	a_3	a_4
0	a_3	15	3	5	1	0
0	a_4	10	5	2	0	1
	$Z_j - C_j$	0	−5	−3	0	0

$$\underset{i}{\text{மீச்சிறு}} (Z_j - C_j) = Z_1 - C_1 = -5$$

∴ அடுத்தத் திரும்பச்செயலாற்று முறையில்(next iteration) a_1 திசையிலி அடித் தளத்தில் இடம் பெறுகிறது. y_{11}, y_{12}, இரண்டும் >0 ஆகும்.

$$\text{எனவே, மீச்சிறு} \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{i1}} \right\} = \text{மீச்சிறு} \left\{ \frac{x_{B1}}{y_{11}}, \frac{x_{B2}}{y_{21}} \right\}$$
$$= \text{மீச்சிறு} [5, 2] = 2$$

எனவே அடித்தளத்தின் 2ஆவது நிரல் அதாவது a_4ஐ மாற்றி a_1 ஐப் பதிலமர்த்திட வேண்டும். பழைய r ஆவது நிரையின் (R_2-ன்) ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $y_{rk} = y_{21}$ ஆல் வகுத்தால் புதிய r ஆவது நிரை ($R^1{}_2$) கிடைக்கிறது.

$$\hat{y}_{20} = \hat{x}_{B2} = \frac{y_{20}}{y_{21}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y_{21} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y_{32} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$y_{33} = 0 \text{ மேலும், } y_{34} = \frac{1}{5} = 0 \cdot 2$$

இதேபோல் முதல் நிரைக்கு :

$$\frac{y_{1k}}{y_{rk}} = \frac{y_{11}}{y_{31}} = \frac{3}{5} = 0 \cdot 6$$

$$\therefore \quad \hat{y}_{1j} = y_{1j} - 0 \cdot 6 \; y_{3j}$$

$$\text{எனவே, } \hat{y}_{10} = 1 \cdot 5 - 0 \cdot 6 \; (10) = 9$$

$$\hat{y}_{11} = 3 - 0 \cdot 6 \; (5) = 0$$

$$\hat{y}_{12} = 5 - 0 \cdot 6 (2) = 3 \cdot 8$$

$$\hat{y}_{13} = 1 - 0 \cdot 6 (0) = 1 \cdot 0$$

$$\hat{y}_{14} = 0 - 0 \cdot 6 \; (1) = - 0 \cdot 6$$

நிரை 3-க்கான $(Z_j - C_j)$ மதிப்புகள் :

$$\frac{y_{3k}}{y_{rk}} = \frac{y_{31}}{y_{31}} = - 1$$

$$\text{எனவே, } \hat{y}_{3j} = y_{3j} + y_{3j}$$

$$\hat{y}_{30} = 0 + 10 = 10$$

$$\hat{y}_{31} = 5 - 5 = 0$$

$$\hat{y}_{32} = 2 - 3 = -0$$

$$\hat{y}_{33} = 0 + 0 = 0$$

$$\hat{y}_{34} = 1 + 0 = 1$$

எனவே பட்டியல் 2-ன் வடிவம் பின்வருமாறு

C_B	அடித்தளத்தில் திசையிலி	C_j	5	3	0	0
		b	a_1	a_2	a_3	a_4
0	a_3	9	0	3·8	1	−0·6
5	a_1	2	1	0·4	0	0·2
	Z_j-C_j	10	0	−1	0	3

இங்கு $Z_2 - C_2 < 0$ என்பதால் பெரிதும் உகந்த தீர்வு இன்னும் கிடைக்கவில்லை.

∴ a_2ஐப் புகுத்துவோம். அடித்தளத்தில் மீச்சிறு

$$\left[\frac{x_{Bi}}{y_{i2}}\right] = \text{மீச்சிறு} \left[\frac{9}{3\cdot 8}, \frac{2}{0\cdot 4}\right]$$

எனவே, அடித்தளத்தின் 1 ஆவது நிரல் அதாவது a_3 நீக்கப்பட்டு a_2 வால் பதிலமர்த்தப்படுகிறது.

இப்போது rஆவது நிரை R_1 ஆகும்.

R-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் y_{rk} ஆல் வகுக்கவும்.

$$y_{rk} = y_{12} = 3.8$$

$$\therefore \quad \hat{y}_{10} = \frac{9}{3\cdot 8} = 2\cdot 368$$

$$\hat{y}_{11} = \frac{0}{3\cdot 8} = 0 \quad \hat{y}_{12} = \frac{3\cdot 8}{3\cdot 8} = 1$$

$$\hat{y}_{13} = \frac{1}{3\cdot 8} = 0\cdot 2632$$

$$\hat{y}_{14} = -\frac{0\cdot 6}{3\cdot 8} = -0\cdot 158$$ இப்போது R_2'ஐ எழுத உறுப்புகளின் மதிப்பைக் காண்போம். $r=1, k=2$

$$\frac{y_{2k}}{y_{rk}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \frac{0\cdot 4}{3\cdot 8} = 0\cdot 1053$$

$$\hat{y}_{2j} = y_{2j} - 0\cdot 1053\,(y_{1j})$$

$\hat{y}_{20} = 2 - 0{\cdot}1053\ (9) = 1{\cdot}053$

$\hat{y}_{21} = 1 - 0{\cdot}1053\ (0) = 1{\cdot}0$

$\hat{y}_{22} = 0{\cdot}4 - 0{\cdot}1053\ (3{\cdot}8) = 0{\cdot}4 - 0{\cdot}4 = 0.$

$\hat{y}_{23} = 0 - 0{\cdot}1053\ (1) = -0{\cdot}1053$

$\hat{y}_{24} = 0{\cdot}2 - 0{\cdot}2 - 0{\cdot}1053\ (-0{\cdot}6) = 0{\cdot}2632$

இதேபோல $R^1{}_3$ மதிப்புகள் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன.

$k = 2;\quad r = 1,$

$$\frac{y_{3k}}{y_{rk}} = \frac{y_{32}}{y_{12}} = -\frac{1}{3{\cdot}8} = -0{\cdot}2632$$

$\therefore\ \hat{y}_{3j} = y_{3j} + 0{\cdot}2632\, y_{1j}$

$\hat{y}_{30} = 10 + 0{\cdot}2632\ (9) = 12{\cdot}37$

$\hat{y}_{31} = 0 + (10{\cdot}2632)\ (0) = 0$

$\hat{y}_{32} = -1 + (0{\cdot}2632)\ (3{\cdot}8) = 0$

$\hat{y}_{34} = 1 + 0\ 2632\ (-0{\cdot}6) = 0{\cdot}8421$

$\hat{y}_{33} = 0 + 0{\cdot}2632\ (1) = 0{\cdot}2632$ இப்போது பட்டியல் III ஐ எழுதுவோம்.

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் III

C_B	அடித்தளத் திசையிலி	C_j	5	3	0	0
		b	a_1	a_2	a_3	a_4
3	a_2	2·368	0	1	·2632	—·1579
5	a_1	1·053	1	0	— ·1053	·2632
	$Z_j - C_j$	12·37	0	0	·2632	·8421

இங்கு எல்லா $Z_j - C_j$ மதிப்புக்களும் >0 என்பதால் நாம் ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வை இங்கு காண்கின்றோம்.

இங்கு a_1, a_2 திசையிலிகள் அடித்தளத்தில் இருக்கக்கூடிய தீர்வு கிடைப்பதால், அத் தீர்வானது.

$$x_1 = 1{\cdot}053$$

$$x_2 = 2{\cdot}368$$

மீப் பெருமதிப்பு $Z = 12{\cdot}37$ ஆகும்.

மாதிரி 2

$$X_1, X_2 > 0$$

$$X_1 < 4$$

$$X_2 < 3$$

$X_1 + 2\,X_2 < 8$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கேற்ப $Z = 2\,X_1 + 5\,X_2$ மதிப்பைச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையினைப் பயன்படுத்தி மீப்பெருமமாக்குக.

தீர்வு

X_3, X_4, X_5 என்ற மூன்று (தளர்) தொய்வான மாறிகளை உபயோகித்துக் கட்டுப்பாடுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்:

எல்லா $X_j > 0$

$$X_1 + X_3 = 4$$

$$X_2 + X_4 = 3$$

$$X_1 + 2X_2 + X_5 = 8$$

$Z = 2X_1 + 5X_2 + 0.\,X_3 + 0.\,X_4 + 0.\,X_5$ என எழுதலாம்.

$$a_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad a_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad a_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad a_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad a_5 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

என்பதால் (a_3, a_4, a_5) யினால் ஒரு முற்றொருமையணி கிடைக்கிறது. எனவே, a_3, a_4, a_5ஐ அடித்தளத்தில் கொண்ட ஓர் ஆரம்பக்கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வு கிடைக்கிறது. a_3, a_4, a_5 என்பன [தளர்வான] தொய்வான

திசையிலிகள்? இவற்றின் விலை மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் பூஜ்யம் ஆகும். எனவே, சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் I ஐ எழுதுவோம்.

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் I

C_B	X_B	c_j	2	5	0	0	0
		b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	4	1	0	1	0	0
0	a_4	3	0	1	0	1	0
0	a_5	8	1	2	0	0	1
	$Z_j - C_j$	0	-2	-5	0	0	0

இங்கு $Z_2 - C_2$ மீச்சிறு $(Z_j - C_j)$ = மீச்சிறு $(-2, -5)$

$$= -5 = Z_2 - C_2$$

எனவே, C_2 திசையிலி அடுத்த திரும்பச் செயலாற்றும் முறையில் அடித்தளத்தில் இடம் பெறுகிறது.

$$\text{மீச்சிறு} \left\{ \frac{X_{Bi}}{y_{i2}} \right\} = \text{மீச்சிறு} \left\{ \frac{4}{3}, \frac{3}{1} \quad \frac{8}{2} \right\} = 3$$

இம் மதிப்பு 3 என்பது இரண்டாவது நிரைக்கு ஆனது. எனவே, a_4 திசையிலியை நீக்கி a_2 ஐ இடம் பெறச் செய்யவேண்டும்.

சுற்றிச் சுற்றிச் வரும் முறைமூலமாக புதுப்பட்டியல் தயார் செய்வோம். $\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}$, (எல்லா j மதிப்புகளுக்கும், $i = 1, 2, \ldots m + 1$ $i \neq r$)

$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$ எல்லா j-களுக்கும், இங்கு $r = 2$, $k = 2$.

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் II

C_B	X_B	C	2	5	0	0	0
		b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	4	1	0	1	0	0
5	a_2	3	0	1	0	1	0
0	a_5	2	1	0	0	-2	1
	Z_j-C_j	15	-2	0	0	5	0

மீச்சிறு $(Z_j-C_j) = Z_1 - C_1 = -2$ எனவே a_1 திசையிலி அடுத்த கட்டத்தின் வலை இடம் பெறுகின்றது.

இப்போது மீச்சிறு $\left[\frac{X_{Bj}}{y_{i_2}}\right]$ = மீச்சிறு $\left[\frac{4}{1}, \frac{3}{0}, \frac{2}{1}\right] = 2$

எனவே, a_5 வெளியேறி a_1 உள்ளே நுழைகிறது. முன்போலவே சுற்றிச் சுற்றிவரும் முறையின்மூலம் புதிய அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}$ எல்லா j மதிப்புகளுக்கும், $i = 1, 2, \ldots\ldots m+1 \quad i \neq r$

$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$ எல்லா j மதிப்புகளுக்கும்

இங்கு $r = 3$ (மூன்றுவது நிரை) $k = 1$ (முதல் நிரை)

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் III

C_B	X_B	C_j	2	5	0	0	0
		b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	2	0	0	1	2	-1
5	a_2	3	0	1	0	-1	0
2	a_5	2	1	0	0	2	1
	Z_j-C_j	19	0	0	0	1	2

இங்கு எல்லா $Z_j - C_j$ மதிப்புக்களுக்கும் > 0 என்பதால் ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வு கிடைக்கிறதென அறிகின்ருேம்.

இத் தீர்வானது $X_1 = 2;\ X_2 = 3$

இத் தீர்விஞல் $Z = 2Z_1 + 5X_2 = 4 + 15 = 19$ ஆகிறது.

திசையிலி உருமாற்றச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திச் சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் தயார் செய்து தீர்வு காணும் முறையைக் கீழ்க் கண்ட மாதிரியின்மூலம் விளக்குவோம்.

மாதிரி 3.

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 < 20$$
$$2x_1 + 16x_2 + x_3 + x_4 > 4$$
$$3x_1 - x_2 - 5x_3 + 10x_4 < -10$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, > 0$ என்ற நிபந்தனைக்களுக்கேற்ப

$Z = -2x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4$ மதிப்பை மீச்சிறுமமாக்குக.

தீர்வு

(i) மீச்சிறுமமாக்கும் பிரச்சினையை விலை மதிப்புகளின் சுட்டுக்குறியை (sign) மாற்றி ஒரு மீப்பெருமமாக்கும் பிரச்சினை யாக மாற்றிவிட்டால், முன் மாதிரிகளைப்போல தீர்வு காண்பது எளிதாகவும், அதாவது, மீச்சிறு $Z =$ மீப்பெரு $\bar{z}$ இங்கு $\bar{z} = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4$ ஆகிறது.

(ii) கட்டுப்பாடுகளை இப்போது கவனித்தால் ஆரம்பகட்ட அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வு கிடைப்பதற்குத் திசையிலி $b > 0$ இங்கு 3 ஆவது சமனிலியை -1 ஆல் பெருக்கிஞல் அச் சமனிலிக்கான b_3 மதிப்பு > 0 ஆகிறது.

$$-3x_1 + x_2 + 5x_3 - 10x > 0$$

இப்போது தொய்வர்ன மாறிகளையும் உபரி மாறிகளையும் கூட்டி இவ்வாறு கீழ்க்கண்ட விதத்தில் எழுதலாம்:

$$x_1 + 3x_3 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 20$$
$$2x_1 + 16x_2\ x_3 + x_4 - x_6 = 4$$
$$-3x_1 + x_2 + 5x_3 - 10x_4 - x_7 = 10$$

இங்கு ஒரு முற்றொருமையணிகிடைக்கவில்லையென எளிதாக அறிகிருேம்.

x_5 என்ற தொய்வான மாறிக்கு ஒரு e, நிரல் திசையிலியை எழுதலாம்.

இப்போது இரண்டு உபரிமாறிகள் x_{a1}, x_{a2} இவற்றைக் கூட்டினால், இவற்றுக்கான (விலை) மதிப்பு "$-M$" என்று முன்னர் கூறியதுபோல அனுமானிப்போம். இவற்றுக்கான இரு நிரல்கள் $q_1=e_2$, $q_3=e_3$ எனலாம்.

$$\therefore (a_5, q_1, q_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ ஒரு முற்றொருமையணி.}$$

எனவே ஆரம்ப அடித்தள அணி $B = I = (a_5, q_1, q_2)$

மேலும், $C^B=(0, -M; -M)$

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் I (பக்கம் 48-ல் காண்க)

இப்பட்டியலில் $\bar{z}_j - C_j = C_B a_j - C_j; \bar{z} = C_B . b.$

மீச்சிறு $(\bar{z}_j - C_j) =$ மீச்சிறு $(-6M-4, -17M-1)$

$= -17M - 1,$

எனவே a_2 திசையிலி அடித்தளத்தில் புகுகிறது.

எல்லா $y_{i2} > 0$ ஆக உள்ளன.

$$\text{மீச்சிறு} \left(\frac{X_{Bi}}{y_{i2}}\right) = \text{மீச்சிறு} \left(\frac{20}{8}, \frac{4}{15}, \frac{10}{\cdot}\right) = \frac{4}{16}$$

எனவே, q_1 திசையிலி நீக்கப்பட்டு அந்த இடத்தில் a_2 நுழைகிறது.

திசையிலி உருமாற்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல் :

முதலில் Φஐக் கணிக்கவும்.

இங்கு $k = 2$, $r = 2$ என்பதால் $y_{rk} = y_{22} = 16$

$$\Phi = \left[-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}, -\frac{y_{2k}}{y_{rk}}, - \dots, \right.$$

$$\left. -\frac{y_{r-1,k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{rk}} - 1, -\frac{y_{r+1,k}}{y_{rk}}, \dots, -\frac{y_{m+1,k}}{y_{rk}} \right]$$

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் I

	C_j		2	i	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
C_B	அடித்தளத் திசையிலி	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	e_7	q_1	q_2
0	a_5	20	1	3	2	5	1	0	0	0	0
← $-M$	q_1	4	2	16	1	1	0	-1	0	1	0
$-M$	q_2	10	-3	1	5	-10	0	0	-1	0	1
	$z_j - C_j$	$-14M$	$M-2$	$-17M-1$ ↑	$-6M-4$	$9M-5$	0	M	M	0	0

$$= \left[-\frac{3}{16}, \frac{1}{16} - 1, -\frac{1}{16}, \frac{17M+1}{16} \right]$$

$$= [-0{\cdot}1875, -0{\cdot}9375, -0{\cdot}0625, 1{\cdot}0625\, M + 0{\cdot}0625]$$

Φ-ன் உதவிகொண்டு இனிமேல் மற்ற புதிய நிரல்களைத் தீர்மானிப்பது சுலபம்.

$Y_0 = [y_0, {}_{m+1,0}]$ ஆகும்.

$Y_{03} = y_{r_0} = y_{20} = x_{B_2} = 4$

$= [y_{10}, y_{20}, \ldots\ldots y_{m_0}, y_{m+1,0}]$

மேலும், $\hat{Y}_0 = [Y_0 + y_{r_0}\, \Phi]$

$$= [20, 4, 10, -14M] +$$

$$4[\cdot 1875, -\cdot 9375, \ldots\ldots \cdot 0625, 1{\cdot}0625M + 0{\cdot}0625]$$

$$= [19{\cdot}250, 0{\cdot}250, 9{\cdot}750, -9{\cdot}750M + 0{\cdot}250]$$

இந்த மதிப்புதான் புதிய பட்டியலில் 'b' நிரலாகிறது, மற்ற நிரல்களின் மதிப்புகளை இதே முறையில் கணிக்கலாம். ஒவ்வொரு புது நிரலைக் கண்டுபிடிக்கையிலும் இதே Φ மதிப்பைத் தான் உபயோகிக்கிறோம் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் II (பக்கம் 50-ல் காண்க)

இப்போது a_3 திசையிலி உள்ளே புகும்; q_2 வெளியேறும். இந்த கட்டத்தில், நாம் கடைசியான செயற்கைத் திசையிலியை (last artificial vector) நீக்கி விடுகிறோம். எனவே, அடுத்த பட்டியல் III-ல் $\bar{z}$லும், $(\bar{z}_j - C_j)$-லும் இருந்து M சம்பந்தப்பட்ட உறுப்புகள் மறைந்து போகும்.

இந்தத் திரும்பச் செய்முறைக்கு $r = 3,\ k = 3$.

$y_{rk} = y_{33} = 4.938$

$$\text{எனவே } \Phi = \left[-\frac{1{\cdot}813}{4{\cdot}938}, -\frac{0{\cdot}0625}{4{\cdot}938}, \frac{1}{4{\cdot}938} - 1, \frac{4{\cdot}938M + 3{\cdot}938}{4{\cdot}938} \right]$$

$$= [-0{\cdot}3671, -0{\cdot}01266, -0{\cdot}7975, M + 0{\cdot}7974]$$

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் II

	C_j		2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
C_B	அடித் தளத் திசையிலி	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_1	q_2
0	a_5	19·25	0·625	0	1·813	4.812	1	1·875	0	−0·1875	0
1	a_2	0·25	0·125	1	0·0625	0·0625	0	−0·0625	0	0·0625	0
$-M$ ←	q_2	9·75	−3·125	0	**4·938**	−10·06	0	0·0625	−1	−0·0625	1
	$Z_j - C_j$	$-9·75M$ $+0·250$	$3·125M$ $-1·875$	0	$-4·938M$ $-3·938$ ↑	$10·03M$ $-4·938$	0	$-0·0625M$ -0.0625	M	$1·0625M$ $+0·0625$	0

M எப்படி மறைகிறது என்பதைக் காண $\hat{\frac{1}{4}}$ ஐக் கீழே காணும் வகையில் கணிக்கலாம்.

$y_{r4} = y_{34} = -10{\cdot}06$ என்பதால்,

$$\hat{\frac{1}{4}} = [4{\cdot}812,\ 0{\cdot}0625,\ -10{\cdot}06,\ -10{\cdot}06M - 4{\cdot}938]$$
$$-10{\cdot}06\ [0{\cdot}3671,\ -0{\cdot}01266,\ -0{\cdot}7975,\ M + 0{\cdot}7974]$$
$$= [8{\cdot}506,\ 0{\cdot}1899,\ -2{\cdot}038,\ -12{\cdot}96]$$ ஆகிறது.

இங்கு M இல்லாதவாறு உள்ளது.

இதே போல மற்ற $\hat{y}_i$–களைக் கண்டுபிடித்துப் பட்டியல் III ஐக் கீழே எழுதலாம்.

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் III (பக்கம் 52-ல் காண்க)

இங்கு a_2 வெளியேசெல்ல a_4 உள்ளே புகுவதைத் காணலாம் முன்போலவே தொடர்ந்து மதிப்புகளைக் கணித்துப் பட்டியல் களைத் தயார்செய்து ஒவ்வொரு பட்டியல் முடிவிலும் $\bar{z}_j - C_j$ மதிப்பு யாவும் > 0 என்று இருக்கிறதா என்று தேடிப்பார்க்கவும். எந்த ஒரு கட்டத்தில் எல்லா $\bar{z}_j - C_j$ மதிப்புகளும் > 0 இருக்கிறது என்றால், அங்குதான் பெரிதும் உகந்ததொரு தீர்வு கிடைக்கின்றது இந்தக் கணக்கிற்கு நாம் பட்டியல் VI வரை சென்றால்தான் பெரிதும் உகந்த தீர்வு காணப்படுகிறது. முன் சொன்ன படி எல்லா மதிப்புகளையும் கண்டுபிடித்துத் தீர்மானிக்கப்பட்ட பட்டியல்கள் IV, V, VI மூன்றும் அடுத்து வரும் பக்கங்களில் தரப்படுகின்றன. வாசகர்கள் முன் சொன்ன திசையிலி உருமாற்ற சூத்திரத்தை ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் பயன்படுத்திப் பட்டியல்கள் IV, V, VI சரியாக உள்ளனவா என்று கணித்துப் பார்க்கவேண்டும்.

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல்கள் IV, V, VI (பக்கங்கள் 53, 54, 55-ல் காண்க).

இந்தக் கணக்கிற்குச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை அவ்வளவு சிலாக்கியமானதாகத் தெரியவில்லை. ஏனெனில், 3 திசையிலிகளைக் கொண்ட ஒரு பெரிதும் உகந்த அடித்தளம் காண்பதற்கு நாம் 5 தடவைகள் திரும்பச் செய்யவேண்டியுள்ளது. ஆனால், இந்த முறை தவறென்று சொல்லமுடியாது. மூன்று (சமனிலிகளை) கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்ட பிரச்சினைக்கு 3–லிருந்து 6 திரும்பச் செய் முறைகளுக்குள் சிம்ப்ளக்ஸ் முறைத் தீர்வு காணலாம் என்று முன்பே நாம் குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் III

C_B	C_j	1	2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
	அடித்தள திசையிலி	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_1	q_2
0	a_5	15·67	1·772	0	0	8·506	1	·1646	—·3671	—·1646	—·3671
1	a_2	0·1266	0.1646	1	0	0·1899	0	—·0633	·0127	·0633	—·0127
4	a_3	1·975	—0·6329	0	1	—2·038	0	—·0127	—·2025	—·0127	·2025
	Z_j-C_j	8·025	—4·367	0	0	—12·96	0	—·0127	·7974	—	—

சிம்ப்ளிக்ஸ் பட்டியல் IV

C_B	C_j		2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
	திசையிலி	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	q_1	q_1
0	a_5	10·00	−5·60	−44·80	0	0	1	**3·000**	−2·000	−3·000	·200
5	a_4	0·667	0·867	5·267	0	1	0	3·333	0·667	·333	−·067
4	a_3	3·333	1·133	10·73	1	0	0	−·667	−·667	·667	·067
	$\bar{z}_j \quad C_j$	16·67	6·867	68·27	0	0	0	−4.333	.067	—	—

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் V

C_B	C_j		2	1	4	5	0	0	0	$-M$	$-M$
	திசையிலி	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_1	q_2
0	a_6	3·333	−1·867	−14·93	0	0	·333	1	−·067	−1	·067
5	a_4	1·778	−0·244	0·233	0	1	·111	0	·044	0	−·044
4	a_3	5·556	−·111	·778	1	0	·222	0	−·111	0	·111
	z_j-C_j	31·11	−1·222	3·556	0	0	1·444	0	−·222	—	—

சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் VI

C_B	C_j		2	1	5	4	0	0	0	$-M$	$-M$
	திசையிலி	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_1	q_2
0	a_6	16·910	0	−12·740	0	7·636	1·182	1	·273	−1	−·273
2	a_1	7·273	1	1·182	0	4·091	0·455	0	·182	0	−.182
4	a_3	6·364	0	0·909	1	0·455	0·273	0	−·091	0	0·091
	$Z_j - C_j$	40·000	0	5·000	0	5·000	2·000	0	0	—	—

இம்முறை தீர்வில் கடைசியாக மீப்பெரு $\bar{z} = 40{\cdot}000$ என அறிவதால், மீச்சிறு $z = -$ (மீப்பெரு $\bar{z}$)

$$= -40{\cdot}00$$

எனவே, z–ன் மீச்சிறு மதிப்பு $= -40{\cdot}00$ ஆகிறது பெரிதும் உகந்த ஒரு அடிப்படைத்தளம் a_1, a_3, a_6 தசையிலி களைக் கொண்டது.

இங்கு அடித்தள மாறிகளின் மதிப்புகள் முறையே

$$x_1 = 7{\cdot}273$$
$$x_3 = 6{\cdot}364$$
$$x_6 = 16{\cdot}910$$

இங்கு x_6 என்ற மாறி ஓர் உபரி மாறி என்பதைக் கவனிக்கவும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழேகாணும் நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டப்பிரச்சினை களுக்கு வரைபடங்கள் வரைந்து தீர்வு காண்க.

1. $x_1 + 2x_2 < 10$
   $x_1 + x_2 < 6$
   $x_1 - x_2 < 2$
   $x_1 - 2x_2 < 1$
   $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக் கேற்றவாறு
   $2x_1 + x_2$ ஐ மீப் பெருமமாக்கு.

2. $u - 3v \leqslant 3$
   $u - 2v < 4$
   $u \quad < 8$
   $2u + v < 20$
   $u + 3v < 30$
   $-u + v < 6$
   $u \geqslant 0, v \geqslant 0$ என்றவாறு
   $2u + v$ ஐ மீப் பெருமமாக்கு.

3. நிபந்தனைகள் : $2x_1 - x_2 \geq -2$

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

கொள் குறிச் சார்பலன்கள்

(i) x_2 ஐ மீப்பெருமமாக்கு.

(ii) $2x_1 + 2x_2$ ஐ மீப் பெருமமாக்கு.

(iii) $2x_1 - 2x_2$ ஐ மீச்சிறுமமாக்கு.

(iv) $-3x_1 - 2x_2$ ஐ மீச் சிறுமமாக்கு.

(v) $2x_1 + 4x_2$ ஐ மீப் பெருமமாக்கு.

4. நிபந்தனைகள் : $x_1 - 3x_2 \leqslant 6$

$2x_1 + 4x_2 \geqslant 8$

$x_1 - 3x_2 \geqslant -6$

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

கொள் குறிச் சார்பலன்கள் :

(i) $x_1 + 2x_2$ ஐ மீச்சிறுமமாக்கு.

(ii) $3x_1 + 3x_2$ ஐ மீப்பெருமமாக்கு.

(iii) $x_1 - 6x_2$ ஐ மீப்பெருமமாக்கு.

(iv) $x_1 - 3x_2$ ஐ மீப்பெருமமாக்கு.

கீழ்க்கண்ட நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டப் பிரச்சினைகளை, சிம்ப்ளக்ஸ் உத்தி முறை மூலமாகத் தீர்வு காண்க :

5. $x_1 - x_4 + 2x_6 = 5$

$x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3$

$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5$

எல்லா $x_j \geq 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளைச் சார்ந்து,

$x_1 + x_2 + x_3$ ஐ மீப்பெருமமாக்கு.

6. $2x \qquad - - + x_5 \geq 0$

$-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geqslant 0$

$x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

எல்லா $x_j > 0$ என்றவாறு

$x_4 - x_5$ ஐ மீப்பெருமமாக்கு.

7. $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$

எல்லா $x_j > 0$ என்றவாறு

$-3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$ ஐ மீச் சிறுமமாக்குக.

8. $x + y + z < 12$

$x + 2y - z < 5$

$x - y + z < 2$

$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ என்றவாறு

$Z = 3x + 4y + 2z$ ஐ மீப் பெருமமாக்கு.

கீழ்க்காணும் நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டப் பிரச்சினைகளைக் கணித வடிவில் முறைமைப்படுத்துக :

9. ஒரு கப்பலில் சரக்குகள் சேமிக்கும் 3 அடித் தளங்கள் முன்பகுதி, பின்பகுதி, நடுப்பகுதி தளங்கள் என்றவாறு இருக்கின்றன. அவற்றின் கொள்அளவுகள் (capacity limits) முன்பகுதி 2000 டன்கள் 100,000 கனஅடிகள்; நடுப்பகுதி 3000 டன்கள் 135,000 கனஅடிகள்; பின்பகுதி 1500 டன்கள் 30,000 கன அடிகள். கீழ்கண்டவாறு சரக்குகள் தரப்படுகின்றன; கப்பல் சொந்தக்காரர்கள் ஒவ்வொரு பொருளையும் முழு அளவிலேயோ குறைந்த அளவிலேயோ விரும்பி ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

பொருள்	அளவு, டன்களில்	டன் ஒன்றுக்குப் பரும அளவு (கன அளவு)	ஒவ்வொரு டன்னுக்குமான (இலாபம் ரூபாய்கள்)
A	6000	60	60
B	4000	50	80
C	2000	25	50

கப்பலின் பாய்மர நிலைத்தொடர்பை சீர் நிலையில் வைத்திருப்பதற்கு ஒவ்வோர் அடித்தளத்திலும் எடையானது, கொள்ளளவு

(டன்களில்)க்கு ஒத்தவாறு இருக்க வேண்டும். இலாபத்தை மீப்பெரும்ப் படுத்துவதற்கு, சரக்குகளை எவ்வாறு வழங்கப்பட வேண்டும் ?

10. ஒரு வாணிகக்குழுமம் தன்னிடத்தேயுடைய 14,00,000 ருபாய்களைக் கொண்டு 3 விதமான வாகனங்கள் வாங்க விரும்புகிறது. A வாகனம் 10 டன் சுமை தாங்கக் கூடியது; சராசரியாக மணிக்கு 35 மைல்கள் வேகத்தில் செல்லக்கூடியது. இதன் விலை 14000 ரூ. B வாகனம் 20 டன் சுமையுடன் சராசரி 30 மைல்கள் வேகத்தில் செல்லும். இதன் விலை ரூ. 40000 C வாகனமானது B–ன் மாறுபட்ட வடிவம் கொண்டது. ஓர் ஓட்டுநருக்குத் தூங்கும் வசதியைக் கொண்ட இந்த வாகன் 18 டன் சுமையைத்தான் ஏற்றுக்கொள்ளும். இதன் விலை ரூ. 5,000. A வாகனத்துக்கு ஒரு பணியாள் தேவைப்படுகிறது. ஒரு நாளைக்கு மூன்று முறை மாற்றங்களில் ஓட்டப்பட்டால் சராசரியாக ஒருநாளைக்கு 18 மணிகள் ஓடும். B, C வாகனங்களுக்கு இரண்டு இரண்டு பணியாட்கள் தேவைப்படுகின்றனர். B வாகனம்(3 முறை மாற்றங்களுக்கு)ஒரு நாளைக்கு 18 மணிகளும் C வாகனம் நாளொன்றுக்குச் சராசரியாக 21 மணிகளும் ஓடும்.

குழுமத்தில் நாளொன்றுக்கு 150 ஓட்டுநர்கள் உள்ளனர்; மேலும் பணியாட்கள் அமர்த்துவது கடினம். பராமரிப்பு வாய்ப்பு நலங்கள், மொத்தத்தில் 30 வாகனங்களுக்கு மேற்பட்டு கிடைக்காது என்றால், குழுமமானது நாளொன்றுக்குமான அதன் கொள்ளளவு (டன்-மைல்களில்) களை மீப் பெருமப்படுத்த விரும்பினால், ஒவ்வொரு வகையிலும் எத்தனை வாகனங்கள் வாங்கப்பட வேண்டும்?

11. கீழ்க்கண்ட LP பிரச்சினைக்கு சார்ன்ஸ் '$-M$' முறையில் தீர்வு காண்க :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

எல்லா $x_j \geq 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்றவாறு

$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$ ஐ மீப்பெருமப்படுத்துக.

12. கீழ்க்கண்ட LP பிரச்சினைக்குச் இரண்டு கட்ட முறையில் தீர்வினைக் காண்க :

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 < 4$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$$

எல்லா $x_j > 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்கேற்ப,

$Z = x_1 + 1.5\, x_2 + 5x_3 + 2x_4$ ஐ மீப்பெருமாக்கு.

18. ஓர் உறுப்பானது இரண்டு தொழிற்சாலைகளில் ஏதாவது ஒன்றில், ஓர் அலகுக்கு முறையே ரூ. 1·50, ரூ. 3·00 என்ற உற்பத்திச் செலவுகளுடன் உருவாக்கப்படுகிறது; மேலும் கொள்ளவுகள் முறையே 1,500, 3,000 எண்களுக்கு உட்பட்டதாகவும் உள்ளன. இணைத்துப் பூட்டப்படும் மூன்று தொழிற்சாலைகளில் அந்த உறுப்பின் தேவைகளையும் ஓர் அலகு (சரக்கேற்றப்) போக்குவரத்துச் செலவுகளையும் கீழ்க் கண்டவாறு குறிக்கிறோம் :

இணைத்துப் பூட்டப்படும் தொழிற்சாலை

	1	2	3
தொழிற்சாலை 1	0·50	0·20	1·00
தொழிற்சாலை 2	0·30	0·50	0·20
தேவைகள் (அலகுகளில்)	1500	1500	2000.

மேலே குறிக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விடையளி.

(i) கொள் குறிச் சார்பலனை விளக்கு.

(ii) எல்லாவித எல்லை நிபந்தனைகளையும் எழுது.

(iii) எத்தகைய கணித உருப்படிவம் இங்குச் சிறந்ததாகக் கொள்ளப்படுகிறது?

(iv) பிரச்சினையானது திரும்பச் செய்முறைகள் மூலமாகத் தீர்வு காண்பதற்கேற்றவாறு எவ்விதம் அமைக்கப்படுகிறது?

(v) சரியான பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண்.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை
(Revised Simplex Procedure)

சிம்ப்ளக்ஸ் கணித முறையை நுண்ணியமாக ஆராய்ந்தால், ஓர் ஆரம்ப அடிப்படையைப் பயனெளிவுத் தீர்விலிருந்து ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண்பதற்கு நடப்பு அடித்தளத்தில் (current basis) இல்லாத திசையிலிகளை அடித்தளத்தில் கொண்டு வருவதற்கான வகைகளைப் பற்றிய தீர்க்கமான அறிவாற்றல் தேவைப்படுகிறது. இச் சமயத்தில் நாம் செய்யவேண்டியவை யாவன:

1. $Z_j - C_j$ மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்து எந்தத் திசையிலியை அடித்தளத்திற்குள் உட்புகுத்துவது, அல்லது நடப்பு அடித்தளம் பெரிதுமுகந்த ஒன்று எனக் கண்டுபிடிக்கவும்.

2. அடித்தளத்திலிருந்து எந்தத் திசையிலியை வெளியேற்றுவது எனத் தீர்மானிக்கவும்,

3. அடித்தளத்தை உருமாற்றிப் புதுத் தீர்வைக் காணவும்.

m அளவைகளுடைய திசையிலிகள் $(a_1, a_2, \dots a_n)$ கொண்ட ஒரு B அடித்தளம் தரப்பட்டிருந்தால், B-ன் மூலமாக எந்த மற்றொரு m அளவைக்கான a_j திசையிலியையும் அமைக்கக் கூடிய ஒரு நேர்கோட்டுச் சேர்க்கையானது கீழ்க்கண்ட திசையிலியைக் கண்டறிந்து தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

$$X_j = B^{-1} a_j \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

இங்கு, $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots x_m)$ என்ற நிரல் திசையிலியாகும்.

தேவைப்படும் நேர்கோட்டுச் சேர்க்கையானது

$$a_j = x_{1j}\, a_1 + x_{2j}\, a_2 + \dots\dots\dots + x_{mj}\, a_{jn}$$ ஆக இருக்கும்.

$X > 0$

$AX = b$ என்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு

$z = cX$ஐ மீச்சிறும (மீப்பெரும)மாக்கும் ஒரு பொதுவான *LP* (linear programming) பிரச்சினையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

முன் உதாரணங்களில் $z = CX$ஐ மீப்பெருமமாக்குவதைக் கவனித்தோம். இப்போதும் இனிமேலும் $z = CX$ என்பது மீச்சிறுமமாக்கப்படவேண்டிய ஒரு கொள்குறிச் சார்பலன் என்று

எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு z சார்பலன் இலாபத்தைக் குறிக்காமல் செலவு தொகையைக் குறிப்பதாக இருக்கட்டும்.

A அணியின் முதல் m திசையிலிகளை B அணி குறிக்கின்றது.

அதாவது, $B X_0 = b$

$X_0 > 0$ என்றவாறு B குறிக்கப்படுகிறது.

இங்கு, $X_0 = (x_1, x_2 \ldots\ldots x_m)$

இப்படி இருப்பின் ஓர் அடிப்படைப் பயனெளிமைத் தீர்வு

$$X_0 = B^{-1}b \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (2)$$

என்று தெரிகிறது.

எனவே, A அணியின் எல்லாத் திசையிலிகளினுடைய நேர் கோட்டுச் சேர்க்கைகளையும் $j = 1, 2, \ldots \ldots n$ மதிப்புக்களுக்கு (1)ஐப் பயன்படுத்தி B–ன் வழியாகத் தீர்மானிக்க முடியும்.

எந்தப் பயனெளிமையான தீர்வினுக்கும், z_j அளவுகளைக் கீழே குறிப்பிட்டு வரையறுக்கிறோம்.

$$z_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \ldots + c_m x_{mj} \quad j = 1, 2, \ldots \ldots n \text{ மதிப்புகளுக்கு} \qquad \ldots \qquad (3)$$

இங்கு அடித்தளத்தில்உள்ள திசையிலிகளின் விலைக்கெழுக்களை c_j குறிக்கிறது.

எனவே, எந்த j–க்கும் (3)ஐ மாற்றி எழுதினால்,

$z_j = c_0 X_j = C_0 B^{-1} a_j$ ஆகும். $(j = 1, 2, \ldots\ldots n)$

இங்கு $C_0 = (c_1, c_2, \ldots c_m)$ என்ற நிரைத் திசையிலியாகும். ஆகவே, எந்த ஒரு பயனெளிமையுடைய B அடித்தளத்திற்கும்'

$$c_0 B^{-1} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

என்ற நிரைத் திசையிலி தரப்பட்டிருந்தால் நாம் Z_j ஐக் கணிக்க முடியும். ஒவ்வொரு பயனெளிவு அடித்தளம் B-க்கும், a, b, c இவற்றைப்பற்றிய மூல விபரங்களும் B^{-1} ஐப் பற்றிய விபரமும் நன்றாகத் தெரிந்திருந்தால் ஒரு பயனெளிவுத் தீர்விலிருந்து மற்ற பயனெளிவுத் தீர்வினை அடைவதற்குத் தேவையான விபரங்களை (1), (2), (4)- லிருந்து பெற்றுக் கொள்ளலாம். பொதுவான LP பிரச்சினையின் தீர்வுக்கான கணித முறைகளின் வளர்ச்சியை இந்த உண்மை நமக்குப் புலப்படுத்துகிறது. இந்தக கணித முறை வளர்ச்சியைத் ''திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை'' (Revised simplex method) என்று வழங்குகின்றோம்.

மூல முதலான (ஆரம்ப) சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக்கும், திருத்தியமைக்கப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக்கும் இடையே உள்ள முக்கிய வேறுபாட்டைக் கவனிப்போம், முதல் முறையில் நீக்கிவிடும் (விலக்கிடும்) சூத்திரங்களை (elimination formulae) பயன்படுத்தி சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியலின் எல்லா உறுப்புகளையும் மாற்றியமைக்கிறோம். இரண்டாவது முறையில் அதே சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி ஒரு நேர் எதிர் அணியின் (inverse matrix) உறுப்புகளை மட்டுமே மாற்றியமைக்கின்றோம்.

இதன் வளர்ச்சிக்குப் பின்னர், திருத்தியமைக்கப்பட்ட முறையையும் நேர் எதிர் அணியின் பெருக்கல் வடிவத்தைக் கொண்ட அதன் மாறுபாடுகளையும் பெரிய அதிவேகமான கணிப்பான்களில் உபயோகிப்பதற்காகத் தேர்ந்தெடுக்கின்றோம்.

இதற்கான இரண்டு காரணங்களாவன :

1. அதிக அளவு பூஜ்ய மதிப்புகளைக் கொண்ட கெழு அணிக்கான பிரச்சினைகளுக்கு, கணிக்கக்கூடிய மொத்த அளவு குறைகிறது. திருத்தியமைக்கப்பட்ட முறை எப்போதும் மூல முதலான கெழுக்களைக் கொண்டே அமைகிறது. மேலும் பூஜ்ய மற்ற உறுப்புக்களை மட்டுமே பெருக்குவதற்குக் கணிப்பான் குறியீடுகள் (computer codes) உருவாக்கப்படுவதால், மொத்த செய்கைக்கான நேரம் பெரிதும் குறைவாகிறது. மேலும் மூல முதலான பூஜ்யமற்ற உறுப்புகள் கணிப்பான் நினைவகத்தில் (computer memory) தொகுப்பாகச்சேகரிக்கப்பட்டு விடுகின்றன. கணிப்புகள் தொடர்ந்து நடைபெறுகையில் முதல் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையானது பூஜ்ய உறுப்புகளைப் பூஜ்யமற்ற உறுப்புகளாக மாற்றுகிறது. திருத்தியமைக்கப்பட்ட முறையிலுள்ள கணிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை, முதல் முறையிலுள்ள எண்ணைக் காட்டிலும் பொதுவாகக் குறைந்தே இருக்கும். வாக்னர் (Wagner) என்ற பேராசிரியர் இவ்விரு முறைகளுக்குமான முழுமையான ஒப்பீட்டை நன்கு விளக்கி "O.R' இலக்கியப் பத்திரிக்கை' Vol. 5 No. 3, 1957-ல்' எழுதியுள்ளார். $n > 3m$ என்ற சமயங்களில், கணிப்பு எண்ணிக்கை முறையில் திருத்தியமைக்கப்பட்ட முறை சிறந்தது என்று காட்டியுள்ளார்.

2. கணிப்பான் பதிவு செய்ய வேண்டிய புதிய விபரங்களின் அளவு பொதுவாகக் குறைந்து காணப்படுகிறது. திருத்தப்பட்ட முறையில் நேர் எதிர் அணியையும், தீர்வுக்கான திசையிலியையும் மட்டுமே பதிவு செய்கிறோம். ஆனால் முதல் முறையில், சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியலை முழுமையாகப் பதிய வேண்டியுள்ளது.

இப்போது நீக்கிடும் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி முந்தைய அடித்தளத்திலிருந்து ஒவ்வொரு புதிய தளத்திற்குமான நேர் எதிர் அணி எவ்வாறு கிடைக்கிறது என்பதைக் காண்போம்.

பழைய அடித்தளம் $B = (a_1, a_2, \ldots a_r, \ldots a_m)$ என்று இருக்கட்டும்.

இந்த அடித்தளத்தில் உள்ள a_r திசையிலியை a_k என்ற திசையிலியால் பதிலமர்த்தீடு செய்து கிடைக்கும் அடித்தளத்தை $\bar{B}$ எனக் குறிப்போம்.

இப்போது, $\bar{B} = a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k, \ldots\ldots a_r, \ldots\ldots a_m)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (5)$$

இப்போது, $X_j = [x_{1j}, x_{2j}, \ldots\ldots x_{mj}]$ என்பதாலும்

$X_j = B^{-1} a_j$ என்பதாலும்

(1)-லிருந்து,

$B^{-1} \bar{B} = B^{-1} (a_1, a_2, \ldots a_k, \ldots a_m)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_{1k} & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_{2k} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_{rk} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_{mk} & \ldots & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots [5(a)]$$

B^{-1}ன் iஆவது நிரையிலும், jஆவது நிரலிலும் உள்ள (i,j) ஆவது கூறிலுள்ள உறுப்பை b_{ij} என்றும்,

$\bar{B}^{-1}$ ன் i ஆவது நிரை, j ஆவது நிரல் இவற்றில் உள்ள உறுப்பை $-\bar{b}_{ij}$ என்றும் குறித்தால், நீக்கிடு சூத்திரத்தின் மூலமாக $\bar{b}_{ir}$-ன் மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்:

$$\left.\begin{aligned} \bar{b}_{ij} &= b_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{rk}}\, b_{rj},\ r \neq r \\ \bar{b}_{rj} &= \frac{b_{rj}}{x_{rk}} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (6)$$

இந்த உரு மாற்றத்தின் நேர்மையை $\bar{B}^{-1}$-ன் நேரடிப் பெருக்கத்தால் சோதித்து இப் பெருக்கல் ஒரு முற்றொருமை அணியைத் தருகிறதா எனத் தீர்மானிக்கவேண்டும். உதாரணமாக $\bar{B}^{-1}$ன் முதல் நிரை, $\bar{B}$-ன் முதல் நிரல் இரண்டின் உட்பெருக்கமானது ((inner product),

$$= \left(b_{11} - \frac{x_{1k}}{x_{rk}}\, b_{r1} \right) a_{11} + \left(b_{12} - \frac{x_{1k}}{x_{rk}}\ b_{r2} \right) a_{21}$$

$$+ \dots + \left(b_{1m} - \frac{x_{1k}}{x_{rk}}\ b_{rm} \right) a_{m1}$$

$$= (b_{11}\, a_{11} + b_{12}\, a_{21} + \dots\dots + b_{1m}\, a_{m1})$$

$$- (b_{r1}\, a_{11} + b_{r2}\, a_{21} + \dots\dots + b_{rm}\, a_{m1})\, \frac{x_{1k}}{x_{rk}} \quad \dots \quad (7)$$

(7)-ன் முதல் உறுப்பானது B^{-1}-ன் முதல் நிறை, a_1 இவற்றின் உட்பெருக்கத்தைக் குறிக்கிறது. இதன் மதிப்பு (5)-ன் மூலம் 1 (ஒன்று)க்குச் சமமாகிறது.

(7)-ன் இரண்டாவது உறுப்பானது B^{-1}ன் r-வது நிரை, a_1 இவற்றின் உட்பெருக்க மதிப்பு $= 0$ என்றாகிறது. எனவே(7)-ன் மதிப்பு $= 1$ இதேபோல $(\bar{B}^{-1}\ \bar{B}) = I$ என்று கண்டறியலாம். இவ்வாருகச் சூத்திரங்கள் (6)ஐப் பயன்படுத்தி $\bar{B}^{-1}$ஐ உருவாக்க முடியும்.

அடுத்து டாண்ட்சிஸ்-ஆர்ச்சார்ட்-ஹேய்ஸ் (Dantzig and Orchard Hays) என்பவர்களால் கண்டறியப்பட்ட திருத்தியமைக்கப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் கணிக்கும் வடிவை நாம் ஆராய்வோம்.

இந்தத் திருத்தியமைக்கப்பட்ட முறையானது, முன்பு விளக்கப்பட்ட முதல் முறையைப்போல விவரித்து விளக்கப்படவில்லை;

எனினும், நாம் இந்த இரண்டு முறைகளுக்குமான தொடர்பைக் காண முற்படுவோம்.

திருத்திய முறையின் பயனைக்காண, x_{n+m+1}, x_{n+m+2} என்ற இரு மாறிகளை வரையறுத்து, கீழ்க்கண்டவாறு புகுத்துவோம்.

திருத்திய முறைக்காக ஒரு பொதுவான LP பிரச்சினையைக் கீழேகண்டவாறு எடுத்துக்கொள்வோம் :

$$\left.\begin{array}{l} \text{``}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mm}\,x_n = b_m \\ C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots\ldots + C_nx_n + x_{n+m+1} = 0 \end{array}\right\} \ldots \quad (8)$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots\ldots\ x_n \geqslant 0 \qquad \ldots \qquad (9)$$

இந்த (8). (9) நிபந்தனைகளுக்கேற்றவாறு x_{n+m+1} ஐ (10) மீப்பெருமமாக்கு.''

இங்கு எல்லா $b_i \geqslant 0$ எனக்கொள்வோம்.

இப்போது,

$x_{n+m+1} = -C_1x_1 - C_2x_2 - \ldots - C_nx_n$ என்பதாலும், ஒரு கொள்குறிச் சார்பலனை மீச்சிறுமமாக்கும் ஒரு LP பிரச்சினையானது, அதே நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு அந்த கொள்குறிச் சார்பலனின் எதிர்மறை மதிப்பை மீப்பெருமமாக்கும் ஒரு LP பிரச்சினைக்கு, கொள்கையளவில், சமமானதாகும்.

ஆகவே, மேற்படி பிரச்சினையை மாற்றியமைத்தால்,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}\,x_1 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \ldots [8(a)]$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots\ldots\ x_n \geqslant 0 \qquad \ldots\ [9(a)]$$

இந்த [8(a)], [9(a)] நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டவாறு

$$c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots\ldots + c_n\,x_n \qquad \ldots \qquad [10(a)]$$

என்பதை மீச்சிறுமமாக்கும் பிரச்சினைக்கு முந்தைய பிரச்சினை சமமாகிறது.

திருத்தப்பட்ட பிரச்சினையில் கொள்குறிச் சார்பலன் x_{n+m+1}ஐ மட்டுமே கொண்டுள்ளதால், அதாவது x_{n+m+1}-ன் மதிப்பு, மீச் சிறுமமான கொள் குறிச் சார்பலனின் எதிர்மறை மதிப்பாதலால் (9), (10) ல் x_{n+m+1}-ன் குறியை (sign) நாம் கட்டுப்படுத்தவில்லை.

முதல் முறையைப் போல, திருத்தப்பட்ட முறையிலும் உண்மை அல்லது செயற்கைத் திசையிலிகளைக் கொண்ட திசையிலி அலகுகளால் ஆன ஒரு முற்றொருமை அணியைக் கொண்டமைந்த அடித்தளத்தை முதலில் எடுத்துக் கொள்வோம். திருத்தப்பட்ட முறையானது, செயற்கைத் திசையிலிகளைக் கொண்டவாறு ஆரம்பித்தால், முன்போல ஓர் ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வைக் கண்டுபிடித்து, பிறகு அதனைத் தொடர்ந்து ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண்போம். பயனெளிமையைத் தீர்மானிக்கும் கணிப்புப் பகுதியை முதல் கட்டம் (Phase I) என்று வழங்குகின்றோம். பெரிதும் உகந்த தீர்வினைக் கண்டு பிடிக்கும் கணிப்புப் பகுதியை இரண்டாம் கட்டம் (Phase II) என்று கூறுகிறோம்.

செயற்கைத் திசையிலித் தத்துவத்தைப் பொது விதி வடிவாக்குவதற்கும், முதல் கட்டத்துக்கான கணிப்புகளை எளிதாக்குவதற்கும், கீழ்க்கண்ட முறையில் ஒரு மிகைவான தேவைக்கு மேற்பட்ட சமன்பாட்டை வரையறுப்போம்.

$$\left.\begin{aligned} &a_{m+2,1}\,x_1+a_{m+2,2}\,x_2+\ldots+a_{m+2,n}\,x_n+x_{n+m+2}=b_{m+2} \\ &\text{இங்கு } a_{m+2,j}=-\sum_{i=1}^{m}c_{ij}, \quad j=1,2,\ldots n \\ &b_{m+2}=-\sum_{i=1}^{m}b_i \end{aligned}\right\}\ \ldots (11)$$

என்றவாறு மேலே கூறிய சமன்பாடு அமைக்கப்பட வேண்டும். A கெழு அணியின் j-நிரலிலுள்ள கெழுக்களின் எதிர்மறைக் கூட்டல்தான் $a_{m+2}\ j$ என்றும், அதேபோல எல்லா b_i-ன் எதிர்மறைக் கூட்டல் b_{m+2} என்றும் நாம் அறிகிறோம். x_{n+m+2} என்ற 'மிகைவான' மாறி(redundant variable)யின் தனிச் சிறப்பினைக் கீழே விளக்குவோம். இப்போது $c_j = a_{m+1,j}$ என்று குறிப்பிட்டால், (8) முதல் (10) வரையான திருத்திய பிரச்சினையைப் பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$
\left.\begin{array}{l}
“a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + \cdots\cdots + a_{3n}x_n + x_{n+3} = b_3 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \cdots + a_{m+1,n}x_n + x_{n+m+1} = b_{m+1} \\
a_{m+2,1}x_1 + a_{m+2,2}x_2 + \cdots + a_{m+2,n}x_n + x_{n+m+2} = b_{m+2}
\end{array}\right\} \quad (12)
$$

$$x_1 > 0, \ldots\ldots x_n > 0.\ x_{n+1} \geqslant 0 \ldots\ldots x_{n+m} \geqslant 0 \quad \ldots \quad (13)$$

இந்த (12), (13) நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்ப,

$$x_{n+m+1} \text{ ஐ} \quad \ldots \quad (14)$$

மீப்பெருமமாக்கு” என்பதே பிரச்சினையாகும்.

இங்கு $i = 1,2, \ldots\ldots m$-க்கு எதிர்மறையற்ற செயற்கை மாறிகளை x_{n+i}ஐ அதற்கான சமன்பாடுகளில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது.

(8)–ன் எல்லா நிபந்தனைகளையும் ஏற்காத $X = (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ என்ற திசையிலிக்காகக் கண்டுபிடித்த, (8)-ன் மூலச் சமன்பாடுகளின் இரு பக்கங்களின் இடையேயுள்ள, பிழைகளின் அளவே இந்தச் செயற்கை மாறிகள் ஆகும்.

(11), (12) இவற்றிலிருந்து, நாம் காண்பது,

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots\ldots + x_{n+m} + x_{n+m+2} = 0.$$

எனவே,

$$x_{n+m+2} = -(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}).$$

எல்லா $x_{n+i} \geqslant 0$ என்பதால், x_{n+m+2}-ன் மதிப்பு நேர் (மதிப்பாக) எண்ணுகை இருக்கமுடியாது.

அதாவது, $x_{n+m+2} > 0$ என்று இருக்கமுடியாது.

(12) முதல் (14) இவற்றில் காணப்படுவதுபோல், திருத்தப்பட்ட பிரச்சினை, $n + m + 2$ மாறிகளில் $m + 2$ சமன்பாடுகளைக் கொண்டதாக உள்ளது.

இங்கு, $(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n, x_{n+m+1}, x_{n+m+2})$ என்ற தொகுதியிலிருந்து $m + 2$ மாறிகளைக்கொண்ட ஓர் அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வு கிடைக்கும். கடைசி இரண்டு மாறிகளின்

குறிகளும், கட்டுப்படாமல் உள்ளன. அவை இரண்டும் தீர்வில் எப்போதும் இருக்கும். $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ தொகுதியிலிருந்து பெரிதும் உகந்த தீர்விற்கான மாறிகள், x_{n+m+1} ஐக் கொள் குறிச் சார்பலனைக் கொண்ட (8)முதல்(10) வரையான பிரச்சினைக்குத் தகுந்ததோர் அடிப்படை மீப்பெரு பயனெளிமைத் தீர்வைக் குறிக்கின்றன.

கொள் குறிச்சார்பலனின் மதிப்பு,

$$-x_{n+m+1} = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots C_n x_n$$

என்று இருந்தால், மேற்படி பெரிதும் உகந்த தீர்வானது [8(a)] முதல் [10(a)] வரையான பிரச்சினையின் ஓர் அடிப்படை மீச்சிறு பயனெளிமைத் தீர்வாகவும் இருக்கும்.

m செயற்கை மாறிகள் $x_{+1}, x_{n+2} \ldots x_{n+m}$ ஐயும், தீர்வில் x_{n+m+1}, x_{n+m+2} இரு மாறிகளையும் கொண்ட திருத்தப்பட்ட ஒரு பிரச்சினைக்காகக் கணக்கிடும் முறையை இப்போது கவனிப்போம்.

ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமைத் தீர்வைக் காண்பதற்குக் கட்டம் I முறையினை பயன்படுத்துவோம். x_{n+m+1}, x_{n+m+2} மாறிகளின் குறியில் கட்டுப்பாடின்றி, (12), (13) நிபந்தனைகளுக் கேற்றவாறு x_{n+m+2} மாறி மதிப்பை மீப்பெருமமாக்கும் பிரச்சினைக் குக் கட்டம் I முறையில் தீர்வு காணலாம். x_{n+m+2}-ன் மீப்பெரு மதிப்பு பூஜ்யம் என்றால், இந்தப் 'பூர்வாங்க மீப்பெரு தீர்வின் (preliminary maximum solution) x_j ($j = 1, 2, \quad n$) மாறிகளின் மதிப்பும் எல்லா $x_{n+i}=0$ மதிப்பும் (8), (9), [8 a)],[9(a)] பிரச்சினைகளுக்கானதோர் அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வைக் குறிக்கிறது என்று அறிகிறோம். மீப்பெரு $(x_{n+m+2}) < 0$ என்றால், குறைந்தபட்சம் ஒரு செயற்கை மாறியாவது பூஜ்யமற்ற மதிப்புடன் கட்டம் I தீர்வில் காணப்படும். எனவே, மூல முதல் பிரச்சினைக்கு எந்த ஒரு பயனெளிமையான தீர்வும் கிடைக்காது. முன் குறிப்பிட்ட வகையில் நாம் கட்டம் II-க்குச் செல்வோம். அங்கு, $x_{n+m+2} = 0$ என்று வைத்துக்கொண்டு (12), (13) நிபந்தனைகளுக்கேற்றவாறு x_{n+m+1} ஐ மீப்பெருமப் படுத்துகிறோம். கட்டம் II-ல் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வுகளின் தொகுதி பூஜ்யம் மதிப்புகளையுடைய செயற்கை மாறிகளைக் கொண்டிருக்கும். இந்தக் கடைசி கட்டம் II-ன் தீர்வு தான் நமக்குத் தேவைப்படும் பெரிதும் உகந்த தீர்வாகிறது.

முழு செயற்கை அடித்தளத்தைக் கொண்டு ஆரம்பிக்கும் ஒரு திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்கு, முழுமையாகக்

கணிக்கும் முறையை விளக்கமாக நாம் இப்போது விவரிப்போம். இங்குத் தீர்வில் உள்ள மாறிகள், அதற்கான மதிப்புகள், நடப்பு அடித்தளத்தின் நேர் எதிர் அணி இவற்றைக் கவனிப்போம்.

புதிய தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிக்கும்போது, z_j உறுப்புகளைக் கணிக்கும் வழி முறையை நாம் காணவேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. நடப்பு அடித்தளத்திலுள்ள $c_0 B^{-1}$ திசையிலியைக் கொண்டு இதைக் காணலாம். இப்போது எந்தத் திசையிலி அடித்தளத்திற்குள் புகுத்தப்படுகிறது என்று தீர்மானித்து, அது a_j என்ருல், $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots x_{mj})$ என்ற x_j மதிப்பை $x_j = B^{-1} a_j$ மூலமாகக் கணிக்கிருேம். இனி மேல் எந்த திசையிலி வெளியேற்றப்பட வேண்டும் (நீக்கப்பட வேண்டும்) என்று கண்டுபிடிக்கிருேம். பிறகு நீக்கிடும் சூத்திரங்களைக் கொண்டு நடப்பு அடித்தளத்தின் நேர் எதிர் அணியை உருமாற்றி புதிய அடித்தளத்தின் நேர் எதிர் அணியைக் கண்டுபிடிக்கிருேம். (13)-லிருந்து, தேவையான கெழுக்களைப் பிரித்து அவற்றை $m+2 \times m$ அணியில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுகிருேம்.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rk} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,k} & \cdots & a_{m+1,k} \\ a_{m+2,1} & a_{m+2,2} & \cdots & a_{m+2,k} & \cdots & a_{m+2,k} \end{bmatrix}$$

$\bar{A}$ ன் ஒவ்வொரு நிரல் திசையிலியையும் $\bar{A}_j$ என்று குறிப்போம். $\bar{A}$ அணியிலுள்ள விவரங்களை, மூல முதல் பிரச்சினைக்கான ஆரம்ப கட்ட செயற்கைத் தளத்தைக் கொண்ட கணிப்புப் பட்டியலுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம். அப் பட்டியலில் $a_1, a_2, \ldots a_n$ நிரல்களையும், $1, 2, 3, \ldots m, m+1, m+2$ நிரைகளையும் கொண்ட அணியே இங்கு $\bar{A}$ அணியாக உள்ளது. ஆனல் $\bar{A}$-ன் $(m+1)$, $(m+2)$வ நிறைகள் பட்டியலின் அந்த நிரைகளின் எதிர்மறையாக (negative) இருக்கும் என்பதைத் தவிர, மற்றபடி இரண்டும் ஒன்றேயாகும். முதல் முறையைப் போலவே, தீர்வில் செயற்கை மாறிகள் இன்னும் இருக்கையில் $(z_j - c_j)$ உறுப்புகளைக் கணிப்பதற்கு $\bar{A}$-ன் $m+(2)$ நிரை

பயன்படும். அந்தச் செயற்கை மாறிகள் நீக்கப்பட்ட பிறகு, $(m+1)$ நிரை பயன்படும்.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட முறைக்கு நமது முதல் அடித்தளம் ஒரு முற்றொருமை அணியைக் கொண்டுள்ளதால், அதன் நேர் எதிர் அணியும் ஒரு முற்றொருமை அணியாகவே இருக்கிறது. இந்த விவரத்தைக் கீழே காணும் $(m+2) \times (m+2)$ அணி காட்டுகிறது.

$$\left[\begin{array}{cccc|cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

U அணியின் முதல் m நிரைகளும் முதல் m நிரல்களும் ஆரம்ப அடித்தளம் B-ன் நேர் எதிர் அணியினைக் குறிக்கிறது. U-ன் கடைசி இரண்டு நிரைகளும் அடித்தளத்தில் எந்தத் திசையிலி சேர்க்கப்படுகிறது என்பதையறிய உதவுகிறது. இந்த அடித்தளத்தின் $(m+2)$ நிரையானது கட்டம் I-ல் விவரங்களையும், $(m+1)$ நிரையானது கட்டம் II-ல் விவரங்களையும் உருவாக்குகிறது.

ஆரம்ப கணிப்புப் பட்டியலில் U அணியைப் பதித்து வைப்போம். அதன் உறுப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு உருமாற்றுவோம். U-ன் உறுப்புகளை u_{ij} என்றும் அதன் நிரைத் திசையிலிகளை $U_i = (u_{i1},\ u_{i2}\ \ldots\ u_{i,\,m+2})$ என்றும் குறிப்போம். கணிப்பு முறையை எளிதாக விளக்குவதற்கு, U-ன் i-ஆவது நிரையின் மூலமுதல் விளக்கம், உருமாற்றப்பட்ட விளக்கம் இரண்டையுமே U_i ஐயால் குறிப்போம். U அணியானது (12)-க்கான திசையிலி நிரல்களைக்கொண்ட $(m+2) \times (m+2)$ அணியின் நேர் எதிர் அணியாகும். U அணியை வரையறுத்து $x_{n+m+1} = 0$, $x_{n+m+2} = b_{m+2}$ என்ற ஆரம்பகட்டத் தீர்வைக் கீழே

குறித்த ஆரம்ப பட்டியலில் காணலாம். கட்டங்களின் கணிப்பு முறைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

கட்டம் I: தீர்வில் நேர் மதிப்புகளுடைய செயற்கை மாறிகள் :

படிநிலை 1 (Step 1) •

$x_{n+m+2} < 0$ என்றால்,

$$\delta_j = U_{m+2} \bar{A}_j$$

$$= u_{m+2,1} a_{1j} + u_{m+2,2} a_{2j} + \dots \dots + u_{m+2,\, m+2} a_{m+2,j} \; (j = 1, 2, \dots n)$$

மதிப்புகளுக்கு இதைக் கண்டுபிடித்து 2ஆவது படிக்குச் செல்லவும்.

[திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்குக் கட்டம் I-ல் மீப்பெருமமாக்கப்படவேண்டிய கொள்குறிச் சார்பலன் x_{m+n+2} என்பதால் இந்த மீப்பெருமமாக்கும் பிரச்சினைக்கு $c_{m+n+2} = 1$ என்பதைத் தவிர மற்ற எல்லாச் செலவுத் தொகைக் கெழுக்களும் பூஜ்யமாக இருக்கின்றன. இதே போல, கட்டம் II-ல் மீப்பெருமமாக்கப்படும் கொள் குறிச்சார்பலன் x_{n+m+1} ஆகும். இங்கும் $c_{m+n+1} = 1$ என்பதைத் தவிர மற்ற எல்லா $c_j = 0$ ஆக இருக்கும். கட்டம் I-ல் வரையறுக்கப்படும் δ_j-யும், கட்டம் II-ல் வரையறுக்கப்படும் γ_j-யும் இரண்டு விதங்களில் குறிக்கப்படுகின்றன. அவையாவன, திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்சினையின் கொள்குறிச் சார்பலன்களை மீப்பெருமப் படுத்துவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட மூல முதல் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் உள்ள முறையே செயற்கை, உண்மை $(z_j - c_j)$ உறுப்புகளைக் குறிக்கின்றன; அங்குள்ள கட்டளை விதியானது எல்லா $z_j - c_j > 0$ என்றால், பெரிதும் உகந்த தீர்வு கிடைத்துவிடுகிறது என்பதாகும். அந்தந்த திரும்பச் செய்முறைக்கு, δ_j, γ_j-ன் மதிப்புகள் [8(a)] [9(a)] [10(a)] இவற்றால் குறிக்கப்பட்ட மீச்சிறுமப் பிரச்சனையின் தீர்வைக் காணக் கணிக்கப்படும் $z_j - c_j$ மதிப்புகளுக்குச் சமமாக இருக்கும். இங்குள்ள கட்டளை விதியானது, எல்லா $z_j - c_j < 0$ எனும்போது, பெரிதும் உகந்த தீர்வு கிடைத்துவிடுகிறது என்பதாகும். ஆகவே, ஒரு திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்சினையை அமைக்கும்போது, மூலமுதல் பிரச்சினையை மீச்சிறுமமாக்கவேண்டிய பிரச்சினையாகவே எப்போதும் எழுதவேண்டும்; அந்த மீச்சிறுமப் பிரச்சினைக்கு $a_{m+1,j} = c_j$ என்றவாறு $\bar{A}$ அணியைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

இப்போது கட்டம் I-ல் தீர்வு முறைக்குப் படிநிலை 1 விவரம் : $\gamma_{n+m+2} < 0$ என்ருல், δ_j ஐக் கண்டுபிடித்துப் படி 2-க்குச் செல்கிருேம்.

$\gamma_{n+m+2} = 0$ என்ருல், கட்டம் II-ன் படிநிலை 1-க்குச் செல்வோம்.

படிநிலை 2 :

எல்லா $\delta_j \geqslant 0$ என்ருல், x_{n+m-2} ஆனது தனது உச்சத்தில் (மீப்பெருமத்தில்) உள்ளது ; ஆதலால் (8), (9), (10) இவற்றுக்கான பிரச்சினைக்கு எந்த ஒரு பயனெளிமையான தீர்வும் கிடைக்காது.

குறைந்தபட்சம் ஒரு $\delta_j < 0$ என்ருல், மீச்சிறு $\delta_j = \delta_k$ என்பதற்கான x_k மாறியைத் தீர்வினுக்குள் புகுத்தவேண்டும்.

பட்டியல் (பக்கம் 74, 75-ல் காண்க).

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சமமான மீச்சிறு மதிப்புக்கள் δ_j இருந்தால் சிறிய k எண்ணுக்கான S_k ஐத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். ஒத்தன மதிப்புகளுக்கு இஃது ஒரு சிறந்த முறையாகும்.

படிநிலை 3 :

$i = 1, 2, 3, \ldots m, m+1, m+2$க்கு

$x_{ik} = U_i \bar{A}_k$

$= U_{i1} a_{1k} + U_{i2} a_{2k} + \ldots\ldots + U_{i,\, m+2}\, a_{m+2,k}$ மதிப்பைக் கணிக்கவும்.

இப்போது மீச்சிறு $\underset{i}{} \dfrac{x_i}{x_{ik}} = \dfrac{x_r}{x_{rk}} = \theta_0$, $i = 1, 2, \; m$ என்ருல் தீர்விலிருந்து x_r மாறியை நீக்கி விடவும்.

$x_{ik} > 0$-க்கான மாறிக்கு மட்டுமே இந்த விகிதம் கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. மீச்சிறுமத்திற்கு ஒத்தனவை இருந்தால் சிறிய எண் r ஆக உள்ள x_r ஐத் தேர்ந்தெடுக்கிருேம். விளக்குவதன் நோக்கமாக, எல்லா $i = 1, 2, \ldots n$ மதிப்புகளுக்கும் விகிதங்களை எடுத்துக் கொள்கிருேம். ஆனல் உண்மையிலே, (12)-க்கான அடிப்படைத் தீர்வில் எந்த x_i மதிப்புகள் உள்ளனவோ அந்த i மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே $\dfrac{x^i}{x_{ik}}$ விகிதங்கள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

பட்டியல்

பட்டியலின் நிரை எண் விபரம்	தீர்வில் உள்ள மாறிகளின் எண் விபரம்	மாறிகளின் மதிப்புகள்	U அணி		
			அடித்தளத்தின் நேர் எதிர் அணி, B^{-1}		$U_i \bar{A}_k$ $(B^{-1} a_k)$
			U_{m+1}		$U_{m+1} \bar{A}_k$
			U_{m+2}		$U_{m+2} \bar{A}_k$

1. ஆரம்பப் பட்டியல்

1	$n+1$	$x_{n+1}=b_1$	1	0	0	0	0	0	x_{1k}
2	$n+2$	$x_{n+2}=b_2$	0	1	0	0	0	0	x_{2k}
...	...	...	...	... ...	... ...	... ...	...		...
...	...	...	...	... ...	... ...	...	...		...
...	...	...	...	... ...	... ...	... ...	...		...
r	$n+r$	$x_{n+r}=b_r$	0	0	1	0	0	0	x_{rk}
...	...	...	...	... ...	... ...	... ...	...		...
...	...	...	...	... ...	... ...	... ...	...		...
...	...	...	...	... ...	... ...	... ...	...		...
m	$n+m$	$x_{n+m}=b_m$	0	0	0	0	0	0	x_{mk}
$m+1$	$n+m+1$	$x_{n+m+1}=0$	0	0	0	0	1	0	$x_{m+1 \cdot k}$
$m+2$	$n+m+2$	$x_{n+m+2}=b_{m+2}$	0	0	0	0	0	1	$x_{m+2 \cdot k}$

2. உருமாற்றப்பட்ட பட்டியல்

1	$n+1$	x'_{n+1}	v'_{11}	u'_{12}	...	u'_{1r}	...	u'_{1m}	0	0
2	$n+2$	x'_{n+2}	u'_{21}	u'_{22}	...	u'_{2r}	...	n'_{1m}	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
r	k	x'_k	u'_{r1}	u'_{r2}	...	u'_{rn}	...	u'_{rm}	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$n+m$	$n+m$	x'_{n+m}	u'_{m1}	u'_{m2}	...	u'_{mr}	...	u'_{mm}	0	0
$m+1$	$n+m+1$	x'_{n+m+1}	$u'_{m+2,1}$	$u'_{m+1,2}$	...	$u'_{m+1,r}$	...	$u'_{m+1,m}$	1	0
$m+2$	$n+m+2$	x'_{n+m+2}	$u'_{m+2,1}$	$u'_{m+2,2}$	...	$u'_{m+2,r}$		$u'_{m+2,2}$	0	1

படிநிலை 4 :

$$x_i' = x_i - \frac{x_r}{x_{rk}} x_{ik}, \quad i \neq k$$

$$x_k' = \frac{x_r}{x_{rk}}$$

என்ற சூத்திரங்களின் வாயிலாக அடிப்படைத் தீர்வில் மாறிகளின் புது மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$u_{ij} = u_{ij} - \frac{u_{rj}}{x_{rk}} x_{ik} \quad i \neq r$$

$$u_{rj} = \frac{u_{rj}}{x r_k}$$

இவற்றைப் பயன்படுத்தி U அணியின் புது உறுப்புகளை உரு மாற்றி எழுதவும்.

இந்த உருமாற்றத்தினால், U-ன் $(m+1)$வது, $(m+2)$-ஆவது நிரல்கள் எப்போதும் மாறாது. இந்த அலகுத் திசையிலிகள் $z_j - c_j$ஐக் கணிக்கும்போது சரியான c_j மதிப்பைக் கூட்டுவதற்கு உதவுகின்றன. உருமாற்றப்பட்ட பட்டியலில் கண்ட U-ன் உரு மாற்றிய நிரைகளைக் கொண்டு, எந்தப் பயனெளிவுத் தீர்வுகளும் கிடைக்காது என்று அறியும் வகையிலோ அல்லது $x_{n+m+2} = 0$ மதிப்பு உடையது என்று தீர்மானிக்கும் வரையிலோ கட்டம் I-ன் எல்லாப் படிநிலைகளையும் திரும்பத் திரும்பச் செய்யவேண்டும். இரண்டாவதாகக் கூறப்பட்ட வகையில் நாம் கட்டம் II-க்குச் செல்கிறோம்.

கட்டம் II. தீர்வில் நேர் மதிப்புகளுடன் கூடிய செயற்கை மாறிகள் ஏதும் இல்லை என்ற கட்டம் :

படிநிலை 1:

இங்கு $x_{n+m+2} = 0$

$\gamma_j = U_{m+1} \bar{A}_j$ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$= u_{m+1,1}\, a_{1j} + u_{m+1\,2} a_{2j} + \ldots\ldots + u_{m+1,\, m+2}\, a_{m+2\,j}$$

$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n.)$$

படிநிலை 2:

எல்லா $\gamma_j \geqslant 0$ என்றால், x_{n+m+1} தனது மீப்பெரு மதிப்பில் உள்ளது. எனவே, அதற்கான அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வு ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வாகும். x_{n+m+1}-ன் எதிர்மறை மதிப்பானது, மீச்சிறுமப்படுத்தப்பட்டிருக்கவேண்டிய கொள்குறிச் சார்பலனின் உண்மை மதிப்பாகும்.

குறைந்தபட்சம் ஒரு $\delta_j < 0$ என்ருல்,

மீச்சிறு $\gamma_j = \gamma_k$ என்று கொள்வோம்.

தீர்வினுக்குள் X_k மாறியைச் சேர்க்க முடிவு செய்கிருேம். γ_k மதிப்பில் ஒத்தனவை இருந்தால், சிறிய குறி எண்ணுடைய மாறியைத் தேர்ந்தெடுக்கின்ருேம்.

படிநிலை 3:

$i = 1, 2, \dots m, m+1, m+2$-க்கு,

$x_{ik} = U_j \bar{A}_k$

$= u_{j1} a_{ik} + u_{j2} a_{2k} + \dots\dots\dots + u_{j,m+2}, \; a_{m+2,k}$ மதிப்பைக் சேர்க்க கணிக்கவும்.

இப்போது மீச்சிறு,

$$\min_i \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_r}{x_{rk}} = \theta_0,\; i = 1, 2, \dots m \text{ எனில்,}$$

தீர்விலிருந்து x_r மாறியை நீக்கிவிடவும். $x_{ik} > 0$-க்கான மாறிக்கு மட்டுமே இவ்விதம் கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. ஒத்தனவை இருந்தால் முன்னர் குறிப்பிட்டபடி x_r தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது.

எல்லா $x_{ik} < 0$ என்ருல், கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு ஏதாவது ஒரு பெரிய மதிப்பை யடையுமாறு தீர்வு இம் முறையில் கிடைக்கிறது.

படிநிலை 4 :

$$x_i' = x_i - \frac{x_r}{x_{rk}} \cdot x_{ik} \qquad i \pm k \text{ என்ருல்}$$

$$x_k' = \frac{x_r}{x_{rk}}$$

என்ற சூத்திரங்களின் வாயிலாக அடிப்படைத் தீர்வில் மாறிகளின் புது மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

இதேபோல,

$$u_{1ij} = u_{ij} - \frac{u_{rj}}{x_{rk}} x_{ik} \cdot \qquad i \neq r$$

$$u_{1ij} = \frac{u_{ij}}{x_{rk}}$$

இவற்றைப் பயன்படுத்தி U-அணியின் புது உறுப்புகளை உருமாற்றி எழுதவும்.

கொள்குறிச் சார்பலனின் ஒரு முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத மதிப்புடன் கூடிய பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வினைக் கண்டு பிடிக்கும் வரை இவ்வாறு திரும்பத் திரும்பச் செய்யவேண்டும்.

(12), (13), (14)–க்கான ஆரம்பத்தீர்வினையும், மேற்கூறிய படி நிலைகளையும், பட்டியலில் மேலே காட்டியபடி, கணிப்பு முறைகளால் வரிசையாகச் செய்து வரவேண்டும். ஒவ்வொரு நேர் எதிர் அணியையும் சார்ந்த x_{lk} ஐ குறித்துக் காட்ட ஒரு தனி நிரல் கடைசியில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. பட்டியலில் தடித்த கோடுகளால் சூழப்பட்ட $(m+2) \times (m+2)$ அணியானது நேர் எதிர் அணி U ஐக் குறிக்கிறது. உருமாற்றப்பட்ட U அணியின் கடைசி இரண்டு நிரல்களும் மாறுமல் அப்படியேயுள்ளன. (12)–ன் a_j யிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட m அளவை அடித்தளத்தின் நேர் எதிர் அணி [$(m+1)$ ஆவது $(m+2)$ ஆவது நிரைகளைச் சேர்க்காமல்] தடித்த கோடுகளாலும் மெல்லிய கோடுகளாலும் சூழப்பட்டு உள்ளது.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்சினையின் கணித வடிவத்தில் அலகுத்திசைகள் இருந்தால், அவற்றின் செலவுகெழுக்கள் 'O' ஆக இருந்தால், அதாவது அவை தளர்வான திசையிலிகளாயிருந்தால் அவற்றைத் திருத்திய முறைக்கான ஆரம்ப அடித்தளத்தில் உபயோகிக்கலாம். இவை உபயோகிக்கப்பட்டால் (II) ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$a_{m+2,\, j} = -\sum_{i \neq B} a_{ij} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (15)$$

$$b_{m+2} = -\sum_{i \neq B} b_i \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (16)$$

மேலும் ஒரு செயற்கைத் திசையிலி தேவைப்படுகிற நிரைகளின் குறியெண்கள் தொகுதியை '$i \neq B$' என்று குறிக்கிறோம். இங்கு சரியான இயற்கையான அலகுத் திசையிலிகள் m ஆக இருப்பின், $b_{m+2} = 0$ என்றும், கட்டம் II ஆரம்பிக்கிறது என்றும் அறிகிறோம்.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட முறையை விளக்கி, இருவித சிம்ப்ளக்ஸ் முறைகளினிடையேயான தொடர்பைச் சுட்டிக் காட்டுவதற்கு ஓர் உதாரணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

உதாரணம்

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

எல்லா $x_j \geq 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக் கேற்றவாறு $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$ ஐ மீப்பெருமமாக்கு. இங்கு $m_3 = 3n = 4$. மீச்சிறுமப் பிரச்சினைக்கு ஏற்ற கொள் குறிச் சார்பலன் $-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$ ஆகும். ஒரு முழு செயற்கை அடித்ளத்தைக் கொண்டு, திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்காக இந்த உதாரணத்தை மாற்றி எழுதுவோம்.

"
$$x_1 + 2x_2 + 3x \qquad + x_5 \qquad = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad + x_6 \qquad = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_3 \qquad + x_7 \qquad = 10$$

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad + x_8 \qquad = 0$$

$$-4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - x_4 \qquad + x_9 = -45$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு x_8 ஐ மீப்பெருமமாக்கு." 4ஆவது நிரையில் முதல் 4 மாறிகளின் கெழுக்களும், மீச்சிறுமப் படுத்தப்படும் மூல முதலான கொள்குறிச் சார்பலனில் காணப் படும் c_j மதிப்புக்களை முறையே குறிக்கும். (11) சூத்திரங்களைக் கொண்டு x_1, x_2, x_3, x_4 மாறிகளின் கெழுக்களும், ஐந்தாவது சமன்பாட்டின் வலதுபக்க மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன.

இந்த உதாரணத்துக்கான $\bar{A}$, U–அணிகளாவன :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ஆரம்பப் பட்டியலையும், திரும்பச் செய்முறைகளின் வரிசைகளையும் கீழே காட்டியுள்ளது.

முதல் பட்டியல்

நிரைக் குறி யெண்	மாறிகள் குறி யெண்	மாறிகள் மதிப்பு	U அணி					x_{jk}
1	5	15	1	0	0	0	0	3
2	6	20	0	1	0	0	0	(5)
3	7	10	0	0	1	0	0	1
4	8	0	0	0	0	1	0	−3
5	9	−45	0	0	0	0	1	−9

$$\delta_k = \delta_3 = -9$$

$$\theta_0 = \frac{x_6}{x_{63}} = 4.$$

இங்கு $\delta_k = \underset{j}{\text{மீச்சிறு}}\ \delta_j = \underset{j}{\text{மீச்சிறு}}\ [U_{m+2\,j}\bar{A}]$

$$\delta_1 = U_{m+2}\,\bar{A}_1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = -4.$$

$$\delta_2 = U_{m+2}\,\bar{A}_2 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = -5.$$

$$\delta_3 = U_{m+2}\,\bar{A}_3 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = -9$$

$$\delta_4 = U_{m+2}\,\bar{A}_4 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1.$$

எனவே $\underset{j}{\text{மீச்சிறு}}\ \delta_j = -9 = \delta_3 = \delta_k$ என்பதால் $k = 3$.

∴ $\bar{A}_k = x_{ik}$ நிரல்; முதல் பட்டியலுக்குக் கடைசி நிரலில் $\bar{A}_3$ ஐ எழுதவும்.

எனவே $\delta_k = \delta_3 = U_{m+2}\,\bar{A}_3 = -9.$

இப்போது $x_{ik} = U_i\,\bar{A}_k$

$k = 3$ என்பதால் $x_{i3} = U_i\,\bar{A}_3$

$$x_{13} = U_1 \bar{A}_3 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = 3.$$

$$x_{23} = U_2 \bar{A}_3 = [0\ 1\ 0\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = 5$$

$$x_{33} = U_3 \bar{A}_3 = [0\ 0\ 1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = 1$$

$$x_{43} = U_4 \bar{A}_3 = [0\ 0\ 0\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = -3.$$

$$x_{53} = U_5 \bar{A}_3 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = -9$$

எனவே இங்கு $x_{i3} = \bar{A}_3$ என்பதைக் காண்கிறோம்.

$x_{ik} > 0$ என்றவாறு, $\frac{x_i}{x_{ik}}$ மதிப்புகளிலிருந்து

$\theta_0 =$ மீச்சிறு $\left\{\frac{x_{i3}}{x_{i3}}\right\}$ ஐக் கண்டு பிடிக்கிறோம்.

$=$ மீச்சிறு $\left\{\frac{15}{3}, \frac{20}{5}, \frac{10}{1}\right\}$

$=$ மீச்சிறு $\left\{5,\ 4,\ 10\right\} = 4 = \frac{x_r}{x_{rk}} = \frac{x_6}{x_{63}}$ ஆகிறது.

∴ தீர்வில் நிரைகுறியீட்டெண்ணுக் கேற்றவாறு, x_6 மாறியை நீக்கி x_3 மாறியைப்புகுத்துகிறோம்.

[$\gamma = 2, k = 3$; இங்கு $\gamma = 2$ என்பது நிறைக்குறியீட்டெண். அதே சமயம் அதற்குச் சரியான மாறியின் குறியீட்டெண் 6 என்பதால் x_6 மாறி விலகுகிறது.]

இரண்டாவது திரும்பச் செய்முறை :

$$x_i' = x_i - \frac{x_r}{z_{rk}} x_{jk}, i \neq k$$

$x_k = \frac{x_r}{x_{rk}}$ என்பதால்

$$x_1' = 15 - \frac{20}{5} \times 3 = x_1 - \frac{20}{5} x_{1k} \quad (k = 3)$$

$$= 3$$

$$x_2' = \frac{x_2}{x_{2k}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x_3' = 10 - \frac{20}{5} \cdot 1 = 6$$

$$x_4' = 0 - \frac{20}{5} \cdot (-3) = 12$$

$$x'_5 = -45 - \frac{20}{5} \cdot (-9) = -9$$

உருமாற்றம் செய்யப்பட்ட பட்டியலில் மூன்ருவது நிரலின் மதிப்புகள்.

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix}$$ ஆகிறது

இப்போது $u'_{ij} = u_{ij} - \frac{a_{rj}}{u_{rk}} x_{ik} \quad i \pm r$

$$u'_{rj} = \frac{u_{rj}}{x_{rk}}$$

$x_{rk} = x_{23} = 5$ என்று முன்பே கண்டோம். அடிப்படை அணியில் 2 ஆவது நிரல் மாற்றப்படுகிறது. புதிய நேர் எதிர் அணியை அடிப்படைத் தளமாகக்கொண்டு U'_2 என்ற உருமாறிய திசையைக் கண்டுபிடிக்கிருேம்.

$$u'_{i2} = u_{i2} - \frac{u_{r2}}{x_{rk}} x_{ik} \;;\; r=2, k=3$$

$$= u_{i2} - \frac{u_{22}}{x_{23}} x_{i2} \;;\; x_{23} = 5 \text{ என்பதால்}$$

$$u'_{12} = u_{12} - \frac{u_{22}}{x_{23}} x_{13}$$

$$= 0 - \frac{1}{5}(3) = -\frac{3}{5}$$

$$u'_{22} = \frac{u_{22}}{u_{23}} = \frac{1}{5}$$

$$u'_{32} = u_{32} - \frac{u_{22}}{x_{23}} x_{33}$$

$$= 0 - \frac{1}{5} \cdot 1 = -\frac{1}{5}$$

$$u_{42}' = u_{42} - \frac{u_{22}}{x_{23}} x_{34}$$

$$= 0 - \frac{1}{5}(-3) = \frac{3}{5}$$

$$u'_{52} = u_{52} - \frac{u_{22}}{x_{23}} \cdot x_{53}$$

$$= 0 - \frac{1}{5}(-9) = \frac{9}{5}$$

புது அடித்தளத் (நேர் எதிர் அணி)தின் புதுத் திசையிலியானது

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

U-ன் மற்ற எல்லா நிரல்களும் மாறுமல் அப்படியே இருக்கும். U-அணியை அமைத்த பின், δ_j ஐக் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

$$= \delta_1 = U_{m+2} \bar{A}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0, & \frac{9}{5}, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{18}{5} - 4 = -\frac{2}{5}$$

$$\delta_2 = \left[0, \ \frac{9}{5}, \ 0, \ 0, \ 1)\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{9}{5} - 5 = -\frac{16}{5}$$

$$\delta_3 = \left[0, \ \frac{9}{5}, \ 0, \ 0, \ 1\right] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{9}{5}(5) - 9 = 0.$$

$$\delta_4 = \left[0, \frac{9}{5} \ 0, 0, 1\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\underset{j}{\text{மீச்சிறு}} \ \delta_j = \delta_2 = U_{m+2} \bar{A}_2 = -\frac{16}{5}$$

எனவே, $\bar{A}_2$ அடித்தளத்தில் நுழைகிறது. $k = 2$.

$$x_{ik} = U_i \bar{A}_k = U_i \bar{A}_2$$

$$x_{12} = U_1 \bar{A}_2$$

$$= \left[1, -\frac{3}{5}, 0, 0, 0\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

$$x_{22} = U_2 \bar{A}_2$$

$$= \left[0 \ \frac{1}{5} \ 0 \ 0 \ 0\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

$$x_{32} = \left[0 - \frac{1}{5} \ 1 \ 0 \ 0\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} + 2 = \frac{9}{5}$$

$$x_{42} = \begin{bmatrix} 0, & \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = -\frac{7}{5}$$

$$x_{52} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{5} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = -\frac{16}{5}$$

எனவே, $x_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{bmatrix}$

இப்போது θ_0-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\theta_0 = \underset{i}{\text{மீச்சிறு}} \left\{ \frac{x_i}{x_{ik}} \right\} = \underset{i}{\text{மீச்சிறு}} \left\{ \frac{x_i}{x_{i_2}} \right\}$$

$$= \text{மீச்சிறு}\left\{\frac{\frac{3}{7}}{5}, \frac{\frac{4}{1}}{5}, \frac{\frac{6}{1}}{5}\right\}$$

$$= \frac{x_5}{x_{52}} = \frac{15}{7} = \theta_0 \text{ என்று அறிகிறோம்.}$$

எனவே, x_5 மாறியை நீக்கி x_2 மாறியை அடித்தளத்தில் சேர்க்கிறோம்.

2. இரண்டாம் பட்டியல் (திரும்பச் செய்முறை)

நிரைக் குறியீட்டெண்	மாறிகளின் குறியீட்டெண்	மாறிகள் மதிப்புகள்	U–அணி				x_{ik}
1	5	3	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$
2	3	4	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
3	7	6	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{9}{5}$
4	8	+12	0	$\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{7}{5}$
5	9	− 9	0	$\frac{9}{5}$	0	0	$-\frac{16}{5}$

$$\delta = \delta_2 = U_{m+2}\,\bar{A}_2 = -\frac{16}{5}$$

$$\theta_0 = \frac{x_5}{x_{52}} = \frac{15}{7}$$

3. மூன்றாம் பட்டியல் (திரும்பச் செய்முறை)

நிரைக் குறியீட்டெண்	மாறிகள் குறியீட்டெண்	மாறிகள் மதிப்புகள்	U–அணி					x_{ik}
1	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	0	0	0
2	3	$\frac{25}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0	0	0
3	7	$\frac{15}{7}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	0	0	1
4	8	$+15$	1	0	0	1	0	11
5	9	$-\frac{15}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	1	-11

$$\delta_k = \delta_4 = U_{m+2}\,\bar{A}_4 = -1.$$

$$\theta_0 = \frac{x_r}{x_{r4}} = \frac{15}{7}$$

மூன்றாவது திரும்பச் செய்முறை

மூன்றாவது திரும்பச் செய்முறையில் x_i^1 மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிக்கிறோம். $k = 2$ என்பதால்

$$x'_1 = \frac{x_1}{x_{12}} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{7}{5}} = \frac{15}{7}.$$

$$x'_2 = x_2 - \frac{x_1}{x_{12}} \cdot x_{22}$$

$$= 4 - \frac{15}{7} \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{25}{7}$$

$$x'_3 = 6 - \frac{15}{7}\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{15}{7}$$

$$x'_4 = 12 - \frac{15}{7}\left(-\frac{7}{5}\right) = 15$$

$$x'_5 = -9 - \frac{15}{7}\left(-\frac{16}{5}\right) = -\frac{15}{7}$$

இந்த x^1 நிரலானது மூன்றும் பட்டியலில் மூன்றும் நிரலில் எழுதப்படுகிறது. இரண்டாம் பட்டியலில் மூன்றும் நிரலையும் கடைசி நிரலையும் கொண்டு இந்த மூன்றும் பட்டியலின் மூன்றும் நிரல் தயாரிக்கப்படுகிறது என்று அறியவும். $\gamma = 1$ என்பதால் நிரல் 1-ல் மாற்றம் செய்து அடித்தளத்தின் புதிய நேர் எதிர் அணியை அமைக்கின்றோம். இங்கு $j = 1, 2$ என்ற நிரல்களில் (மொத்தமாக) மாற்றம் செய்யப்படுகின்றது. இதற்காக, $u^1{}_{ik}$ மதிப்புகளை $j = 1, 2$-க்குக் கீழ்க்கண்டவாறு காண்கிறோம்.

$$j = 1 \quad u'_{i1} = u_{i1} - \frac{u_{r1}}{x_{rk}} x_{ik}\,; \quad r = 1, k = 2$$

$$= u_{i1} - \frac{u_{11}}{x_{12}} x_{i2}$$

$$u'_{11} = \frac{u_{11}}{x_{12}} = \frac{1}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{7}$$

$$u'_{21} = u_{21} - \frac{u_{11}}{x_{12}} \cdot x_{22}$$

$$= 0 - \frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{7}$$

$$u_{31} = 0 - \frac{5}{7}\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{9}{7}$$

$$u'_{41} = 0 - \frac{5}{7}\left(-\frac{7}{5}\right) = 1$$

$$u'_{51} = 0 - \frac{5}{7}\left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{16}{7}$$

இதேபோல் $j = 2$-க்கு

$$u'_{12} = \frac{u_{12}}{x_{12}} = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = -\frac{3}{7}$$

$$u'_{22} = u_{22} - \frac{u_{12}}{x_{12}} \cdot x_{22}.$$

$$= \frac{1}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{7}$$

$$u'_{32} = -\frac{1}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{4}{7}$$

$$u_{42} = \frac{8}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{7}{5}\right) = 0$$

$$u'_{52} = \frac{9}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{3}{7}$$

எனவே புது அடித்தள நேர் எதிர் அணியில் புதிய இரு திசையிலிகளாவன :

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 1 \\ \frac{16}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

U-ன் மற்ற எல்லா நிரல்களும் மாருமல் இருக்கும். U அணியை அமைத்த பின்னர் δ_j ஐக் கணிக்கிரேம்.

$$\delta_j = U_{m+2} \quad \bar{A}_j$$

$$\delta_1 = \left[\frac{16}{7}, \frac{3}{7}, 0, 0, 1\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = -\frac{6}{7}$$

$$\delta_2 = \left[\frac{16}{7}, \frac{3}{7}, 0, 0, 1\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{32}{7} + \frac{3}{7} - 5 = 0$$

$$\delta_3 = \left[\frac{16}{7} \; \frac{3}{7} \; 0, 0, 1\right] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = \frac{48}{7} + \frac{15}{7} - 9 = 0$$

$$\delta_4 = \left[\frac{16}{7}, \frac{3}{7}, 0, 0, 1\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\text{மீச்சிறு}_{j}\ \delta_j = \text{மீச்சிறு} \left[-\frac{6}{7},\ 0,\ 0,\ -1 \right] = -1$$

$$= \delta_4 = U_{m+2}\ \bar{A}_4 = -1.$$

எனவே, $\bar{A}_4$ அடித்தளத்தில் புகுகிறது. $k = 4$

$$x_{ik} = U_i\ \bar{A}_k = U_i\ \bar{A}_4$$

இப்போது மூன்றாவது பட்டியலின் கடைசி நிரல் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$x_{ik} = x_{i4} = U_1\ \bar{A}_4 = \left[\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}, 0, 0, 0 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_{24} = \left[-\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ 0,\ 0,\ 0. \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

$$x_{34} = \left[-\frac{9}{7},\ \frac{4}{7},\ 1,\ 0,\ 0 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

$$x_{44} = [1, 0, 0, 1, 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1.$$

$$x_{54} = \left[\frac{16}{7}, \frac{3}{7}, 0, 0, 1\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$$

இப்போது இந்த x_{ik} மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி $\frac{x_i}{x_{ik}}$ ஐக் கண்டுணர்ந்து θ_0 ஐக் கணிக்கலாம்.

$$\theta_0 = \underset{i}{\text{மீச்சிறு}} \left[\frac{x_i}{x_{ik}}\right] = \text{மீச்சிறு} \left\{\frac{\frac{15}{7}}{0}, \frac{\frac{25}{7}}{0}, \frac{\frac{15}{7}}{1}\right\}$$

$$= \frac{15}{7}$$

$= \frac{x_7}{x_{74}}$ ஆகிறது.

நான்காவது திரும்பச் செய்முறை :

$\gamma = 3, \quad k = 4.$

(i) $x'_i = x_i - \frac{x_r}{x_{rk}} x_{i4} = x_i - \frac{x_3}{x_{34}} x_{i4};$

$$x' = \frac{x_r}{x_{rk}} = \frac{x_3}{x_{34}}$$

$$x'_1 = \frac{15}{7} - \frac{\frac{15}{7}}{1}(0) = \frac{15}{7}$$

$$x'_2 = \frac{25}{7} - \frac{\frac{15}{7}}{1}(0) = \frac{25}{7}$$

$$x'_3 = \frac{x_3}{x_{34}} = \frac{\frac{15}{7}}{1} = \frac{15}{7}$$

$$x'_4 = 15 - \frac{\frac{15}{7}}{1} 1 = \frac{90}{7}$$

$$x'_5 = -\frac{15}{7} - \frac{15}{7}(-1) = 0$$

(ii) $$u'_{ij} = u_{ij} - \frac{u_{rj}}{x_{rk}} x_{ik}$$

$$= u_{ij} - \frac{u_{3j}}{u_{34}} x_{i4}$$

$$j = i$$

$$u'_{i1} = u_{i1} - \frac{u_{31}}{x_{34}} x_{i4}$$

$$u'_{11} = \frac{5}{7} - \frac{-\frac{9}{7}}{1}(0) = \frac{5}{7}$$

$$u'_{21} = -\frac{1}{7} - \left(-\frac{9}{7}\right)(0) = -\frac{1}{7}$$

$$u'_{31} = -\frac{9}{7}$$

$$u'_{41} = 1 - \left(-\frac{9}{7}\right)(1) = \frac{16}{7}$$

$$u'_{51} = \frac{16}{7} - \left(-\frac{9}{7}\right)(-1) = 1$$

எனவே புதிய நேர் எதிர் அணியில் புதிய முதல் நிரல்

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ \frac{16}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$j=2$

$$u'_{i2} = u_{i2} - \frac{u_{32}}{x_{34}} x_{i4}$$

$$u'_{12} = -\frac{3}{7} - \frac{\frac{4}{7}}{1}(0) = -\frac{3}{7}$$

$$u'_{22} = \frac{2}{7} - \frac{4}{7}(0) = \frac{2}{7}$$

$$u'_{32} = \frac{4}{7}$$

$$u'_{42} = 0 - \frac{4}{7}(1) = -\frac{4}{7}$$

$$u'_{52} = \frac{3}{7} - \frac{4}{7}(-1) = 1.$$

எனவே இரண்டாவது புதிய நிரல் $= \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$

$j = 3;$

$$u'_{i3} = u_{i3} - \frac{u_{33}}{x_{34}} x_{i4}$$

$$u'_{13} = 0 - 1\,(0) = 0$$

$$u'_{23} = 0 - 1\,(0) = 0$$

$$u'_{33} = 1$$

$$u'_{43} = 0 - 1\,(1) = -1$$

$$u'_{53} = 0 - 1\,(-1) = 1$$

$$\therefore \text{ மூன்றுவது புதிய நிரல் } = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. நான்காம் பட்டியல் (திரும்பச் செய்முறை)

நிரை குறியீடு எண்	மாறி குறியீடு எண்	மாறி மதிப்பு	U—அணி					x_{ik}
1	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	0	0	$-\frac{1}{7}$
2	3	$\frac{25}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0	0	$\frac{3}{7}$
3	4	$\frac{15}{7}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	0	0	$\frac{6}{7}$
4	8	$\frac{90}{7}$	$\frac{16}{7}$	$-\frac{4}{7}$	-1	1	0	$-\frac{6}{7}$
5	9	0	1	1	1	0	1	0

இங்கு $x_9 = 0$

எனவே $\gamma_k = \gamma_1 = U_{m+1}\,\bar{A}_1 = -\frac{6}{7}$

$$\theta_0 = \frac{x_4}{x_{41}} = \frac{5}{2}$$

$\gamma_j = U_{m+1}\,\bar{A}j$ என்பதால்

$$\gamma_j = \left(\frac{16}{7}, \frac{4}{7}, -1+1, 0\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{16}{7} - \frac{8}{7} - 1 - 1 = -\frac{6}{7}$$

$$\gamma_2 = \left[\frac{16}{7}, -\frac{4}{7}, -1, 1, 0\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\gamma_3 = \left[\frac{16}{7}, -\frac{4}{7}, -1, 1, 0\right] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = 0$$

$$\gamma_4 = \left[\frac{16}{7}, -\frac{4}{7}, -1, 1, 0\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\gamma_k = \underset{j}{\text{மீச்சிறு}}\ \gamma_j = \text{மீச்சிறு}\left[-\frac{6}{7}, 0,0,0 \right] = \gamma_1 = -\frac{6}{7}$$

$k = 1$ என்பதால் $\bar{A}_1$ அடிப்படைத் தளத்தில் சேர்கிறது.

$$\text{இப்போது } \theta_0 = \underset{i}{\text{மீச்சிறு}} \left\{ \frac{x_i}{x_{i1}} \right\}$$

$$= \text{மீச்சிறு} \left[\frac{\frac{25}{7}}{\frac{3}{7}}, \frac{\frac{15}{7}}{\frac{6}{7}} \right]$$

$$= \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = \frac{x_4}{x_{41}}$$

எனவே, x_4 மாறியை நீக்கிவிட்டு x_1 மாறியை அடித்தளத்தில் அமைக்கின்றோம்.

ஐந்தாவது திரும்பச் செய்முறை :

$$\gamma = 3, k = 1$$

(i) $$x'_i = x_i - \frac{x_r}{x_{rk}} x_{ik}$$

$$= x_i - \frac{x_3}{x_{31}} x_{i1}$$

$$x'_3 = \frac{x_3}{x_{31}} = \frac{\frac{15}{7}}{\frac{6}{7}} = \frac{5}{2}$$

$$x'_1 = \frac{15}{7} - \left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{5}{2}$$

$$x'_2 = \frac{25}{7} - \frac{5}{2}\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{5}{2}$$

$$x'_3 = \frac{5}{2}$$

$$x'_4 = \frac{90}{7} - \frac{5}{2}\left(-\frac{6}{7}\right) = 15$$

$$x'_5 = 0 - \frac{5}{2}(0) = 0$$

$$\text{(ii)}\quad u'_{ij} = u_{ij} - \frac{u_{rj}}{x_{rk}}\, x_{ik}$$

மூன்றாம் நிரல் மாற்றப்படுவதால் ஐந்தாம் பட்டியலில் மூன்றாவது புதிய நிரலை முதலில் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

$$j = 3;\ u'_{i3} = u_{i3} - \frac{u_{33}}{x_{31}}\, x_{i1}$$

$$= u_{i3} - \frac{1}{\frac{6}{7}}\, x_{i1}$$

$$u'_{33} = \frac{7}{6}$$

$$u'_{13} = 0 - \frac{7}{6}\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{6}$$

$$u'_{23} = 0 - \frac{7}{6}\left(\frac{3}{7}\right) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$u'_{33} = \frac{7}{6}$$

$$u'_{43} = -1 - \frac{7}{6}\left(-\frac{6}{7}\right) = 0$$

$$u'_{53} = 1 - \frac{7}{6}(0) = 1$$

$$j = 2;\quad u'_{i2} = u_{i2} - \frac{u_{32}}{x_{31}}\, x_{i1}$$

$$u'_{12} = -\frac{3}{7} - \frac{\frac{4}{7}}{\frac{6}{7}}\left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$u'_{22} = \frac{2}{7} - \frac{4}{6}\left(\frac{3}{7}\right) = 0$$

$$u'_{32} = \frac{u_{32}}{x_{31}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$u'_{42} = -\frac{4}{7} - \frac{4}{6}\left(-\frac{6}{7}\right) = 0$$

$$u'_{52} = 1 - \frac{4}{6}(0) = 1$$

$$j = 1;\quad u'_{i1} = u_{i1} - \frac{u_{31}}{x_{31}}\, x_{i1}$$

$$u'_{11} = \frac{5}{7} - \left(\frac{-\frac{9}{7}}{\frac{6}{7}}\right)\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}$$

$$u'_{21} = -\frac{1}{7} - \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{2}$$

$$u'_{31} = -\frac{3}{2}$$

$$u'_{41} = \frac{16}{7} - \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{6}{7}\right) = 1$$

$$u'_{51} = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right)(0) = 1$$

எனவே, புதிய அடித்தள நேர் எதிர் அணியில் புதிய மூன்று திசையிலிகளாவன :

நிரல் 3 நிரல் 2 நிரல் 1

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{6} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

U–அணியை இவ்விதம் அமைத்த பின்னர்

γ_j ஐக் கண்டு பிடிக்கிறோம்.

$\gamma_j = U_{m+1} \bar{A}_j$ என்பதால்

$\gamma_1 = U_{m+1} \bar{A}_1$

$$= [1\ 0\ 0\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 0$$

5. ஐந்தாம் பட்டியல் (திரும்பச் செய்முறை).

நிரை குறியீடு எண்	மாறி குறியீட்டெண்	மாறி மதிப்புகள்	U-அணி					x_{ik}
1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{6}$	$-\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	
2	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{6}$	0	$-\frac{3}{6}$	0	0	
3	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{7}{6}$	0	0	
4	8	+15	1	0	0	1	0	
5	9	0	1	1	1	0	1	

எல்லா $\gamma_j > 0$.

பெரிதும் உகந்த தீர்வு :

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5}{2};\ x_4 = 0.$$

கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்பு : $x_8 = 15$.

$$\gamma_2 = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\gamma_3 = [1\ 0\ 0\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\gamma_4 = [1\ 0\ 0\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

இங்கு எல்லா γ_j மதிப்புகளும் $\geqslant 0$ ஆக உள்ளதால், படிநிலையில் (கட்டம் II-ல்) குறிப்பிட்டது போல, x_{n+m+1} மாறி மீப்பெரு மதிப்பைக் கொண்டுள்ளது; மேலும் இதற்கான அடிப்படைப் பயனெளிவுத்தீர்வு

$x_1 = \dfrac{5}{2}$, $x_2 = \dfrac{5}{2}$, $x_3 = \dfrac{5}{2}$, $x_4 = 0$ என்பது ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வு என்று தீர்மானிக்கிறோம்.

செயற்கை மாறிகள் : இரு கட்ட முறை : திருத்திய சிம்ப்ளக்ஸ் :

ஒரு LP பிரச்சினையில் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையை ஆரம்பிப்பதற்கு, ஓர் ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமைத்தீர்வு நமக்கு அவசியம் தேவைப்படுகிறது. அதாவது ஒரு முற்றொருமை அணி இருந்தால் தீர்வு எளிதாகும். பல சமயங்களில் முற்றொருமை அணி இல்லாமலிருக்கும். சில நிபந்தனைகளுக்கு தளர் மாறி, உபமாறிகளின் சேர்க்கை தேவையில்லாதபோது, இச்சூழ்நிலை ஏற்படுகிறது. அப்போது நிபந்தனைச் சமன்பாடுகளில் m கூடுதல் மாறிகளைச் சேர்க்கிறோம். இந்த செயற்கை மாறிகளைக் கொண்டு அடிப்படைத் தளத்தில் ஒரு முற்றொருமை அணி அமைவதைக் காண்கிறோம். இப்போது, சிப்ப்ளக்ஸ் முறையில் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு

காண்பது எளிதாகிறது. இங்கு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில், அடித் தளத்தை விட்டு ஒரு செயற்கை மாறி வெளியேறினால், அது தனது நோக்கத்தை நிறைவேற்றிவிட்டுச் செல்கிறது. பிறகு நாம் அதை மறுபடியும் சேர்த்துக்கொள்வதில்லை.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை

முதல் முறையைப் போலவே இந்தத் திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்சினையிலும் அடித்தளத்திலிருந்து ஒரு திசையிலி வெளியேறி வேறொன்று நுழைகிறது. எந்தத் திசையிலி வெளியேறவேண்டும் எது சேர்க்கப்பட வேண்டும் என்று தீர்மானம் செய்ய உபயோகிக்கப்படும் கட்டளை விதி இரண்டிலும் ஒன்றேதான். பட்டியலை மாற்றும் முறையில்தான் திருத்தம் உள்ளது என்பதால் இதைத் திருத்தியமைக்கப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை என்கிறோம். முதல் முறையைப்போல ஒவ்வொரு திரும்பச் செய்முறையில் எல்லா உறுப்புகளையும் உருமாற்றம் செய்யாமல் சிலவற்றை மட்டும் உருமாற்றுவதால், இந்த முறை நிறையப் பயன்களைக் கொண்டதாக அமைகிறது.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறைகளுக்கு இரண்டு நிலையான வடிவங்கள் உள்ளன. அதாவது ஆரம்ப முற்றொருமை அணி கிடைப்பதற்காகச் செயற்கைத் திசையிலிகளைக் கூட்டுவது அவசியமா இல்லையா என்பதைப் பொறுத்து இரு வடிவங்கள் வரையறுக்கப்படுகின்றன. தளர் மாறிகள், உபரி மாறிகளைக் கொண்டு முற்றொருமை அணி அமைத்தால், செயற்கைமாறிகள் தேவைப்படாது இத்தகைய சூழ்நிலையை "நிலையான வடிவம் I" என்று அழைக்கிறோம். செயற்கை மாறிகள் தேவைப்பட்டால் அதை "நிலையான வடிவம் II" என்று கூறுகின்றோம்.

நிலையான வடிவம் I-ல் கொள்குறிச் சார்பலனையும் ஒரு நிபந்தனைபோல எடுத்துக்கொள்கிறோம். நிலையான வடிவம் II-ல் செயற்கைத் திசையிலிகளை கையாள இரு கட்ட முறையை உபயோகிக்கிறோம். முதல் கட்டத்தில் செயற்கை மாறிகள் '0' ஆக்கப்படுகின்றன. கட்டம் II-ல் மூல முதற் பிரச்சினைக்கான பெரிதும் உகந்த தீர்வு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. கட்டம் I-ன் கடைசியில் ஏதாவது செயற்கை மாறிகள் 0 நிலையில் அடித் தளத்தில் காணப்பட்டால் இந்த மாறிகள் கட்டம் II-ல் நேர் எண்களாக மாறாதவாறு முக்கியக் கவனம் செலுத்தப்படுகிறது. திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்சில் இம் முறை உபயோகப்படுத்தப்படவில்லை. அதற்குப் பதிலாக, கட்டம் II-ன் ஆரம்பத்தில்

கூடுதலான நிபந்தனைச் சமன்பாடு $\sum_{i=1}^{m+1} x_{n+i} = 0$ சேர்க்கப் படுகிறது.

பயிற்சிகள்

1. "$3x_1 - x_2 - x_3 = 4$

$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7$

எல்லா $x_j > 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளை உடையவாறு, $5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5$ ஐ மீப்பெருமமாக்கு."

இந்தப்பிரச்சினையைத்திருத்தியமைக்கப்பட்ட முறையின் இரு வடிவங்களிலும் தீர்வு காண்.

2. கீழே காணும் பிரச்சினைக்கு திருத்தியமைக்கப்பட்ட, முறைப்படி இரண்டு வடிவங்களிலும் தீர்வு காண்க.

"$5x_1 - 2x_2 < 3$

$x_1 + x_2 > 1$

$-3x_1 + x_2 < 3$

$-3x_1 - 3x_2 < 2$

$x_1 > 0, x_2 > 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்கேற்றவாறு $-x_1 + 2x_2$ஐ மீச்சிறுமமாக்கு."

3. கீழ்க்கண்ட பிரச்சினைக்குத் திருத்தியமைக்கப்பட்டசிம்ப் ளக்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்வு காண் :

"$2x_1 + 5x_2 > 6$

$x_1 + x_2 > 2$

$x_1\ x_2 > 0$ என்றவாறு

$x_1 + 2x_2$ ஐ மீச்சிறுமமாக்கு."

4. $x_1 + 2x_2 < 10$

$x_1 + x_2 < 6$

$x_1 - x_2 < 2$

$x_1 - 2x_2 < 1$

$x_1 > 0$, $x_2 > 0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு திருத்தியமைக்கப்பட்ட சிம்ப்ளகஸ் முறையில் $2x_1 + x_2$ மதிப்பை மீப்பெருமமாக்குக.

5. கீழே காணும் பிரச்சினைக்கு மூல முதலான சிம்ப்ளக்ஸ் வழியிலும், திருத்தியமைக்கப்பட்ட சிற்ப்ளக்ஸ் வழியின் இரு வடிவங்களிலும் தீர்வு காண் :

$$\text{``}x_1 \quad - x_4 - 2x_6 = 5$$

$$x_2 \quad + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3$$

$$x_3 \quad + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5$$

எல்லா $x_j > 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டவாறு $x_1+x_2+x_3$ ஐ மீச்சிறுமமாக்கு.''

3. சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினை
(Transportation Problem)

நேர் கோட்டு அமைப்புத் திட்ட நுட்பங்களில் மிகவும் பயன் வாய்ந்ததும் எளிமையானதுமான செயல்முறைகளில் ஒன்றே சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் வடிவாக்கமும் தீர்வு காணுதலுமேயாகும். இந்த அடிப்படைப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையை முதன்முதலில் ஹிச்காக் என்பவரும் (Hitchcock) பின்னர் விளக்கமான முறையில் கூப்மேன்ஸ் என்பவரும் (Koopmans) விவரித்துள்ளனர். இப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினை ஒரு நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டப் பிரச்சினையேயாகும். இப் பிரச்சினையை நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்ட வடிவில் அமைத்து ஒழுங்கான வகையில் தீர்வுகண்ட பெருமை டாண்ட்சிஸ் என்பவரையே சாரும். சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடுகளின் கோர்வைக்கான தீர்வைக் கண்டறியலாம். இந்த போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண்பதற்கான தனிப்பட்ட வழிமுறையைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

பொதுவான சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினை

ஒரு சமபடித்தான பொருள் (homogeneous product) m துறைமுகத் தோற்றுவாய்கள் (Shipping origins) ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் $a_1, a_2 \ldots a_m$ என்ற அளவுகளில் ஏற்றப்பட்டு, n துறைமுகச் சேரிடங்கள், (துறைமுகப் பயண இலக்குகள்) (shipping destinations) ஒவ்வொன்றிலும் $b_1, b_2 \ldots b_n$ என்ற அளவுகளில் பெறப்படுகிறது எனலாம். i–ஆவது தோற்றுவாயிலிருந்து jஆவது சேரிடம் வரையிலான, பொருளின் ஓர் அலகுக்கான போக்குவரத்துச் செலவு c_{ij} எனக் குறித்தால், எல்லா i, j மதிப்புகளுக்கும் இந்த c_{ij} மதிப்புத் தெரிந்ததாகக் கொள்வோம். இப்போது பிரச்சினையாதெனில். i-லிருந்து j-வரையான எல்லா (i, j) வழித்தடங்கள் வழியாகவும் மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவை மீச்சிறுமப்படுத்துமாறு எந்த அளவு x_{ij} மதிப்புள்ள பொருள்களை ஏற்றுமதி செய்யவேண்டும் எனத் தீர்மானிப்பதேயாகும்.

பிரச்சினையின் கட்டுப்பாடுகளை விளக்குவதற்காக ஒரு பட்டியலைத் தயாரிக்கிறோம்.

	(j) \ (i)	சேரிடங்கள் (1)	(2)	...	(j)	...	(n)	அனுப்புவது
தோற்றுவாய்கள்	(1)	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
	(2)	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	(i)	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	(m)	xm_1	x_{m2}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
பெறுவது		b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	A

i ஆவது தோற்றுவாயிலிருந்து j-வது சேரிடம் அடையுமாறு அனுப்பும் அளவு $= x_{ij}$

i ஆவது தோற்றுவாயிலிருந்து அனுப்பப்பெறும் பொருளின் மொத்த அளவு $= a_i$ இங்கு $a_i \geqslant 0$

j-சேருமிடத்தில் பெறப்படும் பொருளின் மொத்த அளவு b_j என்க.

$$b_j \geqslant = 0.$$

மொத்தம் அனுப்பும் அளவும் மொத்தம் பெறும் அளவும் சரி சமமாக இருக்கும் என்று தற்காலிகமாகக் கட்டுப்பாடு விதிப்போம்.

எனவே, $$\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$$

இப்போது தரப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடுகள்,

$$\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots m \qquad \ldots (1)$$

$$\sum_{j=i}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots n \qquad \ldots (2)$$

$$x_{ij}\text{-க்கள்} > 0 \qquad \ldots (3)$$

என்றால், மொத்தச்செலவு $= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$ ... (4)

மதிப்பை மீச்சிறுமமாக்கக்கூடிய x_{ij} மதிப்புக்களைக் கண்டறிய வேண்டும்.

சமன்பாடுகள் (1) நிரை மொத்தங்களையும், சமன்பாடுகள் (2) நிரல் மொத்தங்களையும் குறிக்கின்றன.

(1)-ம் (2)-ம் நிலைபேறுள்ளவையாக இருப்பதற்கு (constant) (1) சமன்பாடுகளின் கூட்டல் = (2) சமன்பாடுகளின் கூட்டல் (சமமாக இருக்க வேண்டும்).

அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=i}^{m} a_i = \sum_{j=i}^{n} b_j = A$$

எனவே (1) முதல் (4) வகையான சமன்பாடுகளின் (ஒழுங்கு) முறையானது $m+n$ சார்பலன்கள் 'mn' மாறிகளில் குறிக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டமாகக் காணப்படுகிறது.

எனவே, ஒரு சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையை ஒரு நேர் கோட்டு அமைப்புத் திட்டப் பிரச்சினையாக கருதி தீர்வு காண முடியும் என தீர்மானமாக அறிகின்றோம்.

இந்தச் சரக்கேற்றுப்போக்குவரத்துப்பிரச்சினையானது மிகுந்த ஆவலைத் தூண்டுகிறதாகையால் அதனுடைய பொருந்துகிற கணித முறைக்கான சமன்பாடுகளைப்பற்றிச் சில அடிப்படைத் தேற்றங்களை நாம் இங்குப் படிப்போம். (நிரூபணம் சில தேற்றங் களுக்கு எளிதாகையால் தேவையில்லை).

தேற்றம் 1:

ஒரு சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு ஒரு பயனெளிமையான தீர்வு கிடைக்கிறது.

நிருபணம் :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A \text{ என்பதால்}$$

எல்லா (i, j)–க்களுக்கும்,

$$x_{ij} = \frac{a_i \ b_j}{A} \text{ என்ற பயனெளிவுடைய தீர்வு கிடைக்கிறது.}$$

ஒவ்வொரு $x_{ij} < 0$, மேலும் சமன்பாடு (1) சரியாக அமைகிறது.

ஏனெனில்,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i \ b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i$$

இதேபோல,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \ b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j$$

என்பதால் சமன்பாடு 2 (2)-ம் சரியாக அமைகிறது.

எனவே தேற்றம் நிருபணமாகிறது.

$m = 3$, $n = 5$ என்றால், நமக்கு $5+3=8$ சமன்பாடுகளும், $5 \times 3 = 15$ மாறிகளில் கீழ்க்கண்டவாறு கிடைக்கிறது:

(a) $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = a_1$

(b) $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = a_2$

(c) $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = a_3$

(d) $x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$

(e) $x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$

(f) $x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$

(g) $x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4$

(h) $x_{15} + x_{25} + x_{35} = b_5$

சமன்பாடுகள்

$$[(d) + (e) + (f) + (g) + (h)] - [(b) + (c)] = (a)$$

(ஏனெனில், $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = A$ ஆகும்).

அதாவது சமன்பாடு (a) ஒரு கழி மிகைவான சமன்பாடு (redundant equation) ஆகும். எனவே, சமன்பாடு ஒழுங்கிலிருந்து அதை நீக்கி விடலாம்.

$$\left[\sum_{j=i}^{5} b_j = \sum_{i=1}^{3} a_i \text{ என்பதால்} \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{5} b_j - \sum_{i=2}^{3} a_i = a_1 \text{ ஆகிறது. உதாரணமாக} \right]$$

பொது விதி வடிவத்தில் இதைக் கூறினால் (1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளின் ஒழுங்கிலிருந்து ஏதாவது ஒரு சமன்பாட்டை நீக்க முடியும். எனவே, ஒரு போக்குவரத்துப் பிரச்சினையானது mn மாறிகளில் $(m + n - 1)$ சமன்பாடுகளைக் கொண்டதாகக் கொள்ளலாம்.

முன்னே குறிப்பிடப்பட்ட (a) முதல் (h) வரையான சமன்பாடுகளுக்கு, அளவு குறைந்த ஒழுங்கின் (reduced by stem) ஓர் அணியைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots(5)$$

$$\text{மேலும் } P_0 = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

x_{ij} மாறிகளுக்கான திசையிலி P_{ij} ஆகும். mn மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு நிரல் திசையிலியானது $X = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{ij}, \ldots x_{mn})$ என்க. செலவுத் தொகைக் கெழுக்களின் ஒரு நிரைத் திசையிலியானது $C = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{ij}, \ldots, c_{mn})$ என்க.

எனவே, ஓர் அளவு குறைந்த போக்குவரத்துப் பிரச்சினையை

$$\left.\begin{array}{c} AX = P_0 \\ X > O \\ CX \text{ ஐ மீச் சிறுமமாக்குக.} \end{array}\right\} \quad \ldots (6)$$

என்று குறிக்கலாம்.

[குறிப்பு: இங்கு $Z = CX$ என்ற கொள்குறிச் சார்பலன் - செலவுத் தொகைச் சார்பலன் என்பதால், மீச்சிறும மதிப்பைக் காண வேண்டிய அவசியமாகிறது.]

(6)-க்குச் சரியான ஒரு மீச்சிறுமப் பயனெளிவுத் தீர்வுக்கு அதிகபட்சமாக $(m+n-1)$ எண்ணிக்கையுடைய x_{ij} மதிப்புகள் எதிர்மறையற்றதாக இருக்கவேண்டும்.

தேற்றம் 2

ஓர் அடிப்படைப் பயனெளிவுடைய தீர்வின் அமைப்பு:

அதிகபட்ச $(m+n-1)$ எதிர்மறையற்ற x_{ij}-க்களைக் கொண்ட ஒரு தீர்வு அமைகிறது.

இத் தேற்றத்தை விளக்கிக் காட்ட, அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வைக் கண்டுபிடிக்க 'டாண்ட்சிஸ்' விளக்கியுள்ள

வழிமுறையைக் கவனிப்போம். இந்த முறை "வடமேற்கு மூலை விதி" என்று வழங்கப்படுகிறது. (சார்ன்ஸ் & கூப்பர் இவ்வாறு பெயரிட்டனர்).

ஒரு 3×4 அணியைக் கொண்ட பட்டியல் :

$$\begin{array}{cccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & a_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & a_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & a_3 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

வடமேற்கு மூலைக்கான மாறி x_{11}-ன் மதிப்பை இப்போது தீர்மானிப்போம்.

$x_{11} =$ மீச்சிறு (a_1, b_1) என்க.

$a_1 < b_1$ என்றால், $x_{11} = a_1$ ஆகும். மேலும்,

எல்லா $x_{1j} = 0, \quad j = 2,3,4$-க்கும்.

$a_1 > b_1$ என்றால், $x_{11} = b_1$ ஆகும்.

மேலும் எல்லா $x_{i1} = 0 \; i = 2, 3$-க்கும் இங்கு முன்னதையே சரியாகக் கொள்வோம்.

நெறி 1 (Step 1) :

$a_1 < b_1$ என்க.

$$\begin{array}{cccc|c} x_{11} = a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & a_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & a_3 \\ \hline b_1 - a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \end{array}$$

2 ஆவது நிரையின் முதல்மாறி x_{21}-ன் மதிப்பை நாம் அடுத்ததாகத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

$x_{21} =$ மீச்சிறு $(a_2, b_1 - a_1)$ என்க.

இப்போது, $a_2 > b_1 - a_1$ என்றால்,

$$x_{21} = b_1 - a_1, \quad x_{31} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

2ஆவது தோற்று வாயிலிருந்து அனுப்பப்பட வேண்டிய நிகரம் = $a_2 - (b_1 - a_1)$ ஆகிறது.

சேருமிடம் 1-க்குப் போய்ச் சேரவேண்டிய மொத்தம் = 0 இப்பொழுது.

நெறி 2

$a_2 > b_1 - a_1$ என்று கொள்க.

$x_{11} = a_1$	0	0	0	0
$x_{21} = b_1 - a_1$	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$a_2 - (b_1 - a_1)$
0	x_{32}	x_{33}	x_{34}	a_3
0	b_2	b_3	b_4	

இதேபோல, மற்ற கீழ்க்காணும் நெறிகளில் x_{ij} ஒரு மாறியின் மதிப்பைத் தீர்மானித்து i-லிருந்து அனுப்பப்படும் அளவையோ அல்லது j-க்கு அனுப்பப்படும் அளவையோ அல்லது இரண்டையுமோ பூஜ்யத்துக்குக் குறைக்கின்றோம்.

நெறி 3

இங்கு $a_2 - (b_1 - a_1) > b_2$ எனக் கொண்டால் கீழ்க் கண்ட பட்டியல் கிடைக்கிறது.

$x_{11}=a_1$	0	0	0	0
$x_{21}=b_1-a_1$	$x_{22}=b_2$	x_{23}	x_{24}	$a_2-(b_1-a_1)-b_2$
0	0	x_{33}	x_{34}	a_3
0	0	b_3	b_4	

நெறி 4

$a_2 - b_1 + a_1 - b_2 < b_3$ என்க.

$x_{11}=a_1$	0	0	0	0
$x_{21}=b_1-a_1$	$x_{22}=b_2$	$x_{23}=a_2-b_1+a_1-b_2$	0	0
0	0	x_{33}	x_{34}	a_3
0	0	$b_3-a_2+b_1-a_1+b_2$	b_4	

நெறி 4-லிருந்து $x_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$ என்றும் $x_{34} = b_4$ என்றும் காண்கிறோம். a_i, b_j மதிப்புகளின் பலவித சேர்க்கைகளைக் கழித்தோ கூட்டியோ x_{ij}-ன் மதிப்புகள் கிடைக்கப்பட்டன என்பதை நாம் மனத்தில் கொள்ளவேண்டும். எனவே, a_i,b_j மதிப்புகள் எதிர்மறையற்ற எண்களாக முதலில் இருந்தால், அதேபோல மேற்படி முறையை உபயோகித்துக் கணித்த பயனெளிவான தீர்வும் எதிர்மறையற்ற முழு எண்களைக் கொண்டிருக்கும். ஒவ்வொரு x_{ij} ஐயும் தீர்மானிக்கும் வடமேற்கு மூலைவிதிமுறை, ஒரு நிரையையோ அல்லது ஒரு நிரலையோ மேற்கொண்டு சேர்க்கப்படாமல் விலக்கி விடுவதால், கடைசிப்பங்கீடு ஒரு நிரை, ஒரு நிரல் இரண்டையுமே விலக்கிவிடுவதாலும் இந்த பயனெளிவுத் தீர்வு அதிகபட்சம் $(m + n - 1)$ எதிர்மறையற்ற x_{ij}-க்களைக் கொண்டதாக இருக்கும். a_i. b_j மதிப்புகளைச் சார்ந்தவாறு, மேலே கண்ட மாதிரிக்கான பயனெளிவுத் தீர்வைக் காண நாம் கொண்ட அனுமானங்களைச் சார்ந்தும், 6 மாறிகளின் நிகழத்தகும் எதிர்மறையற்ற மதிப்புகளாவன.

$$x_{11} = a_1$$
$$x_{21} = b_1 - a_1$$
$$x_{22} = b_2$$
$$x_{23} = a_2 - b_1 + a_1 - b_2$$
$$x_{33} = b_3 - a_2 + b_1 - a_1 + b_2$$
$$x_{34} = b_{34}$$

இப்போது வடமேற்கு மூலை விதிமுறைமூலம் இரு மாதிரிகளின் அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வுகளைக் கீழே குறித்துக் காட்டியுள்ளது.

மாதிரி 1

2	0	0	0	0	2
1	2	1	0	0	4
0	0	3	2	2	7
3	2	4	2	2	

மாதிரி 2

1	2	0	0	0	3
0	1	3	0	0	4
0	0	0	2	5	7
1	3	3	2	5	

2-ஆவது மாதிரியில் $m + n - 2 = 6$ மாறிகள் x_{ij}-ன் மதிப்புகள் மட்டுமே நேர் எண்களானதால், ஒரு சீர்குலைவான அடிப்படைப் பயனெளிமையுடைய தீர்வு (degenerate basic feasible solution) கிடைக்கிறது. இது எப்படி ஏற்படுகிறது என்றால், $i = m$, $j = n$ என்ற இரு நிலைமைகளைத் தவிர மற்றபடி i-லிருந்து இன்னும் அனுப்பப்படவேண்டிய அளவும், j-க்கு அனுப்பப்படவேண்டிய அளவும், எந்த ஒரு கட்டத்திலும் சரி சமமாக இருக்கும்போது, இத்தகைய சீர்குலைவான அடிப்படை பயனெளிவுத் தீர்வு ஏற்படுகிறது.

இரண்டாவது மாதிரியில்

$x_{23} =$ மீச்சிறு $(a_2 - x_{22}, b_3)$

$=$ மீச்சிறு $(3, 3) = 3$ என்னும் போது இது சரியாகிறது (உண்மையாகிறது).

இத்தகைய ஒவ்வொரு தீர்வைச் சார்ந்தும் $(m + n - 1)$ ஒரு படித்தான சார்பற்ற திசையிலிகளின் தொகுதிகாணப்படுகிறது. மாதிரி 1-ல், எதிர்மறையற்ற x_{ij}-களுக்கான திசையிலிகள் $P_{11}, P_{21}, P_{22}, P_{33}, P_{34}, P_{35}$ என்பனவாகும். இத்திசையிலிகளைக் கொண்ட அடிப்படைத்தளத்தை (Basis) B என வழங்குவோம். எனவே, $BX = P_0$ என்ற ஓர் ஒழுங்கிற்குத் (முறைக்கு) தீர்வு வடமேற்கு மூலை விதியினால் கிடைக்கும் தீர்வே யாகும். இங்கு $X = (x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}, x_{35})$ ஒரு நிரல் திசையிலியாகும். இதைப்போலவே, மாதிரி 2-ன் சீர் குலைவான தீர்விற்கு $(m+n-1)$ ஒரு படித்தான சார்பற்ற திசையிலிகளின் கூட்டுத் தொகுதியை (associated set) தேர்ந் தெடுக்க வேண்டும். இதைப் பின்னர் விளக்குவோம்.

வடமேற்கு மூலை விதியினால் கிடைக்கும் தீர்வுகள் முனைப் புள்ளித் (extreme point) தீர்வுகளாகும். இத்தகைய தீர்வுகளைக் கொண்டுதான் ஒரு மீச்சிறுமப் பயனெளிவுடைய தீர்வைக்கண்டு

பிடிக்க இயலும். போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் எல்லா விதச் செயல் முறைகளும், அனுப்பப்படும் பொருள்களின் எண்ணிக்கை முழு எண்களாக இருக்க வேண்டிய கட்டாயத்தைக் குறிப்பதால் இப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் முக்கிய பண்புகளைக்கீழ்க் கண்டவாறு விளக்கி நிலைநாட்டுவோம்.

தேற்றம் 3

a_i, b_j மதிப்புகள் எதிர்மறையற்ற முழு எண்கள் என்று கொண்டால், ஒவ்வோர் அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வும் (அதவாது மூலைப்புள்ளித் தீர்வும்) முழு எண்களின் மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும். கீழே கண்ட துணைக்கோட்பாடு (lemma) உதவிகொண்டு இத் தேற்றத்தை நிருபிக்கலாம்.

துணைக் கோட்பாடு 1 : ஓர் அளவு குறைந்த போக்குவரத்துப்பிரச்சினைச் சமன்பாடுகளின் ஒழுங்கிற்கான $(m+n-1)$ ஒருபடித்தான சார்பற்ற திசைகளின் ஒவ்வொரு தொகுதியையும் ஒரு முக்கோண அணியாக வரிசைப்படுத்த முடியும். (Every set of $(m+n-1)$ linearly independent vectors of the reduced–transporation–problem system of equations can be arranged into a triangular matrix).

இதை விளக்குவதற்கு, மாதிரி 1-ன் அடித்தளத்தை மாற்றி வரிசைப்படுத்துவோம்.

$BX = P_0$ என்பது மூலமுதலான ஒழுங்கு முறை (original system) என்றால், அதைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்:

$$\begin{array}{c} \\ (a)\\(b)\\(c)\\(d)\\(e)\\(f)\\(g)\end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} P_{11} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{33} & P_{34} & P_{35} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} X \\ \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_{35} \end{bmatrix} \end{array}
= \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

இந்த Bயை மாற்றி வரிசைப்படுத்த, நாம் Bயின் நிரைகளையும், அவற்றைச் சார்ந்த P_0-ன் (உறுப்புகளையும்) மதிப்புகளையும் கீழ்க்காணும் முறையில் பரிமாற்றம் செய்தால்மட்டுமே போதுமானது ஆகும். B-ன் நிரல்களை நாம் மாற்றி வரிசைப் படுத்தாததால், X திசையிலியின் உறுப்புகள் எந்த மாற்றத் துக்கும் உட்படாது எனக் கொள்க.

∴ மாற்றம் செய்யப்பட்ட ஒழுங்குமுறை (transformed system):

$$\begin{array}{c} \\ (c)\\(a)\\(d)\\(e)\\(b)\\(f)\\(g)\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} P_{11} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{33} & P_{34} & P_{35} \end{array}\\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} X \\ \begin{bmatrix} x_{11}\\ x_{21}\\ x_{22}\\ x_{23}\\ x_{33}\\ x_{34}\\ x_{35}\end{bmatrix}\end{array}
=
\begin{array}{c} P_0 \\ \begin{bmatrix} 3\\ 4\\ 2\\ 4\\ 7\\ 2\\ 2\end{bmatrix}\end{array}$$

மேலே காணப்படும் முக்கோண ஒழுங்குமுறையின் மூலம் தீர்மானிக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் முறையிலிருந்து $x_{35} = 2$, என்றும், $x_{34} = 2$ என்றும் உடனே நாம் அறிய வருகின்றோம். இம் மதிப்புகளை (b)-ல் உபயோகித்தால், $x_{33} = 3$ ஆகிறது. இதேபோல் சமன்பாடுகள் (e), (d), (a), (c) இவற்றில் மேற்படி மதிப்புகளை உபயோகித்து ஒவ்வொன்றாகக் கீழ்க்கண்ட மாறி களின் மதிப்புகளைக் கண்டறிகிறோம்:

$x_{23} = 1$

$x_{22} = 2$

$x_{21} = 1$

$x_{11} = 2$ ஆகிறது.

ஓர் அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வுடன் கூடிய அணி ஒரு முக் கோண அணியாக இருப்பதாலும், 1 அல்லது 0 என்ற மதிப்பு களை மட்டுமே கொண்டிருப்பதாலும், இவ்வகையான முக்கோண

அணியின்மூலம் சமன்பாடுகளின் தீர்வைக் காண கூட்டல் களையும் கழித்தல்களையும் மட்டுமே உபயோகிப்பதாலும், மாறி களின் மதிப்புகள் முழு எண்களாக, அதுவும் எதிர் மறையற்ற முழு எண்களாக இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே, தேற்றம் நிரூபணமாகியது.

தேற்றம் 4

ஒரு நிலைத்தான (finite) மீச்சிறுமப் பயனெளிவுத் தீர்வு எப்போதும் கிடைக்கிறது.

நிரூபணம்

தேற்றம் 1-ன் மூலம், பிரச்சினையானது பயனெளிமையானது என்று தெரிய வருகின்றது.

சமன்பாடுகள் (1), (2) இவற்றின் கெழுக்கள் எதிர் மறை யற்றதாக இருப்பதாலும், எல்லா a_i, b_j மதிப்புகளும் எதிர்மறை யற்றதாகவும், நிலைத்ததாகவும் இருப்பதாலும், எந்த ஒரு x_{ij}-ம் விதிக்கட்டின்றி (arbitrartiy) பெரிதாக இருக்க முடியாது. அதுவும் x_{ij} மதிப்பு அதைச் சார்ந்த a_i யையோ, b_j யையோ விடப் பெரிதாக இருக்க முடியவே முடியாது. (எந்த ஒரு பய னெளிவுத்தீர்வுக்கும் ஏதாவது ஒரு x_{ij} யாகிலும் அதைச்சார்ந்த a_i-க்குச் சமமாகவோ அல்லது b_j க்குச் சமமாகவோ இருக்கும் என அறிகிறோம்).

b_i-யும் b_j-யும் முழு எண்களாயிருப்பின், கிடைக்கும் ஓர் அடிப்படை மீச்சிறுமப் பயனெளிவுத் தீர்வும் நிலைத்த முழு எண் மதிப்புக்களையே கொண்டிருக்கும்.

$m\,n$ மாறிகளில் $(m+n-1)$ சமன்பாடுகளைக் கொண்ட ஒரு அளவு குறைந்த ஒழுங்குத் திட்டத்தை ப்பொதுவான ஒரு சிம்ப் ளக்ஸ் முறையினால் தீர்க்க முடியும் என்றாலும், m, n இவற்றின் சிறிய மதிப்புகளுக்கே இத்தகைய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு கைகளினால் கணிக்கும் முறைக்கு (manual computation) ஒவ் வாததாகிறது. கணிப்பான்மூலமாகத்துல்லியமான தீர்வு காண் பதற்குக் கூட, இத் திட்டங்கள் (ஒழுங்கு முறைகள்) மிகவும் பெரிதாக இருக்கும். இந்த இரண்டக நிலையை த் (dilemma) தீர்ப்பதற்கு, போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கான சிம்ப்ளக்ஸ் முறை யில் ஒரு தனிப்பட்ட மாற்று வகையைக் (special adaptation) கையாளுகிறோம். $(m+n-1)$ ஒரு படித்தான சார்பற்ற திசை யிலிகளின் மிகநுட்பமான $(m+n-1)$ எதிர்மறையற்ற மாறிகளின் அறிவுத்திறன் இந்தத் திரும்பச் செய்முறைகளுக்கு அவசியமாகத்

தேவைப்படுகிறது. ஓர் அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வுக்காண மாறிகளின் திசையிலிகள் ஒரு படிச்சார்பற்றவை என அறிகிரேம். இந்த அடிப்படைத் தீர்வு சீர்குலேவற்றதாக இருப்பின் (non–degenerate), அது நமது தீர்வு முறையின் தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்கிறது. மாதிரி 2–ன் தீர்வைப்போன்ற சீர்குலேந்த தீர்வுகளுக்கு இக் கருத்து பொருந்தாது. ஒரு சீர்குலேவான தீர்வில் $k < m + n - 1$ நேர் (positive) மாறிகள் இருந்தால், $m + n - 1 - k$ பூஜ்ய மாறிகளைத் தீர்வில் இருக்குமாறு தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். இந்தப் பூஜ்ய மாறிகளுக்கான $(m+n-1-k)$ திசையிலிகளும், நேர்மாறிகளுக்கான k திசையிலிகளும் ஒரு படிச்சார்பற்றவையாக இருந்தாக வேண்டும். இத் தேர்வு முறையை டாண்ட்சிங் (Dantzig) என்பவர் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கான "$\in$ கலக்கும் முறை ($\in$ Perturbation method) யின்" மூலம் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கியுள்ளார்.

வடமேற்கு மூலேவிதியின்மூலம் ஓர் ஆரம்பப் பயனெளிவுத் தீர்வைக் காண உபயோகப்படுத்திய 3×4 அட்டவணையை எடுத்துக்கொள்வோம். முதல் நெறியில் $x_{21} = b_1 - a_1 = a_2$ என்றல், x_{31}மாறியோ அல்லது x_{22}மாறியோ ஒரு நேர்எண்ணுக (மிகை எண்ணுக) இருக்க முடியாது. அல்லது 2 ஆம் நெறியில், $x_{22} = b_2 = a_2 - b_1 + a_2$ எனில், x_{32} மாறியோ அல்லது x_{23} மாறியோ ஒரு நேர் எண்ணுக இருக்க முடியாது. இத்தகைய சூழ்நிலே எப்போது ஏற்படினும், அடிப்படைத் தேர்வில், நேர் மாறிகளின் எண்ணிக்கையில் ஒன்று குறைவதைக் காண்கிறேம். a_i, b_i–களின் பகுதி மொத்தம் (part al sum) ஏதோ ஒரு a_i அல்லது b_i க்குச் சமமாக இருக்கும் மாறுன சூழ்நிலே ஏற்படுகிறது. மாதிரி 2-ல், ஒரு சீர்குலேவான தீர்வு ஏற்படுகிறது; ஏனெனில்,

$$x_{23} = \text{மீச்சிறு } (b_3, a_2 - b_2 + a_1 - b_1)$$

மேலும், $b_2 = a_2 - b_2 + a_1 - b_1$

$= 3$ ஆகிறது.

இத்தகைய சீர்குலேவுநிலேகளைத் தவிர்ப்பதற்கு, a_i, b_i– க்களின் எந்த ஒருபகுதிமொத்தமும் ஏதோஒரு a_i–க்கோ அல்லது b_j-க்கோ சமமாக இருக்கக் கூடாதவாறு நிச்சயப்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். a_i, b_j மதிப்புகளைக் கலேப்பதன்மூலம் (அல்லது மாற்றியமைப்பதன்மூலம்) இதைச் செய்யலாம்.

இப்போது ஒரு புதியபிரச்சினேயைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைப்போம். ஒரு நேர் மதிப்பான $\in$ எண்ணே ($\in > 0$) எடுத்துக் கொள்க.

$$\bar{a}_i = a_i + \epsilon \qquad i=1,2,\ldots\ldots m$$

$$\bar{b}_j = b_j \qquad j=1,2,\ \ldots\ldots(n-1)$$

மேலும் $\bar{b}_n = b_n + m\epsilon$ என்றவாறு கொள்வோம்.

கடைசித் தீர்வில் காணப்பெறும் a_i, b_j மதிப்புகளை, பொருளுடைய இலக்கங்களுக்குத் திருத்தி, மூல முதலான a_i, b_j மதிப்புகளைப் போன்றே, முழு என்களாகச் சரியான தீர்வு கிடைக்கும் வகையில் 'ϵ' ஐ மிகச் சிறியதாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். கணிக்கக் கூடிய முறையில் கூட்டல்களையும் கழித்தல்களையும் மட்டுமே செய்வதால் இது சாத்தியமாகிறது. a_i, b_j அளவுகளில் கடைசிப் பொருளுடைய இடத்தில் δ என்ற ஒரு எண்ணின் மதிப்பு 1 ஆக இருந்தால், ϵ ஐ $\epsilon < \frac{\delta}{2m}$ என்றவாறு அமைத்துக் கொள்ளலாம் என்று ஆர்டன் (Orden) என்பவர் நிரூபித்துள்ளார். (இங்கு m என்பது m நிரைகளைக் குறிக்கும்). செய்முறைப் பயிற்சியில், $d = \frac{\delta}{2m}$ என்றால், $\epsilon = \frac{1}{10^d}$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

ϵ முறையை இப்போது மாதிரி 2-ல் பயன்படுத்திக் கீழ்க் கண்டவாறு தீர்வு காணலாம்:

1	$2+\epsilon$	0	0	0	$3+\epsilon$
0	$1-\epsilon$	3	2ϵ	0	$4+\epsilon$
0	0	0	$2-2\epsilon$	$5+3\epsilon$	$7+\epsilon$
1	3	3	2	$5+3\epsilon$	

இந்த அடிப்படைத் தீர்வில் இப்போது $x_{24} = 2\epsilon > 0$ என இருக்கிறது. பூஜ்யத்தின் மெய்யான மதிப்புகளைக் கொண்ட இரண்டு மாறிகளில் எதைத் தீர்வுக்குள் கொண்டு வரவேண்டும் என்று ϵ தீர்மானிப்பதைக் காண்கின்றோம். இங்கு x_{24} அல்லது x_{33} மாறியின் தேர்வு நமக்குக் கிடைக்கிறது. இந்த 'ϵ' முறை அத்தகைய ஒரு தேர்வை அழித்து (do away with) ஒழிக்கிறது. மேலும், சீர்குலைவான தீர்வுகள் இல்லாதவாறு கணிப்பு நிகழச் செய்கிறது. தத்துவ ரீதியில், x_{24} அல்லது x_{33} ஏதாவது ஒன்றின் தேர்வு $(m+n-1)$ திசையிலிகளைக் கொண்ட ஓர் அடிப்படைத் தளத்தைக் கொடுக்கிறது. கணிப்பு முறையில்,

பூஜ்ய மாறிகளில் எந்த ஒன்றை அடிப்படைத் தீர்வில் சேர்த்துக் கொள்வது என்று தெரியும் வரை $\in$ முறை பயன்படும். $\in$ முறையினால் கிடைத்த இரண்டில் ஒன்று மாறியைத் தேர்ந்தெடுத்த பின்னர் $\in$ முறையைக் கைவிட்டு விடலாம். பொதுவாக எந்த மாறிக்கு மிகச் சிறிய c_{ij} மதிப்பு உள்ளதோ அந்த மாறியை நாம் சிறந்ததாகத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். எந்த ஒரு போக்குவரத்துப் பிரச்சினையிலும் சுழற்சி (cycling) ஏற்படாது.

போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணும் கணிப்பு முறை

அடிப்படைத் தீர்வின் x_{ij} மாறிகளுக்கு $c_{ij} = u_{ij} + v_j$ என்றவாறான u_i, v_j மதிப்புக்களை, எந்த ஒரு அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்விற்கும் கண்டு பிடிக்கலாம் என்று "டாண்ட்சிஸ்" கண்டு பிடித்துள்ளார். மேலும் அடிப்படைத் தீர்வில் இல்லாத மாறிகளுக்கு $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம். தீர்வில் இல்லாத மாறிகளின் செலவுத்தொகை c_{ij}–விருந்து ஏற்கெனவே கண்டுபிடித்த u_i, v_j மதிப்புகளைக் கழித்து Δ_{ij} கண்டு பிடிக்கப்படுகிறது. தீர்வில் உள்ள மாறிகளுக்கு எல்லாம் $\Delta_{ij}=0$ ஆகும். தீர்வில் இல்லாத மாறிகளுக்கு Δ_{ij}-ன் மதிப்புகள் சில '< 0' ஆகவும் சில '> 0' ஆகவும் இருக்கும். எல்லா Δ_{ij} மதிப்புகளும் '$\geqslant 0$' ஆக இருக்கும் வரை நாம் படிப்படியாகத் தீர்வு கண்டு கொண்டு இருக்கவேண்டும். எல்லா $\Delta_{ij} \geqslant 0$ ஆக இருக்கும் நிலையில் உள்ள தீர்வே மீச்சிறு மொத்தச் செலவைத் தீர்மானிக்கும் ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வாகும்.

எல்லா Δ_{ij}- க்களும் '$\Delta_{ij} \geqslant 0$' ஆகாத போது நாம் ஒரு புது அடிப்படைப்பயனெளிமைத் தீர்வைக் காண்கிறோம். இத்தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு, முந்தைய தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பைவிடக் குறைவாக இருக்கும். 'டாண்ட்சிஸ்' ஸின் புத்தி கூர்மையான இந்தக் கணிப்பு முறை, வழக்கமான சிம்பளக்ஸ் பட்டியல்களை அமைக்காமலும், பெரிதும் உகந்த தன்மையைச் சோதிக்காமலும், அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வுகளைக்காண மிகவும் உதவுகிறது. ஒரு 3×4 மாதிரிப் பிரச்சினைக்கு இந்த முறையில் தீர்வு காணுவோம்.

மாதிரி

மூன்று தோற்றுவாய்களில் கிடைப்பன (இலக்குகள்) (Origins) $a_1=6$, $a_2=8$, $a_3=10$ என்றும், 4 சேருமிடங்களில் தேவையானவை (requirements at destinations)

$b_1 = 4$, $b_2 = 6$, $b_3 = 8$, $b_4 = 6$ என்றும் கொண்டால்,

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 24$$

ஒவ்வொரு தோற்றுவாயிலிருந்தும் ஒவ்வொரு சேருமிடத்துக்கும் பொருள்களைக் கொண்டு செல்ல ஆகும் செலவுகளை கீழ்க் கண்ட செலவு அணியில் குறிப்பிட்டால் எந்த தீர்வு முறை மிகவும் உகந்த தொன்றாகி, மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவை மீச்சிறுமமாக்கும் எனக்கண்டு பிடிப்பது நம் பிரச்சினையாகும்.

சேருமிடங்கள்

தோற்றுவாய்கள்				
1	1	2	3	4
2	4	3	2	0
3	0	2	2	1

$= (c_{ij})$ அணியாகும்.

உதாரணமாக தோற்றுவாய் 2-லிருந்து 3-க்கு ஓர் அலகு பொருளைக்கொண்டு செல்ல ஆகும் செலவு $c_{23} = 2$ ஆகிறது.

பொதுவாக c_{ij}-க்கள் நேர் எண்களாகவோ எதிர் மறை எண்களாகவோ இருக்கலாம். வட மேற்கு மூலை விதியைப் பயன் படுத்தி முதல் பயனெளிவுடைய தீர்வைக் காணலாம்.

$(x_{ij}) =$

4	2			6
	4	4		8
		4	6	10
4	6	8	6	

இங்கு $x_{11} = 4$; $x_{12} = 4$; $x_{22} = 4$; $x_{23} = 4$; $x_{33} = 4$; $x_{34} = 6$. மற்ற எல்லா x_{ij} -க்களும் $= 0$. கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு $= \Sigma\Sigma\, c_{ij}\, x_{ij} = 42$. 43 நிரைகள், நிரல்கள்

கொண்ட இப் பிரச்சினைக்கு $4 + 3 - 1 = (m + n - 1) = 6$ எதிர் மறையற்ற x_{ij} தீர்வுகள் உள்ளன. எனவே, இஃது ஒரு சீர் குலைவற்ற அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வு ஆகும். இந்தத் தீர்விற்கு '$\in$' கலைப்புத் தேவையில்லை.

மோடி முறையில் பெரிதும் உகந்த தீர்வு காணல்

திருத்தப்பட்ட பரவல் முறை (Modified Distribution Method) என்பதைச் சுருக்கி MODI method, மோடி முறை என்று வழங்கு கிறோம். இதன் விளக்கம் பின்னுல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இம் முறையின் மூலம் அடிப்படைத் தீர்விலிருந்து ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண முடியும் (திரும்பச் செய் வழியின் மூலம்).

அடுத்த படியாக அடிப்படைத் தீர்வில் உள்ள மாறிகளுக்கு m எண்ணிக்கையுள்ள u_i மதிப்புகளையும், n எண்ணிக்கையுள்ள v_j மதிப்புகளையும்

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= c_{11} = 1 \\ u_1 + v_2 &= c_{12} = 2 \\ u_2 + v_2 &= c_{22} = 3 \\ u_2 + v_3 &= c_{23} = 2 \\ u_3 + v_3 &= c_{33} = 2 \\ u_3 + v_4 &= c_{34} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

என்ற சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கலாம். $m+n-1=6$ சமன்பாடுகளில் 7 மாறிகள் உள்ளன. விதிக் கட்டின்றி ஏதாவது ஒரு மாறியை அதைச் சார்ந்த c_{ij}-க்குச் சமன்படுத்தி, ஒரு தீர்வு காணலாம். உதாரணமாக $u_1 = c_{11} = 1$ என்றுல், $v_1 = 0$ என்ருகிறது. எனவே 6 மாறிகளில் 6 சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வை எளிதில் காணலாம்.

இங்கு $u_1 = 1$ என்றுல், $v_1 = 0$ ஆகும். (1) ஐப் பயன் படுத்தி $v_2 = 1$; $u_2 = 2$; $v_3 = 3$; $u_3 = 2$; $v_4 = -1$ எனக் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

பொதுவாக அடிப்படைத் தீர்வில் உள்ள மாறிகளுக்கான கூறுகளின் செலவுத் தொகைகளை (தடித்த தோற்றத்தில் பட்டிய) விட்டு அப்பட்டியல் மூலம் u_i, v_j மதிப்புகள் கண்டு அறியலாம்.

"அடிப்படைக் கூறுகளின் செலவுத் தொகைகள்"

u \ v				
	1	2		
		3	2	
			2	1

முதலில் $u_1 = 1$ என்றும், $v_1 = 0$ என்றும் எழுதி, மற்ற u_i, v_j மதிப்புகளைக் கணித்து கீழ்க் கண்டவாறு எழுதவும்:

u \ v	0	1	0	−1
	1	2		
2		3	2	
2			2	1

இப்போது $\bar{C}_{ij} = u_i + v_j$ மதிப்புகளை (எல்லா (i, j) சேர்க்கைகளுக்கும் கண்டுபிடித்து இந்த $\bar{C}_{ij}$ மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி $\Delta_{ij} = c_{ij}$ மதிப்புகளை அடிப்படைத் தீர்வற்ற கூறுகளுக்குக் கணிக்கலாம். இங்கு எல்லா x_{ij} தீர்வுகளிலும் $\bar{C}_{ij} = \bar{C}_{ij}$ ஆக உள்ளது. $\bar{C}_{ij}$–க்களை மறைமுகச் செலவு (indirect table) எனக் கூறலாம்.

இந்த இட ஒதுக்கீடு (தீர்வு) களையும் மறைமுகச் செலவுகளையும் ஒருங்கே சேர்த்த முறையில் பின்வருமாறு அட்டவணையிட்டுக் காட்டலாம்.

இட ஒதுக்கீடு, மறைமுகச் செலவு இரண்டும் ஒருங்கிணைந்த **3×4** பிரச்சினைப் பட்டியல்.

$v_i \backslash v_j$	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	c_{11} (x_{11})	c_{12} (x_{12})	c_{13} Δ_{ij} $-\bar{c}_{13}+c_{13}$	c_{14} Δ $\bar{c}_{14}+c_{14}$	a_1
u_2	c_{21} $-\bar{c}_{21}+c_{21}$	c_{22} (x_{22})	c_{23} (x_{23})	c_{24} $-\bar{c}_{24}+c_{24}$	a_2
u_3	c_{31} $-\bar{c}_{31}+c_{31}$	c_{32} $-\bar{c}_{32}+c_{32}$	c_{33} (x_{33})	c_{34} (x_{34})	a_3
	b_1	b_2	b_3	b_4	A

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \bar{c}_{ij}$$

இப்போது எல்லா $C_{ij}-\bar{C}_{ij} \geqslant 0$ என்றால், ஒருமீச்சிறுமப்பயனெளிவுடைய தீர்வு கிடைக்கும். குறைந்தபட்சமாக ஒரு $C_{ij}-\bar{C}_{ij}<0$ என்றால் கூட, ஒரு மீச்சிறுமத்தீர்வு கிடைக்கவில்லை என அர்த்தமாகிறது. இச்சமயத்தில் நாம் எந்த ஒரு கூறுக்கு $C_{ij}-\bar{C}_{ij}<0$ அடைகிறதோ அந்தக் கூறில் உள்ள மாறியைச் சேர்ந்த தொரு புதிய அடிப்படைப் பயனெளிமைத் தீர்வைக்கண்டு பிடிக்கலாம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட $C_{ij}-\bar{C}_{ij}<0$ என்றால், பொதுவான சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் கண்டறிந்தது போல, மீச்சிறு $(C_{ij}-\bar{C}_{ij}<0)$ மதிப்பைஎடுத்துஅம்மதிப்பிற்கானகூறின் மாறியைப்புதுத்தீர்வில் காணலாம். இம் முறையினால் கிடைத்த புது அடிப்படைத் தீர்வைக் கொண்டு கணித்த கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு, முந்தியதை விடக் குறைவாக இருக்கும். (முந்தைய தீர்வு சீர்குலைவாக இருந்தால், இரண்டு சார்பலன்களின் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும்).

இங்கு நம் மாதிரிப் பிரச்சினையில் மீச்சிறு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij}) = C_{31} - \bar{C}_{31} = -2$ என்பதால் x_{31} மாறியை தீர்வுக்குள் உட்புகுத்த நாம் முடிவு செய்கிறோம். ஒத்தனவைகளாக இருந்தால் (if there were ties) குறைந்த C_{ij} மதிப்பையுடைய x_{ij} ஐத் தேர்ந்தெடுக்க முடியும். முந்தியத் தீர்வு அணி $[x_{ij}]$ஐக் கொண்டு

x_{31} மாறியை, ஒரு முன் தெரியாத எதிர்மறையற்ற θ_1 அளவில், தீர்வுக்குள் புகுத்துகின்றோம். நிரை, நிரல் மாறிகளின் மொத்தங்கள் அவற்றைச் சார்ந்த a_i, b_j மதிப்புகளுக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டுமாதலால், முதல் தீர்வில் உள்ள மற்ற x_{ij}க்களில் சிலவற்றிலிருந்து θ_1 ஐக் கீழ்க்கண்ட முறையில் கூட்டவோ கழிக்கவோ செய்தல் வேண்டும்.

$4-\theta_1$	$2+\theta_1$			6
	$4-\theta_1$	$4+\theta_1$		8
θ_1		$4-\theta_1$	6	10
4	6	8	6	

(3, 1) கூறில் $\theta > 0$ என்ற மதிப்பைப் போடுவதால், x_{11}, x_{22} x_{33} மதிப்புகளிலிருந்து θ_1 ஐக் கழிக்க வேண்டும். x_{12}, x_{23}-க்கு θஐக் கூட்டவேண்டும். இப்படிச் செய்வதால் நிரை, நிரல் மொத்தங்கள் முன்போலவே இருக்கிறதைக் காண்கிறோம். θ_1 செல்லும்பாதை ஒரு சுழல் மடி வளைவாக (loop) அமைந்துள்ளது என்று கோடிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. எந்த x_{ij} களிலிருந்து நாம் θ_1 ஐக் கழிக்கிறோமோ அந்த மதிப்புகளால் θ_1-ன் மதிப்பு கட்டுப்பட்டுள்ளது. இத்தகைய x_{ij} க்களில் மிகச்சிறிய மதிப்பை விட அதிகமாக θ_1 இருக்க முடியாது. இங்கு $\theta_1 < 4$ என்றும், $\theta_1 > 0$ என்றும் பயனெளிமையைத் தக்க வைத்துக் கொள்ளுமாறு உள்ளது. பழைய தீர்விலிருந்து ஒரு மாறியை நீக்கிவிட்டு x_{31} மாறியை உட்புகுத்த வேண்டியிருப்பதால், $\theta_1 = 4$ எனலாம்.

இங்கு $x_{11} - \theta_1 = x_{22} - \theta_1 = x_{33} - \theta_1 = 4 - \theta_1$ என்பதால் $\theta_1 = 4$ என்று போடுவதால் x_{11}, x_{22}, x_{33} மூன்று இடங்களும் பூஜ்யமாகிறது. எனவே, 3 மாறிகளையும் நீக்கி x_{31} ஐப்புகுத்தினல் நமக்கு நேர்மாறிகளை மட்டுமே கொண்ட ஒரு சீர்குலைவான தீர்வு கிடைக்கிறது.

தீர்வில் மிக நுட்பமாக $m+n-1$ எதிர்மறையற்ற மாறிகளைக் கொண்டதொரு தீர்விற்காக, நாம் மேற்படி மூன்று மாறிகளில் ஏதேனும் இரண்டைப் பூஜ்ய மதிப்புகளுடன் நமது தீர்வில் தக்கவைத்துக்கொள்கிறோம். மிகச் சிறிய C_{ij} மதிப்புகளுக்காக

x_{11}, x_{33}ஐத் தேர்ந்தெடுக்கின்றோம். புதிய தீர்வை கீழே காணலாம்.

$[x_{ij}]=$

0	6			6
		8		8
4		0	6	10
4	6	8	6	

இத் தீர்விற்கான கொள்குறிச் சார்பலன்

$$= 42 + [\min (C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0)]\, \theta_1$$

$$= 42 - (2)(4) = 34$$

இத் தீர்விற்கான (u_i, v_j) அட்டவணை, $\bar{C}_{ij}$ அணி இரண்டும் ஒருங்கிணைந்து கீழ்க்கண்ட பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது.

u \ v	0	1	2	1
1	1	2	3	2
0	0	1	2	1
0	0	1	2	1

அடிப்படைத் திசைகளுக்கான C_{ij} மதிப்புகளைத் தடித்த தோற்றத்தில் மேலே காட்டியுள்ளது.

மீச்சிறு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0) = C_{24} - \bar{C}_{24} = -1$

எனவே, (2,4) கூறில் $\theta_2 > 0$ என்று குறித்தால், x_{ij}-க்களி லிருந்து θ_2 மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு கூட்டியோ கழித்தோ செய்யலாம்.

0	6			6
		$8-\theta_2$	θ_2	8
4		$0+\theta_2$	$6-\theta_2$	10
4	6	8	6	

$\theta_2 = 6$ எனக் காண்கிறோம். x_{34} நீக்கப்பட்டு $\theta_2 = 6$ மதிப்புடன் x_{24} தீர்வில் இடம் பெறுகிறது.

θ_2 செல்லும் பாதை சுழல் மடி வளைவில் இருக்கவேண்டும். அப்படி இருப்பதைப் பட்டியலில் கோடிட்டுக் காட்டியுள்ளது.

கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு

$$= 34 + (C_{24} - \bar{C}_{24})\,\theta_2 = 34 - (1)\,(6) = 28.$$

புதிய தீர்வானது:

$(x_{ij}) =$

0	6			6
		2	6	8
4		6		10
4	6	8	6	

இதைச் சார்ந்த (u_i, v_j) அட்டவணையும் $(\bar{C}_{ij})$ அணியும் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$(\bar{C}_{ij}) =$

u \ v	0	1	2	0
1	1	2	3	1
0	0	1	2	0
0	0	1	2	0

இங்கு எல்லா $C_{ij} - \bar{C}_{ij} > 0$ ஆகவுள்ளன. மேலும், இந்தக் கடைசித்தீர்வு ($x_{11} = 0$. $x_{12} = 6$, $x_{23} = 2$, $x_{24} = 6$, $x_{31} = 4$, $x_{33} = 6$, மற்ற எல்லா $x_{ij} = 0$) ஒரு சீர் குலைவான மீச்சிறும பயனெளிவுத் தீர்வாக உள்ளது. கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு $= 28$.

$C_{13} - \bar{C}_{13} = 0$ என்றும் x_{13}-ன் மதிப்பு தீர்வில் காணப்படவில்லை என்றும் நாம் காண்கிறோம். எனவே, இந்தக் கடைசி தீர்வினுள் x_{13}ஐ உட்புகுத்தினல் வேறொரு மீச்சிறுமத் தீர்வை அடையலாம்.

(1,3) கூறில் $\theta_3 > 0$ என்பதைப் புகுத்தினல் கிடைப்பது :

$x_{ij} =$

$0-\theta_3$	6	θ_3		6
		2	6	8
$4+\theta_3$		$6-\theta_3$		10
4	6	8	6	

$x_{13} = \theta_3 = 0$ என்பதால், ஒரு புதிய சீர் குலைவான அடிப்படை மீச்சிறுமத் தீர்வு கிடைக்கிறது :

$x_{ij} =$

	6	0		6
		2	6	8
4		6		10
4	6	8	6	

கொள் குறிச்சார்பலன் மதிப்பு $=28$. இம் மதிப்பு முன்பு கண்ட மதிப்பையே கொண்டிருப்பதற்குக் காரணம் $\theta_3 = 0$ என்பதால், தீர்வில் மற்ற மாறிகளின் மதிப்பு மாருமல் உள்ளதாகும். செலவு அணியில் ஒரு நிரை அல்லது நிரலின் ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் ஒரு மாறிலியை, பெரிதும் உகந்த இட ஒதுக்கீட்டை மாற்ருத வாறு, கூட்டவோ கழிக்கவோ செய்யலாம் என்பதால் மூல

முதலான செலவுப் பட்டியலின் சார்ந்த நிரைகள் அல்லது நிரல்களிலிருந்து u_i, v_j மதிப்புகளின் கடைசித் தொகுதி கழிக்கப்படுகின்றது. இதனால் செலவுப்பட்டியலின் வடிவம்,

$c_{ij} - u_i - v_j = c_{ij} - \bar{C}_{ij} \geq 0$ என்றவாறு ஆகிறது.

இந்த உருமாற்றப்பட்ட செலவுப் பட்டியலை நமது போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு உபயோகப்படுத்தும் போது பூஜ்யச் செலவுகளைக் கொண்ட வழித்தடங்களுக்கு மட்டுமே பொருள்களை ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்ட ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண முடிகிறது. சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் மேற்படி மாறுபாடுகளுடன் தீர்மானிக்கப்பட்ட கடைசி ஒதுக்கீட்டில் ஏற்படும் நிலையையே இது குறிக்கிறது. எனவே, இத் தீர்வு ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வாகிறது. இந்த வகையில் மோடி முறை விளக்கப்படுகிறது.

மாதிரி 2 :

கீழ்க்கண்ட போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணலாம்.

3 தொழிலகங்களிலிருந்து 5 ஊர்களுக்கு ஒரு பொருள் மாறுபட்ட அளவுகளில் அனுப்பப்படுகிறது. தொழிலகங்களின் உற்பத்திக் கொள்ளவுகளும், ஊர்களில் தேவைப்படும் அளவுகளும் தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு தொழிலகத்திலிருந்தும் ஒவ்வொரு ஊருக்கும் சரக்குகளை ஏற்றி அனுப்ப ஆகும். ஓர் அலகுப் பொருளின் செலவுத்தொகைகளைச் செலவுஅணி மூலமாகக்காட்டியுள்ளது. மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவை மீச்சிறுமப் படுத்தும் பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வைக் கண்டுபிடித்து எந்த ஊர்களுக்கு எவ்வளவு அனுப்ப வேண்டும் என்று விளக்கிடுக.

செலவு அணி
(ஊர்கள்)

		1	2	3	4	5	
	1	10	15	20	20	40	50
தொழிலகம்	2	20	40	15	30	30	100
	3	30	35	40	55	25	150
		25	115	60	30	70	300

வடமேற்கு மூலை விதியைப் பயன்படுத்தி ஓர் ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வைக் காணலாம்.

$[x_{ij}] =$

25	25			•	50
	90	10			100
		50	30	70	150
25	115	60	30	70	

$m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ மாறிகள் தீர்வில் இருப்பதால் இத் தீர்வு சீர்குலைவற்ற ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வாகும்.

இத் தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்பு

$$z_1 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij}\ x_{ij}$$

$$= 25(10) + 25(15) + 90(40) + 10(15)$$
$$+ 50(40) + 30(55) + 70(25) = \mathbf{9775} \text{ ரூ.}$$

இத் தீர்விற்கான (u_i, v_j) அட்டவணை, $\bar{C}_{ij}$ அணி இரண்டும் ஒருங்கே இணைந்த பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

u_i \ v_j	0	5	−20	−5	−35
10	**10**	**15**	−10	5	−25
35	35	**40**	**15**	30	0
60	60	65	**40**	**55**	**25**

அடிப்படைத் திசையிலிகளின் c_{ij} மதிப்புகள் தடித்த மதிப்பில் தரப்பட்டுள்ளன.

$v_1 = 0$ என்க. இதை வைத்துக் கொண்டு எல்லா u_i, v_j மதிப்புகளையும் கண்டு பிடிக்கலாம்.

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 10$$
$$u_1 + v_2 = c_{12} = 15$$
$$u_2 + v_2 = c_{22} = 40$$
$$u_2 + v_3 = c_{23} = 15$$
$$u_3 + v_3 = c_{33} = 40$$
$$u_3 + v_4 = c_{34} = 55$$
$$u_3 + v_5 = c_{35} = 25$$

$v_1 = 0$ எனில், $u_1 = 10$; $v_2 = 5$; $u_2 = 35$; $v_3 = -20$; $u_3 = 60$; $v_4 = -5$; $v_5 = -35$.

$$\therefore \quad u_1 = 10;\ u_2 = 35;\ u_3 = 60$$
$$v_1 = 0;\ v_2 = 5;\ v_3 = -20;\ v_4 = -5;\ v_5 = -35.$$

இப்போது இந்த u_i, v_j மதிப்புகளின் உதவியால் அடிப்படைத் தீர்வில்லாத x_{ij} மாறிகளுக்கு $\bar{C}_{ij} = u_i + v_j$ மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப் பட்டு மேல் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது.
இப்போது,

$$c_{13} - \bar{C}_{13} = 20 + 10 = 30$$
$$c_{14} - \bar{C}_{14} = 20 - 5 = 15$$
$$c_{15} - \bar{C}_{15} = 40 + 25 = 65$$
$$c_{21} - \bar{C}_{21} = 20 - 35 = -15$$
$$c_{24} - \bar{C}_{24} = 30 - 30 = 0$$
$$c_{25} - \bar{C}_{25} = 30 - 0 = 30$$
$$c_{31} - \bar{C}_{31} = 30 - 60 = -30$$
$$c_{32} - \bar{C}_{32} = 35 - 65 = -30.$$

எனவே மீச்சிறு $(c_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0)$ = மீச்சிறு $(-15, -30, -30)$
$= -30.$

இங்கு $(3, 1)$, $(3, 2)$ என்ற இரு ஒத்தனவான கூறுகளில் $\Delta_{ij} = c_{ij} - \bar{C}_{ij} = -30$ என்பதால், எங்குச் செலவுத் தொகை மிகக் குறைவாக உள்ளதோ அந்தக் கூறு மாறியை எடுத்து கொள்ளவேண்டும்.

இங்கு $c_{31} = 30, c_{32} = 35$.

எனவே, x_{31} மாறியை எடுத்து, (3,1) கூறில் $\theta_1 > 0$ எனக் குறித்தால், x_{ij} க்களிலிருந்து θ_1-ன் மதிப்பைக் கூட்டியோ கழித்து பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$25-\theta_1$	$25+\theta_1$				50
	$90-\theta_1$	$10+\theta_1$			100
θ_1		$50-\theta_1$	30	70	150
25	115	60	30	70	

$\theta_1 = 25$ என்று காண்கிறோம். இதனால் x_{11} நீக்கப்பட்டு $\theta_1 = 25$ மதிப்புடன் x_{31} தீர்வில் இடம் பெறுகிறது. θ_1 செல்லும் பாதை சுழல் மடி வளைவாக, (loop) பட்டியலில் மேலே கோடிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

புதிய தீர்வு :

$[x_{ij}] =$

	50				50
	65	35			100
25		25	30	70	150
25	115	60	30	70	

சுழல் மடி வளைவு (loop) என்பதை இப்போது இங்கு விளக்குவோம்.

$((a_{ij}))$ என்ற ஓர் அணியை (மேலே கண்ட அணியை) எடுத்துக் கொண்டால், a_{31}-ல் θ என்ற புது மதிப்பு எழுதப்படு

கிறது. இந்த அணியில் ஓரங்களில் (margins) வலது கோடி ஓரங்களிலும் கீழ் ஓரங்களிலும் காணப்படும் மொத்தமதிப்பு மாருத வண்ணம் அணியினுள்ளே θ–ன் மதிப்பிற்கேற்றவாறு மதிப்புகள் மாற்றப்படுகின்றன. எவ்வாறு என்ருல் θ-விருந்து மேலும் கீழு மாகப் பார்த்து எங்கு மதிப்பு உள்ளதோ அங்கு θ ஐக் கழித்தும், பிறகு அங்கிருந்து வலமாகப்(இடமுமாக) பார்த்துப்எங்கு மதிப்பு உள்ளதோ அங்கு θ ஐக் கூட்டி பிறகு அங்கிருந்து (மேலே) கீழே பார்த்து எங்கு மதிப்பு உள்ளதோ அங்கு θ ஐக் கழித்துப் பிறகு வலம் பார்த்து மதிப்புளள் இடத்தில் θ ஐக் கூட்டிப் பிறகு கீழே மதிப்புள்ள இடத்தில் θ ஐக் கழித்து இடப்பக்கத்தில் "θ" ஆரம் பித்த இடத்தில் கொண்டு வந்து முடிக்கப்பட வேண்டும். இதற்குப் பெயர் சுழல் மடி வளைவாகும். இப்படி θஐக் கூட்டும் திரவில் ஏதாவது ஓரிடத்தில் (மதிப்புள்ள இடத்தில்) θ கழிக்கப் படுவதால், ஓரங்களிலுள்ள மொத்த மதிப்பு பாதிக்கப்படாமல் அப்படியே இருக்கும். இதே போலச்செய்து அதன் பாதையை அம்புக் குறியிட்டு ஒரு தொடர்ச்சியான பாதையிணை அமைத் தால் அதற்குப் பெயர்தான் "சுழல்மடி வளைவு" (loop) என்பதாகும்.

இங்கும் $m+n-1=3+5-1=7$ மதிப்புகள் உள்ளதால் புதிய தீர்வு சீர்குலைவற்ற பயனெளிவுத் தீர்வாகும்.

இத்தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு

$$Z_2 = 9775 + [\text{மீச்சிறு } (C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0]) \times \theta$$
$$= 9775 - 30\ (25) = 9775 - 750 = 9025 \text{ ரு.}$$

$Z_2 < Z_1$ என்று கவனிக்கவும்.

இந்தத் தீர்வைச் சார்ந்த (v_i, v_j) அட்டவணையும், $(\bar{C}_{ij}$ அணியும் தரப்பட்டுள்ளன.

u_i \ v_j	0	35	10	25	−5
−20	−20	15	−10	5	−25
5	5	40	15	30	0
30	30	65	40	55	25

அட்டவணைக்குள் காணப் பெறும் தடித்த மதிப்புகள் அடிப் படைத் திசையிலிகளின் மாறி மதிப்புகள். மற்ற மதிப்புகள் $\bar{C}_{ij}$ ஆகும்.

அடிப்படைத் தீர்வில் இல்லாத x_{ij} மாறிகளின் $\bar{C}_{ij}$ மதிப்பை உபயோகித்து Δ_{ij} காணலாம்.

$$C_{11} - \bar{C}_{11} = 10 + 20 = 30$$
$$C_{13} - \bar{C}_{13} = 20 + 10 = 30$$
$$C_{14} - \bar{C}_{14} = 20 - 5 = 15$$
$$C_{15} - \bar{C}_{15} = 40 + 25 = 65$$
$$C_{21} - \bar{C}_{21} = 20 - 5 = 15$$
$$C_{24} - \bar{C}_{24} = 30 - 30 = 0$$
$$C_{25} - \bar{C}_{25} = 30 - 0 = 30$$
$$C_{32} - \bar{C}_{32} = 35 - 65 = 30$$

மீச்சிறு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0)$ = மீச்சிறு $(-30) = -30$. ஒரே ஒரு மதிப்புதான் எதிர்மறையாக உள்ளது. $C_{32} - \bar{C}_{32} = -30$ என்பதால் (3,2) கூறில் $\theta_2 > 0$ எனக் குறித்து x_{ij} மதிப்புகளி லிருந்து θ_2-ன் மதிப்பைக் கூட்டியோ கழித்தோ பின்வருமாறு எழுதலாம்:

	50				50
	$65-\theta_2$	$35+\theta_2$			100
25	θ_2	$25-\theta_2$	30	70	150
25	115	60	30	70	

$\theta_2 = 25$ என அறிகிறோம்;

θ_2-ன் பாதை ஒரு சுழல்மடி வளைவாகிறது எனக் கவனி.

புதிய தீர்வு :

	50				50
	40	60			100
25	25		30	70	150
25	115	60	30	70	

இங்கு $m + n - 1 = 7$ மதிப்புகள் தீர்வில் உள்ளதால், இது ஒரு சீர்குலைவற்ற பயனெளிமைத் தீர்வாகிறது. இத் தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு

$$Z_3 = 9025 + [\text{மீச்சிறு.} \ (C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0)\ ] \times \theta$$
$$= 9025 + (-30)\ (25)$$
$$= 9025 - 750 = 8275 \text{ ரூ.}$$

$\therefore \quad Z_3 < Z_2$ ஆகும்.

இத் தீர்வு இன்னும் பெரிதும் உகந்ததான தீர்வல்ல; ஏனெனில், [மீச்சிறு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij} > 0)$] எல்லா i, j-க்களுக்கும் என்ற நிலையில்தான் அத்தகைய உகந்த தீர்வு கிடைக்கும். எனவே, இனியும் திரும்பச் செய்முறையில் (v_i, v_j) அட்டவணையும் $(\bar{C}_{ij})$ அணியும் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

தீர்வுகள் கண்ட கூறுகளில் மட்டும் செலவுத் தொகையைத் தடித்த வடிவில் எழுதி u_i, v_j-க்களைக் காணலாம். மற்ற கூறுகளில் u_i, v_j ஐக் கொண்டு $\bar{C}_{ij}$ மதிப்புகளை எழுதிவிடலாம். இங்கு $C_{ij} - \bar{C}_{ij}$ மதிப்புகளை அடிப்படைத் தீர்வில் இல்லாத மாறிகளுக்குக் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

இம்மதிப்புக்களிலிருந்து மீச்சிறு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0)$ மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து அந்த $(i.j)$ கூறில் θ_3 எழுதி, சுழல்மடி வளைவில் (loop), θ_3-ன் பாதையை வகுத்தமைத்துத் புதிய தீர்வு கண்டுபிடிக்கிறோம். இத்தகைய எல்லா முறைகளையும் ஒரே பட்டியலில் சுருக்கமாகக் கொடுக்கலாம். இத்தகைய பட்டியல் மிகவும் குழப்பத்தைத் தருவதால்தான் இதுவரை இப் பட்டியலை நாம் உபயோகிக்காமல் பல பட்டியல்கள்மூலம் விளக்கி வந்தோம் என்று அறியவும்.

ஒருங்கிணைந்த பட்டியல். (மொத்த பட்டியல்).

$u_i \backslash v_j$	0	5	−20	25	−5	
10	[10] 10	[15] (50)	[20] −10	[20] 35 [−15]	[40] 5	50
35	[20] 35 [−15]	[40] (40) 40−θ3	[15] (60)	[30] 60 [−30]	[30] 30	100
30	[30] (25)	[35] (25) 25+θ3	[40] 10	[55] (30) 30−θ3	[25] (70)	150
	25	115	60	30	70	300

குறிப்புகள் :

1. ஒவ்வொரு கூறிலும் வடமேற்கு மூலையில் □ கட்டத்தில் செலவுத்தொகைகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

2. முந்தைய நிலையில் தீர்வு கண்ட கூறுகளிலுள்ள x_{ij}-ன் மதிப்புகள் ⊙ வட்டத்துக்குள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

2 (a) இங்கு $m+n-1=3+5-1=7$ வட்ட மதிப்புகள் உள்ளன என அறிகிறோம்.

⊙ வட்டமிட்ட கூறுகளில் உள்ள செலவுத்தொகையைக் கொண்டும் $v_1 = 0$ என்று அனுமானித்தும் ஏனைய u_i, v_j மதிப்புகள் கண்டறியப்படுகின்றன.

3. கூறுகளில் ⊙ இடாத மதிப்புகள் $\bar{C}_{ij}$ மதிப்புகளைக் காட்டுகின்றன.

4. $C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0$ என்ற மதிப்புகளை மட்டும் கண்டு அவற்றைத் தென்கிழக்கு மூலையில் □ சதுரத்தில் மூன்று இடங்களில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

5. □ மதிப்புகளில் மீச்சிறு மதிப்பு $= -30$ என்பதால் அந்த (2, 4) கூறில் $\theta_3 \geqslant 0$ மதிப்பைக் குறித்துள்ளது.

6. சுழல்மடி வழியை -- என்று குறித்துக் காட்டுகிறோம். $\theta_3 = 30$ என்று கொண்டு புதியதொரு தீர்வைக் காண்கிறோம்.

புதிய தீர்வு:

	50				50
	10	60	30		100
25	55			70	150
25	115	60	30	70	

இங்கும் 7 தீர்வு மதிப்புகள் உள்ளதால், இஃது ஒரு சீர்குலை வற்றபயனெளிமைத் தீர்வாகிறது.

இத்தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்பு, z_4 என்க.

$$z_4 = z_3 + [\text{மீச்சிறு}\ (C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0)\ ] \times \theta$$
$$= 8275 + (-30)(30)$$
$$= 8275 - 900 = 7375 \text{ ரூ},$$

மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவு ஒவ்வொரு திரும்பச் செய்முறையிலும் குறைந்து வருகிறதைக் காண்கிறோம். அதாவது $z_4 < z_3 < z_2 < z_1$ என்று தெரிகிறது.

முன்போல (u_i, v_j) மதிப்புகள், $\bar{C}_{ij}$ மதிப்புகள், Δ_{ij} மதிப்புகள் [மீச்சிறு மதிப்பு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij}) < 0$], θவின் இடம் அமைப்பு, θ-ன் பாதை, இவற்றை ஒருங்கே கீழ்க்காணும் பட்டியல்மூலம் விளக்குகிறோம்.

u_i \ v_j	0	5	-20	-5	-5	
10	[10] 10	[15] (50)	[20] -10	[20] 5	[40] 5	50
35	[20] 35 [-15] θ_4	[40] (10) $10-\theta_4$	[15] (60)	[30] (30)	[30] 30	100
30	[30] (25) $25+\theta_4$	[35] (55) $55+\theta_4$	[40] 10	[55] 25	[25] (70)	150
	25	115	60	30	70	300

$\theta = 10$ என்று கொண்ட ஒரு புதிய தீர்வானது கீழ்க் கண்ட வாறு அமையும்.

	50				50
10		60	30		100
15	65			70	150
25	115	60	30	70	

7 தீர்வு மதிப்புகளிருப்பதால் இஃது ஒரு சீர்குலைவற்ற பயனெளி மைத் தீர்வாகும்.

இதன் கொள் குறிச் சார்பலன் மதிப்பு z_5 என்றால்.

$$z_5 = z_4 + [\text{மீச்சிறு } (c_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0] \times \theta$$

$$= 7375 - 15\,(10) = 7375 - 150 = 7225 \text{ ரூ.}$$

$z_5 < z_4 < z_1$ என்பதை அறிகிறோம்.

முன் போல மொத்த ஒழுங்குப் பட்டியல் ஒன்றை அமைக்க லாம்.

$u_i \backslash v_j$	0	5	−5	10	−5	
10	[10] 10	[15] (50)	[20] 5	[20] 20	[40] 5	50
20	[20] (10)	[40] 25	[15] (60)	[30] (30)	[30] 15	100
30	[30] (15)	[35] (65)	[40] 25	[55] 40	[25] (70)	150
	25	115	60	30	70	300

இங்கு $c_{ij} - \bar{C}_{ij}$ மதிப்புகள் யாவுமே $\geqslant 0$ என்றிருப்பதால் நாம் ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் கண்டு விட்டதாக முடிவு செய்கிறோம். இதைவிடப் பெரிதும் உகந்ததொரு தீர்வு இருக்க முடியாது எனலாம். இத் தீர்வினால் ஏற்படும் மொத்தப்போக்கு

வரத்துச் செலவு மீச்சிறுமமாக இருக்கிறது. தீர்வின் மதிப்புகள் ○ வட்டத்தினுள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

அதாவது: $x_{12} = 50$ அலகுகள்

$x_{21} = 10$,,

$x_{23} = 60$,,

$x_{24} = 30$,,

$x_{31} = 15$,,

$x_{32} = 65$,,

$x_{35} = 70$,, ஆகும்.

எனவே, மீச்சிறு மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவு $\hat{z}$

$$\hat{z} = \sum_i \sum_j c_{ij} \hat{x}_{ij}$$

$$= c_{12} \hat{x}_{12} + c_{21} \hat{x}_{21} + c_{23} \hat{x}_{23} + c_{24} \hat{x}_{24} + c_{31} \hat{x}_{31} + c_{32} \hat{x}_{32} + c_{35} \hat{x}_{35}$$

$$= 15\,(50) + 20\,(10) + 15(60) + 30\,(30) + 30(15) + 35\,(65) + 25\,(70)$$

$= 7225$ ரூபாய்களாகும்.

எனவே, பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணப்பட்டது.

சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையைத் தீர்வு காணும் போது முதலில் ஆரம்ப கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமைத் தீர்வைக் கண்டறிய மூன்று வழி முறைகள் உள்ளன. அவையாவன:

(1) வட மேற்கு மூலை விதிமுறை.

(2) வோகலின் (vogels) தோராய முறை (Vogel's approximation method)

(3) ஆய்வு–தீர்ப்பு முறை (Inspection-Judgement Method)

மேற்படி முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றினால் ஆரம்ப கட்ட அடிப்படைத் தீர்வைக் கண்ட பின்னர் ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காணக் பின்வரும் 2 முறைகளை மேற்கொள்கிறோம். அவையாவன:

(1) சக்தி மேற்கல் வழிமுறை அல்லது நீர் தாண்டற் கல் வழி முறை (Stepping stone Method).

(2) மோடி வழி முறை (Modi Method அல்லது Modified Distribution Method).

இந்த எல்லா முறைகளையும் நாம் விளக்கி ஆராயலாம். வட மேற்கு மூலை விதி முறையை நாம் பயன்படுத்தி ஓர் ஆரம்பக் கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமையுடைய தீர்வு எவ்வாறு நிகழ்கிறது என்று முன் மாதிரிகளில் பார்த்தோம். மேலும் இத்தகைய தீர்விலிருந்து மீச்சிறும மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவைக் கணிக்க "மோடி முறை" யை நாம் முன்பு பெயர் குறிப்பிடாமல் கண்டு அறிந்தோம்.

ஆரம்ப கட்டத் தீர்விற்கான இரண்டாவது முறையாக வோகலின் தோரா்ய முறையை அறிய முற்படுவோம். வோகலின் தோராய முறையில், இரண்டு மலிவான வழித்தடங்களில் செல்வதனுல் ஏற்படும் செலவுகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாட்டைக் காட்டும் ஒரு வேறுபாடு நிரல் (Difference column) ஒரு வேறுபாடு நிரை (difference row) இவற்றை ஒவ்வொரு தோற்றுவாய்க்கும் ஒவ்வொரு சேருமிடத்துக்கும் நாம் கண்டு பிடிப்போம். ஒவ்வொரு தனித்தனி வேறுபாடும் மலிவான வழித்தடத்தை உபயோகிக்காததற்கான தண்டனை (penalty) என வழங்கப்பெறுகிறது. எல்லாவித தண்டனைவீத அறுதிப்பாடு (rating)களை தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குக் கணக்கிட்ட பின்னர் மிக அதிகமான வேறுபாட்டைக் கண்டு உணர்கிறோம். இந்த அதிகமான தண்டனை வீதமுள்ள (வரிசை) நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள மிகச் சிறிய செலவுடைய கூறில் (cell) முதல் பங்கீடு செய்ய வேண்டும். இந்தப் பங்கீடு ஒரு தோற்றுவாயின் மொத்த இருப்பையோ (capacity) அல்லது ஒரு சேருமிடத்தின் மொத்த தேவையையோ அல்லது இரண்டையுமோ முழுதுமாகப் பூர்த்தி செய்கிறது. போக்குவரத்து அணியிலிருந்து அவ்வாறு பூர்த்தி செய்யப்பட்ட நிரையையோ நிரலையோ நீக்கிவிடுகிறோம். இம் முறையைப் பயன்படுத்தி $(m+n-1)$ எண்ணிக்கையுள்ள இடப் பங்கீடுகள் கிடைக்கும்வரை திரும்பத் திரும்ப செய்கிறோம்.

இம்முறையினுல் ஓர் ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமைத் தீர்வு கிடைக்கும் முன்னர் பல கணிப்பு முறைகளை அவசியம் மேற்கொள்ளவேண்டிய சிரமம் ஏற்படுகிறது. இந்த வோகல் முறையின் பயன் யாதெனில், வடமேற்கு மூலை விதியைப் பின்பற்றிக் கிடைக்கும் ஆரம்ப அடிப்படைப்பயனெளிமைத்தீர்வி

லிருந்து பெரிதும் உகந்ததொரு தீர்வைக் காண்பதற்கு உபயோகிக்கும் திரும்பச் செய்முறைகளின் எண்ணிக்கையைவிட, குறைவான திரும்பச் செய்முறைகளிலேயே பெரிதும் உகந்த தீர்வு கிடைக்கிறது.

வோகல் முறையின்மூலம் ஆரம்ப அடிப்படை பயனெளிவுத் தீர்வை ஓர் உதாரணத்தின்மூலம் கீழே காண்போம்.

மாதிரி:

தோற்றுவாய்களின் இருப்புகளும் (கிடைப்பனவும்) சேருமிடங்களின் தேவைகளும், தரப்பட்டு, போக்குவரத்துக்கான செலவு அணியும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 1

தோற்று வாய்கள்	சேருமிடங்கள்					தோற்றுவாயில் கிடைப்பன
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6	9	1	50
சேருமிடத் தேவை	40	20	50	30	40	180

வேறுபாடு நிரைகளையும் வேறுபாடு நிரல்களையும் (அதாவது தண்டனைகளை) அட்டவணை 2-ல் கண்டுபிடித்துத் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு மிக அதிகமான வேறுபாடு (தண்டனை) D_1 நிரலில் '7' எனக் காணப்படுகிறது. (அட்டவணை 2அ அடுத்த பக்கம் பார்க்கவும்)

அட்டவணை 2.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	(குண்டனை) வேறுபாடு நிரல்		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	இருப்பு
O_1	12	4	9	5	9	1	O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	5	O_2	8	1	6	6	7	45
O_3	1	12	4	7	7	3	O_3	1 (30)	12	4	7	7	~~30~~ 0
O_4	10	15	6	9	1	5	O_4	10	15	6	9	1	50
வேறுபாடு நிரை (குண்டனை)	7 ✓	3	2	1	6		தேவை	~~40~~ 10	20	50	30	40	

D_1 நிரலில் எந்தக் கூறில் மிகக் குறைவான போக்குவரத்துச் செலவுடைய கூறில் தீர்வு காணவேண்டும்? (3,1) கூறு$=O_3D_1$. இங்குதான் D_1 நிரலின் மிகக்குறைந்த மதிப்பு உள்ளது. எனவே, இக் கூறில் தீர்வு அமையும். O_3-ன் இருப்பையும், D_1-ன் தேவையை யும் கண்டறிந்து இரு எண்களில் குறைந்த மதிப்பை O_3 D_1-க்குத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். O_3-ன் இருப்பு = 30, D_1-ன் தேவை =40. எனவே O_3D_1-ல் தீர்வு=30 என்று வட்டமிட்டுக் குறித்து O_3-ன் இருப்பு பூராவும் உபயோகிக்கப்பட்டு விட்டதால் O_3 நிரையைத் தற்காலிகமாக விலக்கிவிடுகிறோம். D_1 நிரலை நாம் நீக்க முடியாது. ஏனெனில், தேவைகளில் இன்னும் 10 அலகுகளை இன்னும் முழுதுமாகப் பூர்த்தி செய்யாமலிருக்கிறோம். இந்த O_3 நிரையை நிழலிட்டு (shaded) மறைக்கிறோம். அடுத்த மூன்ருவது அட்டவணையில் O_3 நிரை இருக்காது. தண்டனைகளை முன் போலவே கண்டுபிடித்தால், மிக அதிகத் தண்டனை 6 என அறி கிறோம். D_5 நிரலில் அதிகத் தண்டனை உள்ளதால் அந்த நிரலில் மிகச் சிறிய எண் 1 என்றும், எனவே அடுத்த தீர்வு (4,5) கூறில் அமைவதாகவும் அறிகிறோம். O_4D_5 கூறில் தீர்வு காண்பதற்கு O_4-ன் இருப்பு = 50, D_5-ன் தேவை = 40 என்பதால் இரண்டில் குறைவான எண் 40ஐ O_4 D_5-க்குத் தீர்வாகக் காண்கின்றோம்.

இப்போது D_5 நிரல் நீக்கப்படுவதை நிழலிட்டு உணர்த்து கின்றோம். எனவே, முன்பு ஆரம்பத்தில் 4×5 அணியாக இருந்தது இப்போது 3×4 அணியாக அட்டவணை 4-ல் காட்டப்படுகிறது.

(அட்டவணைகள் 3, 4 அடுத்தப் பக்கம் பார்க்கவும்.)

இதே போல அட்டவணைகள் 5, 6, 7, 8 அமைக்கப்படு கின்றன. ஒவ்வோர் அட்டவணை முடிவிலும் ஒரு கூறின் தீர்வு கிடைக்கிறது.

(அட்டவணைகள் 5, 6, 7, 8 பக்கம் 148, 149-ல், பார்க்கவும்.)

அட்டவணை 3. (a)

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	வேறுபாடு நிரல் தண்டனை
O_1	12	4	9	5	9	1
O_2	8	1	6	6	7	5
O_4	10	15	6	9	1	5
வேறுபாடு நிரை தண்டனை	2	3	0	1	6 ✓	

(b)

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	இருப்பு
O_1	12	4	9	5	9	55
O_2	8	1	6	6	7	45
O_4	10	15	6	9	1 (40)	~~50~~ 10
தேவை	10	20	50	30	~~40~~ 0	

அட்டவணை 4. (a)

	D_1	D_2	D_3	D_4	வேறுபாடு நிரல்
O_1	12	4	9	5	1
O_2	8	1	6	6	5 √
O_4	10	15	6	9	3
வேறுபாடு நிரை	2	3	0	1	

(b)

	D_1	D_2	D_3	D_4	வேறுபாடு நிரல்
O_1	12	4	9	5	55
O_2	8	1 (20)	6	6	~~45~~ 25
O_4	10	15	6	9	10
வேறுபாடு நிரை	10	~~20~~ 0	50	30	[illegible]

அட்டவணை 5. (a)

	D_1	D_3	D_4	நிரை தண்டனை
O_1	12	9	5	4 ✓
O_2	8	6	6	0
O_4	10	6	9	3
நிரை தண்டனை	2	0	1	

(b)

	D_1	D_3	D_4	இருப்பு
O_1	12	9	5 (30)	~~55~~ 25
O_2	8	6	6	25
O_4	10	6	9	10
தேவை	10	50	~~30~~ 0	

அட்டவணை 6. (a)

	D_1	D_3	தண்டனை
O_1	12	9	3
O_2	8	6	2
O_4	10	6	4 ✓
தண்டனை	2	0	

(b)

	D_1	D_3	இருப்பு
O_1	12	9	25
O_2	8	6	25
O_4	10	6 (10)	~~10~~ 0
தேவை	10	~~50~~ 40	

அட்டவணை 7. (a)

	D_1	D_3	நிரல் தண்டனை
O_1	12	9	3
O_2	8	6	2
நிரை தண்டனை	4	3	

(b)

	D_1	D_3	இருப்பு
O_1	12	9	25
O_2	8 (10)	6	~~25~~ 15
தேவை	~~10~~ 0	40	

அட்டவணை 8.

	D_3	இருப்பு
O_1	9 (25)	25
O_2	6 (15)	15
தேவை	40	

எனவே, ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிவுத் தீர்வை நாம் கீழே குறிப்பிடுவோம் :

$O_1 D_3 = 25$ $\quad$ $O_2 D_3 = 15$

$O_1 D_4 = 30$ $\quad$ $O_3 D_1 = 30$

$O_2 D_1 = 10$ $\quad$ $O_4 D_3 = 10$

$O_2 D_2 = 20$ $\quad$ $O_4 D_5 = 40$

இத் தீர்வைச் செலவு அணியுடன் பின்வரும் அட்டவணையில் குறிக்கலாம். (அட்டவணை அடுத்தப் பக்கம் பார்க்கவும்.)

தோற்றுவாய்	சேருமிடம்					மொத்தம்
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12	4	9 (25)	5 (30)	9	55
O_2	8 (10)	1 (20)	6 (15)	6	7	45
O_3	1 (30)	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6 (10)	9	1 (40)	50
மொத்தம்	40	20	50	30	40	180

இங்கு $m+n-1 = 4+5-1 = 8$ கூறுகளில் தீர்வு உள்ளது. இத் தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு

$$Z = \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij},$$

$$= 9(25)+5(30)+8(10)+1(20)+6(15)$$
$$+1(30)+6(10)+1(40)$$
$$= \mathbf{695}\text{ ரூ.}$$

இதே உதாரணத்திற்கான வடமேற்கு மூலை விதித் தீர்வு கண்டுபிடித்து எழுதுவோம்.

தோற்று வாய்கள்	சேருமிடங்கள்					இருப்பு
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12 (40)	4 (15)	9	5	9	55
O_2	8	1 (5)	6 (40)	6	7	45
O_3	1	12	4 (10)	7 (20)	7	30
O_4	10	15	6	9 (10)	1 (40)	50
தேவை	40	20	50	30	40	180

இங்கும் $m+n-1=8$ தீர்வுகள் உள்ளன.

இத் தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்பு $Z = \sum\sum c_{ij}\, x_{ij}$

$$Z = 12(40)+4(15)+1(5)+6(40)+4(10)+7(20)+9(10)+1(40)$$
$= 1095$ ரு.

எனவே, வோகல் முறையினுல் கிடைத்த கொள்குறிச் சார்பலன் குறைவாக இருப்பதால், இம் முறை வடமேற்கு மூலே விதி முறையைவிடப் (இந்தக் கணக்கிற்கு) பொருந்துவதாக உள்ளது. இப்போது இதே கணக்கிற்கு ஆய்வு-தீர்ப்பு முறையின் (Inspection - Judgement Method) மூலமாகத் தீர்வு காண முயல்வோம். முதலில் இம் முறையைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்வோம். போக்குவரத்துப் பிரச்சினே சிறிய வடிவுடன் கூடியதாக இருப்பின், இம் முறையின்மூலம் சற்று வேகமாகத் தீர்வைக் காண முடியும்.

இங்குச் செலவு அணியைப் பூரணமாக ஆராய்ந்து எந்தக் கூறில் மிகச் சிறு செலவுத் தொகை இருக்கிறதோ அக் கூறில் ஒரு தீர்வை உண்டாக்குவோம். அக் கூறுக்குடைய நிரை, நிரல் மொத்தங்கள் இரண்டில் எது குறைந்த மதிப்போ, அம் மதிப்பை அக் கூறுக்கு அளிப்போம். பிறகு அக் கூறின் நிரையையோ நிரலேயோ நீக்கிவிட்டு (எதில் மதிப்பைப் போட்டோமோ அதை நீக்கிவிட்டு) மீதமுள்ள கூறுகளில் எந்தக்கூறில் மீச்சிறு செலவுத் தொகை இருக்கிறதோ அக் கூறைத் தேர்ந்தெடுத்து அக் கூறுக்கான நிரலிலா அல்லது நிரையிலா மொத்த மதிப்பு குறைவாக உள்ளது என அறிந்து அந்தக் குறைந்த மதிப்பை அக் கூறுக்கு அளிப்போம். நிரை மொத்த மதிப்பு நிரல் மொத்த மதிப்பை விடக் குறைவாக இருப்பின், அக் கூறுக்கு நிரை மொத்த மதிப்பை அளித்த பின்னர், அந்த நிரையை மட்டும் நீக்கிவிட்டு மீதமுள்ள கூறுகளில் எந்தக் கூறில் சிறிய செலவுத் தொகை உள்ளது என்று முன்போல ஆராய வேண்டும்.

இதேபோல ஒவ்வோர் இட ஒதுக்கீட்டுக்கும் ஒரு கூறைத் தேர்ந்தெடுக்கிறேம். மொத்தம் $(m+n-1)$ இட ஒதுக்கீடுகள் செய்ய $m+n-1$ கூறுகளேத் தேர்ந்தெடுத்து ஓர் ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமைத் தீர்வைக் கணிக்கின்றேம். இப்போது எந்த ஓர் இட ஒதுக்கீட்டின்போதும் மிகச்சிறிய செலவுத் தொகைகள் ஒத்தவையாக (tie) இருந்தால் விதிக்கட்டின்றி ஏதாவது ஒரு கூறை இட ஒதுக்கீட்டிற்காகத் தேர்ந்தெடுத்துக்

கொள்வோம். எதைத் தேர்ந்தெடுப்பது என்பதை நமது தீர்ப்புக்கு (judgement) விட்டு விடுவோம் என்பதால், இம் முறையை, 'ஆய்வு-தீர்ப்பு முறை' என்கிறோம். இதை விளக்குவதற்காக மேலே சொன்ன உதாரணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

போக்குவரத்துச் செலவு அட்டவணை

சேருமிடம் / தோற்றுவாய்	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	இருப்பு	
O_1	12 (10)	4	9 (15)	5 (30)	9	~~55~~ ~~25~~ ~~10~~ 0	
O_2	8	1 (25)	6 (25)	6	7	~~45~~ ~~25~~ 0	→ 6வது
O_3	1 (30)	12	4	7	7	~~30~~ 0	→ 1வது
O_4	10	15 (10)	6	9	1 (40)	~~10~~ 0 ~~50~~	→ 5வது
தேவை	~~40~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~50~~ 40	30	40	180	
		↓ 3வது	↓ 7வது	↓ 4வது	↓ 2வது		

தீர்வு

இங்கு (2,2), (3,1), (4,5) என்ற மூன்று கூறுகளில் ஒவ்வொன்றிலும் செலவு 1 ஆக இருப்பதால், முதல் இட ஒதுக்கீட்டில் ஒத்தமைவு ஏற்படுகிறது. இங்கு (3,1) என்ற கூறைத் தேர்ந்தெடுத்து (தீர்ப்பு) (3,1) கூறில் 30ஐ இட ஒதுக்கீடு செய்கின்றோம். எனவே, O_3-ன் இருப்பு முழுதுமாக உபயோகப்படுத்தப்படுகிறது. ஆதலால், O_3 நிரையைக் காகிதப் பென்சிலால் கோடிட்டு நீக்குகிறோம் (1ஆவது கோடு). இரண்டாவது ஒதுக்கீட்டிற்கு (2,2), (4, 5) இரண்டில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். (4,5) கூறைத் தேர்ந்தெடுத்து அங்கு 40ஐ இட ஒதுக்கீடு செய்கிறோம். இப்போது D_5 நிரலைக் கோடிட்டு நீக்குகிறோம் (2ஆவது கோடு). இச் சமயத்தில் D_5 மொத்தம் பூஜ்யமாகி O_4 மொத்தம் 50-லிருந்து 10ஆகக் குறைகிறதைப் பென்சிலில் குறிக்கிறோம். மூன்றாவதாக (2,2) கூறில் 20ஐ ஒதுக்கீடு செய்கிறோம். D_2 நிரலை நீக்கி 3ஆவது கோடு வரைந்தால்

D_2 மொத்தம் பூஜ்யம் ஆகிறது; O_2 நிரை மொத்தம் 25 எனக் குறைகிறது.

இப்போது மீதமுள்ள செலவுத் தொகைகளில் குறைவான மதிப்பு 5 என்பதால் (1, 4) கூறில் இட ஒதுக்கீடு செய்யலாம். O_1, D_4-ன் மொத்த மதிப்புகளில் குறைவானது $30 = D_4$ என்பதால் (1, 4)-ல் 30ஐ ஒதுக்கீடு செய்தபின் 4ஆவது நிரலை நீக்கிவிட்டு, 4ஆவது நிரலின் மொத்தத்தில் 'O' எனக் குறித்து, 1ஆவது நிரையின் மொத்தத்தை $55 - 30 = 25$ எனப் பென்சிலால் குறிக்கிறோம். D_4 நிரலைப் பென்சிலால் 4ஆவது கோடிடுகிறோம்.

ஐந்தாவது ஒதுக்கீட்டிற்கு, (2, 3), (4, 3) கூறுகளில் ஒத்தனவை ஏற்படுவதால், ஏதாவது ஒன்றை, அதாவது இங்கு (4, 3) கூறைத் தேர்ந்தெடுத்து O_4-ன் மீதி இருப்பு 10, D_3-ன் தேவை 50 இவற்றில் குறைவான 10ஐ (4,3) கூறுக்கு ஒதுக்கீடு செய்கிறோம். இப்போது O_4 நிரையின் மதிப்பு பூஜ்யமாகிறது. D_3-ன் மதிப்பு $50 - 10 = 40$ எனக் குறைகிறது. O_4-ல் 5ஆவது கோட்டைப் பென்சிலில் குறிக்கிறோம்.

ஆறுவதாக (2, 3) கூறில் 25 ஐ ஒதுக்கீடு செய்து 6ஆவது கோட்டை O_2-ல் வரைகின்றோம்.

இத் தருணத்தில் O_1-ன் இருப்பு 25ஐ ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும். மேலும் D_1-க்கு 10-ம், D_3-க்கு 15-ம் தேவைப்படுவதால் 7ஆவது, 8ஆவது ஒதுக்கீடாக முறையே (1, 3)கூறில் 15-ம், (1, 1) கூறில் 15-ம் ஒதுக்கீடு செய்து பிரச்சினைக்கு மொத்தத் தீர்வு காணலாம்.

எனவே, இப்படிக் கிடைத்த ஆரம்பக் கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமைத் தீர்வு கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்:

$$x_{11} = 10$$
$$x_{13} = 15$$
$$x_{14} = 30$$
$$x_{22} = 20$$
$$x_{23} = 25$$
$$x_{31} = 30$$
$$x_{43} = 10$$
$$x_{45} = 40$$

தோற்றுவாய்	சேருமிடம்					இருப்பு
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12 (10)	4	9 (15)	5 (30)	9	55
O_2	8	1 (20)	6 (25)	6	7	45
O_3	1 (20)	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6 (10)	9	1 (40)	50
தேவை	40	20	50	30	40	180

இத் தீர்விற்கான மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவு கொள் குறிச் சார்பலனின் மொத்த மதிப்பு $Z = \Sigma\Sigma\, c_{ij}\, x_{ij}$ என்றால்

$$Z = 12(10)+9(15)+5(30)+1(20)+6(25)+1(30)$$
$$+\ 6(10)+1(40)$$
$$= \mathbf{705} \text{ ரூ.}$$

இப்போது வடமேற்கு மூலை விதிமுறையின்மூலம் அடையும் மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவையும், வோகல் தோராய முறையின்மூலம் ஏற்படும் மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவையும் இதனுடன் ஒப்பிட்டுப்பார்த்தால், ஆய்வு-தீர்ப்பு முறையின் மூலம் அடைந்த செலவு ரூ. 705 ஆனது வடமேற்கு மூலை விதி முறையின்மூலம் அடைந்த செலவை (1095 ரூபாயை)விடக் குறைவாக உள்ளது. ஆனால், வோகல் தோராய முறையின் மூலம் அடைந்த செலவை (695 ரூபாயை)விட அதிகமாக உள்ளதென அறிகின்றோம்.

மூன்று ஆரம்பத் தீர்வு முறைகளின் ஒப்பீடு

ஆகவே, ஆரம்பக் கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமையுடைய தீர்வைக் காண மேற்கூறிய மூன்று முறைகளில் ஒன்றை மேற்கொள்ளுகின்றோம். வடமேற்கு மூலை விதிமுறை மற்ற இரண்டையும்விட எளிதானதென்றாலும், வோகலின் தோராய முறை, பொதுவாக மற்ற முறைகளைவிடச் சிறந்ததோர் ஆரம்பக்

கட்டப் பயனெளிமைத் தீர்வு கிடைக்கப் பயன்படுகிறது. ஆனால், வடமேற்கு மூலை விதி முறையில் செலவுத் தொகையைப்பற்றி நாம் ஏதும் கவனிக்காமல் தீர்வைக் காண்கிறோம். வோகல் முறையைவிட ஆய்வு–தீர்ப்பு முறையில் செலவு அணியில் உள்ள எல்லாச் செலவுத் தொகைகளையும் ஒருங்கே ஆராய்ந்து அவை யாவற்றினுள்ளும் எந்தக் கூறில் மதிப்புக் குறைந்துள்ளதோ அங்கு ஒதுக்கீடு செய்து அதே வழியைப் பின்பற்றித் தீர்வு காண்பதால், ஒருவிதத்தில் ஆய்வு–தீர்வு முறை பயனுடையதாகத் தெரிகிறது.

ஆரம்பக் கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமைத் தீர்வைக் கண்டறிந்த பிறகு பெரிதும் உகந்ததொரு பயனெளிவுடைய தீர்வு காண்பதற்குக் கீழ்க்காணும் இரு முறைகளில் ஏதேனும் ஒரு முறையை உபயோகிக்கலாம்:

1. நீர் தாண்டற் கல் முறை (Stepping stone Method).
2. 'மோடி' முறை அல்லது 'மாற்றியமைக்கப்பட்ட பரவல் முறை' (Modified Distribution Method).

1. நீர் தாண்டற் கல் முறை

இம் முறையை விளக்க ஒரு சிறிய எளிதான போக்குவரத்துப் பிரச்சினையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அட்டவணை 1.

தோற்றுவாய்	சேருமிடம் D_1	சேருமிடம் D_2	இருப்பு
O_1	2	2	1000
O_2	1	2	600
தேவை	900	700	1600

இப் பிரச்சினைக்கு நீர் தாண்டற் கல் முறையில் தீர்வு கண்ட பின் இதைவிடப் பெரிய 4×5 அணி செலவுத் தொகையுடைய மேற்படி பிரச்சினைக்கும் தீர்வு காண்போம்.

இச் சிறிய பிரச்சினைமூலம் இம் முறையைப் பயன்படுத்துவது எப்படி என்று நன்கு அறிந்துகொள்ள வாய்ப்பு ஏற்படுகிறது.

வடமேற்கு மூலை விதியின்மூலம் இப் பிரச்சினையின் முதல் தீர்வைக் கீழே குறிக்கலாம்:

அட்டவணை 2.

	சேருமிடம்		இருப்பு
	D_1	D_2	
O_1	2	900	2	100	1000
O_2	1		2	600	600
தேவை	900	700	1600

இங்கு $m + n - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$ கூறுகளின் மதிப்புகள் உள்ளதால் இத் தீர்வு ஓர் ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிமை யான தீர்வு என்று அறிய வருகிறோம்.

இப்போது காலியான கூறுகளில் நல்வாய்ப்புச் செலவுகளைத் (opportunity costs) தீர்மானிக்கவேண்டும். (இங்கு ஒரே ஒரு காலியான கூறு இருக்கிறது.) ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வில் எந்த ஒரு நல் வாய்ப்புச் செலவும் நேர் எண்ணுகை இருக்கக்கூடாது என்று நாம் அறிகிறோம். எனவே, போக்குவரத்துச் செலவு அணி யின் காலி கூறுகளைச் சோதித்து நல்வாய்ப்புச் செலவு உள்ளதா இல்லையா என அறிதல் வேண்டும். எல்லாக் காலிக் கூறுகளிலும் நேர் வாய்ப்புச் செலவுகள் இல்லை என்றால், ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வு கிடைத்துவிட்டதாக அர்த்தமாகிறது. ஆனால், எந்த ஒரு காலி கூறிலாவது ஒரு நேர் வாய்ப்புச் செலவுத் தொகை இருந் தால், அத்தகைய தீர்வு பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வாகாது என்ப தால் திருத்தம் செய்ய வேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது.

இந்தப் பிரச்சினையில் O_2 D_1 கூறு காலியாக இருப்பதால் அதற்கான வாய்ப்புச் செலவு இருக்கிறதா இல்லையா எனத் தீர் மானிப்பதற்கு, அந்தக் கூறில் 1 அலகை O_2 D_2-லிருந்து மாற்றம் செய்தால் அதனால் ஏற்படும் செலவு விளைவு அல்லது செலவு மாற்றம் $= -2 + 1 - 2 + 2 = -1$ ரூபாய்.

விளக்கம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை 3.

	D_1	D_2
O_1	2 $-1 \rightarrow$	2 $+1$
O_2	1 $+1$ ↑	2 $\leftarrow -1$

O_2 D_2-லிருந்து 1 அலகை வெளியேற்றல் : -1

O_2 D_1-க்கு 1 அலகைக் கூட்டுதல் : $+1$

O_1 D_1-லிருந்து 1 அலகை வெளியேற்றல் : -1

O_1 D_2-க்கு 1 அலகைக் கூட்டுதல் : $+1$

இந்த 1 அலகு எந்தப் பாதையில் செல்கிறது என்பது அம்புக் குறியிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

செலவு மாற்றம் $= 2(-1) + 1(1) + 2(-1) + 2(1)$

$= -2 + 1 - 2 + 2 = -1$ ரூபாய் ஆகிறது.

$\therefore$ O_2 D_1 லிருந்து 1 அலகை மாற்றீடு செய்வதால் ஓர் எதிர்மறைச்செலவு மாற்றம் (negative cost change) ஏற்படுகிறது. எனவே, O_2 D_1-க்கு 1 அலகை மாற்றம் செய்வதால் ஏற்படும் நிகரச் செலவு மாற்றம் -1 ரூபாய் என்பதை, O_2 D_1 கூறை முதல் தீர்வில் சேர்க்காததால் ஏற்படும் வாய்ப்புச் செலவு $+1$ ரூபாய் (ஓர் அலகுக்கு) எனவும் கூறமுடியும். ஆதலால், இந்தக் காலி கூறு O_2D_1ஐப் புதிய தீர்வில் சேர்த்துக்கொள்ளலாம். O_2D_1-ன் வாய்ப்புச் செலவின் மதிப்பு நேர் எண்ணுக இருப்பதைக் கண்டறிந்தபின், நாம் புதிய அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வை அடுத்தபடியாக எழுதலாம்.

அட்டவணை 4.

முதல் தீர்வு

	D_1	D_2
O_1	[2] − 900	[2] + 100
O_2	[1] +	[2] − 600

திருத்தப்பட்ட தீர்வு

	D_1	D_2
O_1	[2] (899)	[2] (101)
O_2	[1] (1)	[2] (599)

இந்தத் திருத்தப்பட்ட தீர்விஞல் மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவில் 1 ரூபாய் குறைந்திருக்கிறது. இதேபோல ஒவ்வோர் அலகும் O_2D_1-க்குச் சேர்க்கப்படுவதால் மொத்தச் செலவு அந்த அளவுக்குக் குறைகிறது. சுழல் மடி வஃவின் (loop) மூலம் O_2D_1-க்கு 600-க்கு மேல் அளவை மாற்றீடு செய்ய முடியாது; ஏனெனில் O_2 நிரையின் மொத்த இருப்பு 600தான் ஆகும்.

எனவே, ஒரு மேம்பட்ட (better) அடிப்படைப் பயனெளிமை யான தீர்வைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

அட்டவணை 5.

	D_1	D_2	மொத்தம்
O_1	[2] (300)	[2] (700)	1000
O_2	[1] (600)	[2]	600
மொத்தம்	900	700	1600

இத் தீர்விஞல் ஏற்படும் மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவு $\left.\right\} = \Sigma \Sigma C_{ij} x_{ij}$

$= 2(300) + 2(700) + 1(600)$

$=$ **2600 ரு.**

அட்டவணை 2-ன்மூலம் முதல் தீர்வின் மொத்தப் போக்கு வரத்துச் செலவு $\left.\right\} = \Sigma \Sigma C_{ij} x_{ij}$

$= 2(900) + 2(100) + 2(600)$

$=$ **3200 ரு.**

இந்தப் பிரச்சினைக்கு வேறு எந்த ஒரு தீர்வும் குறைந்த ஒரு மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவைத் தராது.

எனவே, இம் முறையைச் சுருக்கமாக விளக்கினால் முதலில் ஏதாவது ஒரு முறையில் (வடமேற்கு மூலை விதிமுறையினால்) அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வைக் காண்போம். பிறகு இத் தீர்வு ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வா எனத் தீர்மானிப்பதற்கு, காலியான கூறின் வாய்ப்புச் செலவைக் கண்டறிந்தோம். காலிக்கூறின் வாய்ப்புச் செலவைக் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

(1) காலிக் கூறின் வழியாக மற்ற பக்கத்துத் தீர்வு கூறுகளின் வழியாகவும் செல்லும் ஒரு சுழல் மடி வளைவைத் (loop) தகுந்த +, — குறிகளுடன் வரையவும்,

(2) காலிக் கூறுக்குப் பொருளின் 1 அலகை மாற்றிடவும்.

(3) காலிக் கூறில் 1 அலகை மாற்றியதால் ஏற்படும் நிகரச் செலவு மாற்றத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(4) காலிக் கூறின் வாய்ப்புச் செலவானது நிகரச் செலவு மாற்றத்தின் எதிர்மறை எண்ணேயாகும்.

மேற்படி உதாரணத்தில் ஒரே ஒரு காலிக் கூறிற்கான வாய்ப்புச் செலவைத்தான் கணித்தோம். வேறு பெரிய ஒரு பிரச்சினையில் நிறைய காலிக் கூறுகளின் வாய்ப்புச் செலவுகளையும் இதே முறையில் கணிக்கலாம். இந்தப் படிவளர்ச்சி வழிமுறை (Stepping Stone Method) அல்லது நீர் தாண்டற் கல் முறையில், ஒவ்வொரு காலிக் கூறுக்கும் ஒரு தனியான சுழல் மடிவளைவை ஏற்படுத்தியாகவேண்டும் என்பதை நாம் வலியுறுத்திக் கூற வேண்டிய அவசியமாகிறது.

மூன்றாவதாக, காலிக் கூறின் வாய்ப்புச் செலவின் மதிப்பு நேர் எண்ணு எனத் தீர்மானமாகத் தெரிந்த பின்னர் தக்கவாறு (மேலே விளக்கிய முறையில்) காலி மனையைப் பூர்த்தி செய்து ஆரம்பத் தீர்வை மாற்றியமைக்கின்றோம்.

கடைசியாக, புதிய தீர்வின் காலிக் கூறை (O_2 D_2 இங்கு) ஆராய்ந்து அதன் வாய்ப்புச் செலவு நேர் எண் இல்லையா என அறிந்து அவ்வாறு இல்லாமலிருந்தால், பெரிதும் உகந்த தீர்வை அடைந்துவிட்டதாகக் கொள்கிறோம்.

இந்தப் படிவளர்ச்சி வழிமுறையை 2×2 செலவு அணிக்குப் பயன்படுத்தியதுபோலப் பொதுவான ஒரு $m \times n$ செலவு அணிக்கும் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணலாம்.

நாம் முன் கவனித்த 4 தோற்றுவாய்கள், 5 சேருமிடங்கள் பிரச்சினையில் 8 கூறுகளில் $(4+5-1)$ தீர்வு மதிப்புகளும் மீதி

12 கூறுகள் காலி கூறுகளாகவும் இருப்பதைக் காண்கின்றோம். இந்த 12 காலிக் கூறுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் வாய்ப்புச் செலவைக் கண்டுபிடித்து, தீர்வு பெரிதும் உகந்ததா அல்லது தீர்வைத் திருத்தம் செய்யவேண்டுமா எனச் சோதிக்கிறோம். ஆரம்பத் தீர்வைத் திருத்தவேண்டியிருப்பின், எங்கு வாய்ப்புச் செலவு மிகவும் அதிகமாக உள்ளதோ அந்தக் கூறினை நமது தீர்வில் சேர்த்து, தீர்வினைத் திருத்த முற்படுகின்றோம். புதிய தீர்வில் நேர வாய்ப்புச் செலவிற்கான காலிக் கூறுகள் எத்தனை இருப்பினும் ஒவ்வொரு சமயத்திலும் ஒரே ஒரு கூறைத்தான் சேர்த்துக் கொள்ள முடியும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

இந்த 4×5 அணி போக்குவரத்துச் செலவுத் தொகைப் பிரச்சினையின் ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிவுடைய தீர்வை—ஆய்வு-தீர்வு முறையில் கண்ட தீர்வைக்—கீழே குறித்து, அதிலிருந்து படி வளர்ச்சி வழி முறையைப் பயன்படுத்திப் பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண்போம்.

முதல் தீர்வு

தோற்றுவாய்	சேருமிடம்					இருப்பு
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	12 (10)	4	9 (15)	5 (30)	9	55
O_2	8	1 (20)	6 (25)	6	7	45
O_3	1 (30)	12	4	7	7	30
O_4	10	15	6 (10)	9	1 (40)	50
தேவை	40	20	50	30	40	180

முதல் கட்டம்

முதல் கட்டமாக இத் தீர்வில் $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ கூறுகளில் தீர்வு இருப்பதால் இஃது ஒரு பயனெளிமையுடைய அடிப்படைத் தீர்வு என்பது உண்மையாகிறது.

2ஆவது கட்டம்

காலிக் கூறுகளின் வாய்ப்புச் செலவுத் தொகைகளைக் கண்டறிதல் : வாய்ப்புச் செலவுகளைக் கணிக்கும் முன்பு, எல்லாக் காலிக் கூறுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் +, — குறிகளைத் தகுந்த முறையில் கொண்டதொரு தனியான சுழல் மடி வளைவை, இம் முறையில் (படி வளர்ச்சிக்கான முறையில்) பூர்த்தி செய்ய வேண்டும். இங்கு 12 காலி கூறுகள் இருப்பதால், 12 வேறுபட்ட சுழல் மடி வளைவுகள் வரையவேண்டும். பின் வரும் அட்டவணை யில் ஒவ்வொரு காலிகூறுக்குமான வாய்ப்புச் செலவைக் கண்டு பிடித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது. சுழல் மடி வளைவுப் பாதையும் காட்டப்பட்டுள்ளது. இத்தகைய வாய்ப்புச் செலவுகளை ஆராய்ந்து பார்க்கும்போது (2, 1) கூறு ஒன்றே ஒரு நேர் வாய்ப்புச் செலவைக் கொண்டதாகத் தெரிகிறது. எனவே, (2, 1) கூறை அடுத்த தீர்வில் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டும்.

வாய்ப்புச் செயல்களின் கணிப்பும், செயல் நடவடிக்கையும் (அட்டவணை அடுத்தப் பக்கம் பார்க்கவும்).

வாய்ப்புச் செலவு பூஜ்யமாக இருக்கும் நிலையைப்பற்றி கொஞ்சம் விளக்கம் தேவைப்படுகிறது. இத்தகைய கூறைத் தேர்ந்தெடுத் தால் புதிய தீர்வின் மொத்தச் செலவும் தற்போதைய (முதல்) தீர்வின் மொத்தச் செலவும் ஒன்ருக இருக்கும் என்பதால், சார்பு எதிர்வு அற்ற நிலை (indifferent) என்று நாம் இந்த நிலையைக் குறிக்கின்ருேம்.

3ஆவது கட்டம்

தீர்வை இப்போது திருத்தியமைத்தல் : பொதுவாக நேர் வாய்ப்புச் செலவுகளில் அதிகமாக எங்கு உள்ளதோ அந்தக் கூறில் மதிப்புச் சேர்த்துத் தீர்வு காண்போம். ஆனல், இங்கு ஒரே ஒரு நேர் வாய்ப்புச் செலவு மட்டுமே இருப்பதால், அந்த (2, 1) கூறை எடுத்து அங்குச் சுழல் மடி வளைவின்மூலம் அக் கூறின் மதிப்பை அறியலாம். சுழல் மடி வளைவின் எதிர் மறைக் கூறுகளில் (negative cells) எந்த மதிப்புக் குறைவாக உள்ளதோ (இங்கு 10) அந்த மதிப்பை (2, 1) கூறுக்குத் தருகிருேம். இப்போது முதல் தீர்வையும், (புதிய) திருத்தப்பட்ட தீர்வையும் அட்டவணையில் காணவும்.

(அட்டவணை பக்கம் 163-ல் பார்க்கவும்.)

வரிசை எண்	காலிக் கூறு	சுழல்மடி வளைவு (Loop)	நிகர செலவு மாற்றம்	வாய்ப்புச் செலவு	செயல் நடவடிக்கை
1.	(1,2)	(1,2)−(1,3)+(2,3)−(2,2)	4−9+6−1=0	0	சார்பு எதிர்வு அற்ற நிலை
2.	(1,5)	(1,5)−(4,5)+(4,3)−(1,3)	9−1+6−9=+5	−5	அடுத்தத் தீர்வில் சேர்க்க வேண்டாம்
3.	(2,1)	(2,1)−(1,1)+(1,3)−(2,3)	8−12+9−6=−1	+1	அடுத்தத் தீர்வில் இடம்பெறும் வாய்ப்பு உள்ளது
4.	(2,4)	(2,4)−(1,4)+(1,3)−(2,3)	6−5+9−6=+4	−4	அடுத்தத் தீர்வில் சேர்க்காதே
5.	(2,5)	(2,5)−(2,3)+(4,3)−(4,5)	7−6+6−1=+6	−6	... ...
6.	(3,2)	(3,2)−(3,1)+(1,1)−(1,3)−(2,3)−(2,2)	12−1+12−9+6−1=+19	−19	... ...
7.	(3,3)	(3,3)−(1,3)+(1,1)−(3,1)	4−9+12−1=6	−6	... ...
8.	(3,4)	(3,4)−(1,4)+(1,1)−(3,1)	7−5+12−1=13	−13	... ...
9.	(3,5)	(3,5)−(4,5)+(4,3)−(1,3)+(1,1)−(3,1)	7−1+6−9+12−1=+14	−14	... ...
10.	(4,1)	(4,1)−(1,1)+(1,3)−(4,3)	10−12+9+6=+1	−1	... ...
11.	(4,2)	(4,2)−(2,2)+(2,3)−(4,3)	15−1+6−6=14	−14	... ...
12.	(4,4)	(4,4)−(4,3)+(1,3)−(1,4)	9−6+9−5=7	−7	... ...

முதல்தீர்வு

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	12 (10) $-\theta$	4	9 (15) $+\theta$	5 (30)	9
O_2	8 $+\theta$	1 (20)	6 (25) $-\theta$	6	7
O_3	1 (30)	12	4	7	7
O_4	10	15	6 (10)	9	1 (40)

திருத்தப்பட்டத்தீர்வு

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	12	4	9 (25)	5 (30)	9
O_2	8 (10)	1 (20)	6 (15)	6	7
O_3	1 (30)	12	4	7	7
O_4	10	15	6 (10)	9	1 (40)

இந்தத் தீர்வு பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வா எனக் கண்டறி வதற்கு உஆவது கட்ட வழி முறையைத் திரும்பச் செய்ய

வேண்டும். அங்கு எல்லா வாய்ப்புச் செலவுகளும் எதிர் மறை எண்களாக இருப்பின், இத் தீர்வே பெரிதும் உகந்த ஒன்ருகக் கருதப்படுகிறது. இல்லாவிடில் ஏதாவது வாய்ப்புச் செலவுகள் நேர் எண்களாக இருந்தால், 3ஆவது கட்ட வழியில் மற்ருெரு திருத்தப்பட்ட தீர்வைக் காணவேண்டும்.

இந்த உதாரணத்தில் திருத்தப்பட்ட தீர்வில் உள்ள 12 காலிக் கூறுகளுக்கு வாய்ப்புச் செலவு தொகைகளைக் கண்டால் எல்லாமே எதிர் மறை மதிப்புகளாயிருக்கின்றன; எனவே அட்ட வணையில் காணப்படும் திருத்தப்பட்ட தீர்வே பெரிதும் உகந்த தீர்வாகின்றது. வாசகர்கள் இதைச் சரி பார்த்துத் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

2. மோடி முறை : ஆரம்பக் கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிவுடைய தீர்விலிருந்து பெரிதும் உகந்ததொரு தீர்வைக் காணும் மற்ருெரு முறையே "மோடி முறை" (Modi Method) எனப்படும்.

இம் முறையில் அடிப்படைத் தீர்வு இல்லாத எல்லாக் கூறுகளிற்கும் $\bar{C}_{ij} = u_i + v_j$ கண்டுபிடிக்கிருேம். இந்த u_i, v_j மதிப்புகளை அடிப்படைத் தீர்வுக்கான கூறுகளின் செலவுத் தொகைகளைக் கொண்டு கணித்து விடலாம். இம் முறையை முதன் முதலில் நன்கு விளக்கி 2 மாதிரிகளைச் செய்துள்ளோம். இச் சமயங்களில் $C_{ij} - \bar{C}_{ij}$ மதிப்புகளை ஆராய்ந்து [மீச்சிறு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij} < 0)$] மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து அந்த (i, j) கூறில் புதிய ஒதுக்கீடு செய்கிருேம். அதாவது (i, j) கூறை வைத்துக் கொண்டு சுழல் மடி வளைவை ஏற்படுத்துகிருேம். இங்கு $\bar{C}_{ij} - C_{ij} =$ வாய்ப்புச் செலவாகும். அதாவது நிகர செலவு மாற்றம் (net cost change) $= C_{ij} - \bar{C}_{ij}$.

[மீச்சிறு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij}) < 0$] = மீப்பெரு $[\bar{C}_{ij} - C_{ij} > 0]$ ஆகும்.
= அதிகப்படியான நேர் வாய்ப்புச் செலவு மதிப்பு என்பதை அறியவும்.

படிவளர்ச்சி முறையில் எல்லாக் கூறுகளுக்கும் சுழல் மடி வளைவுகளைக் கண்டுபிடித்து பிறகு வாய்ப்புச் செலவுகளைக் கணிக்கிருேம்.

ஆனுல் மோடி முறையில், எல்லாக் கூறுகளுக்கும் நிகரச் செலவு மாற்றங்களையும், வாய்ப்புச்செலவுகளையும் முதலில்கண்டு பிடித்து, பிறகு ஒரே ஒரு கூறில் மட்டும் சுழல் மடி வளைவை ஏற்படுத்துகிருேம்.

எனவே, முன்னதை விட மோடி முறையே எளிதானதாக நாம் அறிகிறோம். இதனால் தானோ என்னவோ இம் முறையைத் திருத்தப்பட்ட பரவல்முறை (Modified Distribution Method) என்று வழங்குகிறோம்.

உதாரணம்

முன்பு விளக்கப்பட்ட அதே உதாரணத்தை எடுத்துக் கொண்டு இம் முறையில் தீர்வு காண்போம்.

4×5 செலவுத் தொகை அணிக்கான ஓர் ஆய்வு—தீர்ப்பு முறையில் கண்ட ஆரம்ப அடிப்படைப் பயனெளிவுடைய தீர்வு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

u_i \ v_j		0	−8	−3	−7	−8	
		சேருமிடம்					இருப்பு
		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
12	O_1	[12] (10) −θ	[4] 4	[9] (15) +θ	[5] (30)	[9] 4	55
9	O_2	[8] 9 θ [−1]	[1] (20)	[6] (25) −θ	[6] 2	[7] 1	45
1	O_3	[1] (30)	[12] −7	[4] −2	[7] −6	[7] −7	30
9	O_4	[10] 9	[15] 1	[6] (10)	[9] 2	[1] (40)	50
	தேவை	40	20	50	30	40	180

(2,1) கூறில் [மீச்சிறு $(C_{ij}-\bar{C}_{ij}) < 0$] அமைவதால் (2, 1) கூறில் ஒதுக்கீடு செய்யவேண்டும். $\theta=10$ என அறியலாம்.

எனவே, θ–ன் பாதை ஒரு சுழல் மடி வளைவில் அமைகிறது.

$\theta=10$ எனக் கொண்டு அமையும் புதிய தீர்வை இப்போது எழுதலாம்.

u_i \ v_j		D	−7	−2	−6	−7	..
	தோற்றுவாய்	சேருமிடம்					இருப்பு
		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
11	O_1	[12] 11	[4] 4	[9] (25)	[5] (30)	[9] 4	55
8	O_2	[8] (10)	[1] (20)	[6] (15)	[6] 2	[7] 1	45
1	O_3	[1] (30)	[12] −6	[4] −1	[7] −5	[7] −6	30
8	O_4	[10] 8	[15] 1	[6] (10)	[9] 2	[1] (40)	50
..	தேவை	40	20	50	30	40	180

இங்கு $(C_{ij} - \bar{C}_{ij})$ மதிப்புகள் எல்லாமே >0 என்பதால் இதுவே பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வு எனத் தீர்மானிக்கின்றோம். இத் தீர்வின் கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு = மொத்தப் போக்குவரத்துச் செலவுத்தொகை $= Z = \sum_i \sum_j C_{ij}\, x_{ij}$.

$$Z = 9\,(25) + 5\,(30) + 8(10) + 1(20) + 6(15) + 1(30) + 6\,(10) + 1\,(40)$$

$$= 225 + 150 + 80 + 20 + 90 + 30 + 60 + 40$$

$= 595$ ரூபாய்.

எனவே, நாம் இதுவரை ஆரம்ப அடிப் படைப்பயனெளிவுடைய தீர்வுக்காக மூன்று முறைகளையும், பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண இரண்டு முறைகளையும் விவரமாக விளக்கியுள்ளோம். இங்குக் கொள்குறிச் சார்பலனை மீச்சிறுமமாக்கும் பெரிதும் உகந்த தீர்வையே கண்டுபிடித்தோம். கொள் குறிச்சார்பலனை மீப்பெருமமாக்கும் எந்த ஒரு போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு எப்படிப் பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண்பதென்று தீர்மானிப்போம். மீப்பெருமப் பிரச்சினைகளில் செலவு அணியில் உள்ள மிகப்பெரிய C_{ij} (இலாபம்) மதிப்பிலிருந்து மற்ற எல்லா C_{ij}-க்களையும் கழித்துக்கிடைக்கும் மாற்றம் செய்யப்பட்ட

C_{ij}-க்கள் சார்புடைய செலவுகளை (relative costs) குறிப்பதால், இஃது ஒரு மீச்சிறுமப் பிரச்சினை(minimization problem)யாகிறது. இந்த மாறிய மீச்சிறுமப் பிரச்சினைக்கு முன் விளக்கிய வழிகளில் பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் கண்டுபிடித்த பிறகு, அத் தீர்விற்கான வழித் தடங்களுக்கு மூல முதலான C_{ij} மதிப்புகளைப் புகுத்திச் சரியான கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பைக் காணலாம்.

போக்குவரத்துப் பிரச்சினையைச் சரிசமப்படுத்துதல்

சில சமயங்களில் $\Sigma a_i \neq \Sigma b_j$ ஆக இருந்தால், இப் பிரச்சினைக்கு எப்படித் தீர்வு காண்பது என்று அறியவேண்டும்.

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} > \sum_{j=1}^{n} b_j$ என்றால் தோற்றுவாய்களின் மொத்த இருப்புச் சேருமிடங்களின் மொத்தத் தேவைக்குமேல் இருந்தால் ஒரு போலியான (dummy) சேருமிடத்தைச் செலவு அணியில் ஒரு போலி நிரலாகக் கூட்டி அதிகப்படியான இருப்பைச் சரிக்கட்டலாம். இந்தப் போலி சேருமிடத்துக்கு ஒவ்வொரு தோற்றுவாயிலிருந்தும் அனுப்பப்படும் செலவு பூஜ்யம் எனக் கொள்ளலாம். இந்தப் போலி நிரலைச் சேர்த்தபின் $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ என்று மொத்த இருப்பு = மொத்த தேவை என்றாகிறது. எனவே, இப்போது மேற்படி முறைகளில் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணலாம்.

இதேபோல $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ என்றால், மொத்த தேவையானது மொத்த இருப்பைவிட அதிகம் என்பதால் ஒரு போலித் தோற்றுவாயைச் செலவு அணியில் கூட்டி $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ என்றவாறு இருப்பும் தேவையும் சமநிலையடையுமாறு செய்யலாம். இந்தப் போலித் தோற்றுவாயிலிருந்து ஒவ்வொரு சேருமிடத்துக்கும் (அனுப்ப ஆகும்) போக்குவரத்துச் செலவைப் பூஜ்யம் என அனுமானிக்கலாம். இச் சமயத்திலும் $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ என்பதால், போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் தீர்வை மேலே குறிப்பிட்ட ஏதாவது முறைகளில் காணலாம்.

உதாரணமாக கீழ்க் கண்ட பிரச்சினையை எடுத்துக் கொள்வோம்:

	D_1	D_2	D_3	இருப்பு
O_1	5	3	2	250
O_2	7	4	1	350
தேவை	225	175	150	

இங்கு $\sum_{i=1}^{2} a_i = 600 \quad \sum b_j = 550$

$\Sigma a_i > \Sigma b_j$ என்பதாலும் இருப்பு 50 அதிகப்படியாக இருப்பதாலும் புதிய போலிச்சேருமிடத்தை (D_4ஐ)க் கூட்டி கீழ்க் கண்ட சரிசமநிலையிலுள்ள பிரச்சினையாகக் கொள்வோம்.

	D_1	D_2	D_3	D_4 (போலி)	இருப்பு
O_1	5	3	2	0	250
O_2	7	4	1	0	350
தேவை	225	175	150	50	600

D_4 நிரல் போலிச் சேருமிடத்தைக் குறிப்பதால் இந் நிரலுக்கான செலவு தொகைகள் பூஜ்யமாகக் காட்டப் பட்டுள்ளன. இதேபோலத் தேவை அதிகமாயுள்ள பிரச்சினையைச் சரி சமப் படுத்தப் பின்வரும் உதாரணத்தைக் கவனிக்கவும்.

சமநிலையற்ற வடிவம்

	D_1	D_2	D_3	இருப்பு
O_1	5	3	2	250
O_2	7	4	1	350
தேவை	350	200	150	

சமநிலைப்படுத்திய வடிவம்

	D_1	D_2	D_3	இருப்பு
O_1	5	3	2	250
O_2	7	4	1	350
O_3 (போலி)	0	0	0	100
தேவை	350	200	150	700

1. இங்கு $\sum a_i < \sum b_j$ என்பதால், ஒரு போலியான தோற்றுவாய் நிரலை 0 செலவுத் தொகைகளுடன் கூட்டிச் சரிசமமான நிலையில் பிரச்சினையை வடிவப்படுத்தித் தீர்வு காண விழைகின்றோம்.

பயிற்சிகள்

ஒரு குழுமத்திடம் 4 பண்டகசாலைகளும் 6 விற்பனைக் கடைகளும் உள்ளன, ஒரு பொருள் 4 பண்டகசாலைகளில் கீழ்க்கண்டவாறு தேக்கமுற்று உள்ளன:

பண்டங்கள்	தேக்க அளவு
1	5
2	6
3	2
4	9
மொத்தம்	22

6 விற்பனைக் கடைகளுக்கு மொத்தமாக அப்பொருளின் 22 எண்கள் தேவைப்படுகின்றன. தனித்தனித்தேவைகளாவன:

விற்பனைக் கடை	தேவை
1	4
2	4
3	6
4	2
5	4
6	2
மொத்தம்	22

i-பண்டகசாலையிலிருந்து j-கடைக்கு ஓர் (எண்) அலகுப் பொருளைக் கொண்டு சேர்க்க ஆகும் போக்குவரத்துச் செலவைப் பின்வரும் அணியில் தெரிவித்துள்ளது.

விற்பனைக்கடைகள்

		1	2	3	4	5	6
	1	9	12	9	6	9	10
பண்டகசாலை	2	7	3	7	7	5	5
	3	6	5	9	11	3	11
	4	6	8	11	2	2	10

இப் பிரச்சினைக்கான ஓர் ஆரம்பக் கட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமையான தீர்வை (i) வடமேற்கு மூலை விதிமுறை (ii) வோகலின் தோராயமுறை (iii) ஆய்வு-தீர்ப்புமுறை இவற்றின் மூலம் காண்க. மூன்று முறைத் தீர்வுகளையும் ஒப்பிடுக.

2. கீழ்க்கண்ட செலவுத் தொகை அணி, தேவை, இருப்பு, அளவுகள், இவற்றைப் பயன்படுத்தி வடமேற்கு மூலை விதியில் ஆரம்பகட்ட அடிப்படைப் பயனெளிமையுடைய தீர்வையும், படி வளர்ச்சிக்காக வழிமுறையில் (stepping stone method) பெரிதும் உகந்ததோர் தீர்வைக் காணவும்.

					இருப்பு
	73	40	9	79	20	8
	62	93	96	7	13	7
	95	65	75	55	60	9
	59	57	26	12	68	3
	56	23	86	18	13	5
தேவை	6	8	10	4	4	

3. பயிற்சி 2ஐ வோகலின் தோராய முறைப்படி ஆரம்பத் தீர்வைக் கண்டுபிடித்து, மோடி முறையில் பெரிதும் உகந்த தொரு தீர்வைக் காணவும்.

4. குறிப்பிடப்பட்டுள்ள சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையை ஆய்வு–தீர்ப்பு முறையிலும், பிறகு மோடி முறையிலும் தீர்வு காணவும்.

						தேவை
6	4	8	4	9	6	4
6	7	13	6	8	12	5
3	9	4	5	9	13	3
10	7	11	8	11	10	9
இருப்பு 4	4	5	3	2	3	

5. பயிற்சி 4-ன் வடமேற்கு மூலை விதிமுறைத் தீர்வையும் படி வளர்ச்சிக்கான வழிமுறையின் பெரிதும் உகந்த தீர்வையும் கண்டுபிடித்துப் பயிற்சி 4-ன் தீர்வுகளுடன் ஒப்பீடு செய்க.

6. ஒரு துணிக் கடை பெண்டிர்களுக்கான விதவிதமான ஆடைகளைக் கீழ்க்கண்ட எண்ணிக்கைகளில் வாங்க விரும்புகிறது

ஆடைகளின் விதங்கள்	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
அளவு	150	100	75	250	200

4 உற்பத்தியாளர்கள் எல்லா விதங்களிலும் சேர்த்து ஆடைகளைக் கீழ்க்கண்ட மொத்த அளவுகளுக்கு மேற்படாமல் அளிப்பதற்கான ஒப்பந்தப் புள்ளிகளைத் தருகிறார்கள்.

உற்பத்தியாளர்கள் :	*W*	*X*	*Y*	*Z*
மொத்த அளவு :	300	250	150	200

உற்பத்தியாளர்களைப் பொறுத்து ஒவ்வோர் ஆடைக்குமான கடையின் இலாபத்தைக் கடை மதிப்பீட்டுக் கீழ்க்காணும் அணியில் கொடுத்தால், எவ்வாறு ஆடைகளுக்கான உத்தரவு (order) பிறப்பிக்கப்பட வேண்டும்?

	ஆடைகள்				
	A	B	C	D	E
உற்பத்தியாளர் W	2·75	3·50	4·25	2·25	1·50
X	3·00	3·25	4·50	1·75	1·00
Y	2·50	3·50	4·75	2·00	1·25
Z	3·25	2·75	4·00	2·50	1·75

[குறிப்பு: (i) F என்ற போலி நிரலை (ஆடை)யைப் பூஜ்ய லாப அளவுகளுடன் சேர்த்துக்கொண்டால் இப் பிரச்சினையில் $\Sigma_i a_i = \Sigma_j b_j$ என்ற சரி சம நிலை ஏற்பட்டுத் தீர்வு காணமுடியும்.

(ii) இஃது ஓர் இலாபப் பிரச்சினையாதலால் இலாபத்தை மீப்பெருமமாக்கும் இப் பிரச்சினையை, மீச்சிறுமமான பிரச்சினையாக மாற்ற, இலாபத் தொகைகளில் மிக அதிகமான இலாபத்திலிருந்து எல்லா இலாபத் தொகைகளையும் கழித்து நிகர இலாபத் தொகை அணியாக மாற்றித் தீர்வு காணவும்.]

7. நான்கு செயல்முறைத் தளங்களையும் (B) (operation bases) மூன்று குறியிலக்குகளையும் (targets) (T_j) கொண்ட ஒரு பிரச்சினையை எடுத்துக்கொள்வோம். ஆகாய விமானத்தில் வேறுபாடுகள் இருப்பதாலும், குறியிலக்கின் வீச்சும் (எல்லை), பறக்கின்ற உயரமும் வேறுபட்டு இருப்பதாலும், ஒவ்வொரு தளத்திலிருந்தும் ஒவ்வொரு குறியிலக்குக்கும் கொண்டுபோய்ச் சேர்க்கப்படும். (ஒவ்வொரு விமானத்துக்குமான) குண்டுகளின் டன் அளவுகளும் கீழ்க்கண்டவாறு மாறுபடுகின்றன:

செயல் முறைத் தளம் B_i \ குறியிலக்கு (T_j)	1	2	3
1	8	6	5
2	6	6	6
3	10	8	4
4	8	6	4

$= [C_{ij}]$

இங்கு C_{ij} = ஒவ்வொரு விமானத்திற்கும் குண்டுகளின் டன் அளவு.

ஒவ்வொரு தனித்தனித் தளத்தின் தினசரி இருப்பு அளவு
= 150 (உழிஞைத் தாக்குகள்)

சார்ட்டி : sortie : (உழிஞைத் தாக்கு)

ஒவ்வொரு தனித்தனி குறியிலக்கின் தினசரி தேவை அளவு
= 200 உழிஞைத் தாக்குகள்

எல்லா மூன்று குறியிலக்குகளுக்குமான மொத்த 'டன்' அளவுகளை மீப்பெருமமாக்க, ஒவ்வொரு தளத்திலிருந்தும் ஒவ்வொரு குறியிலக்குக்கும் எவ்வளவு உழிஞைத் தாக்குகள் ஒதுக்கீடு செய்யப்படவேண்டும் என்று கண்டுபிடி.

8. கீழ்க்கண்ட போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குப் படி வளர்ச்சிக்கான முறையிலும், மோடி முறையிலும் தீர்வு காணவும்.

	b_1	b_2	$_3b$	b_4	b_5	b_6	இருப்பு
a_1	2	0	4	0	5	3	4
a_2	1	6	6	0	1	6	3
a_3	0	7	0	2	4	0	2
a_4	2	6	5	4	1	3	4
a_5	4	1	4	0	3	4	2
தேவை	5	2	3	1	2	2	15

9. கீழே கொடுத்துள்ள பிரச்சினைக்கு மோடி முறையில் தீர்வு காணவும்:

(ஒவ்வோர் அலகிற்கும்) போக்குவரத்துச் செலவுத் தொகை அணி.

		ஊர்கள்				இருப்பு
		1	2	3	4	
தொழிற்சாலைகள்	1	23	24	16	18	30
	2	12	17	20	51	40
	3	22	28	12	32	35
தேவை		22	35	25	41	123

10. போக்குவரத்துச் செலவு அணி (ஓர் அலகிற்கு).

	சேருமிடங்கள்.						இருப்பு
தோற்றுவாய்கள்	5	3	7	3	8	5	3
	5	6	12	5	7	11	4
	2	8	3	4	8	2	2
	9	6	10	5	10	9	8
தேவை	3	3	6	2	1	2	

4. வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினை
(Assignment Problem)

ஒரு வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினையானது ஆள்களை வேலைகளுக்கு அல்லது அலுவலங்களுக்கு வகுத்து ஒதுக்குதலைப் (assigning) பற்றியதாகும். ஒப்படைப்பு வழித் தடங்களுக்குப் (delivery routes) பாரமேற்று ஊர்திகளை (trucks) வகுத்து அமைத்தல் அந்த ஊர்திகளுக்கு ஓட்டுநர்களை (driver) வகுப்பீடு செய்தல், வகுப்பு அறைகளுக்கு வகுப்புகளை ஒதுக்கிடுதல் போன்ற பலவித பிரச்சினைகளை வகுத்து ஒதுக்கிடுதலைப் பற்றிய படிப்பை ஒரு வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினை (assignment problem) என்று பொதுவாகக் கூறுகிறோம். வெறுமையான (empty) பாரமேற்று ஊர்திகளைச் சரக்குகள் தேவைப்படும் இடங்களுக்குப் பகிர்ந்தளிக்கும் முறையையும், அதேபோல பண்டகசாலைகளிலோ (ware house), ஆக்கத் தொழிலகங்களிலோ (factories) உள்ள சரக்குகளுக்குச் செயற் கட்டளைகளை வகுத்து ஒதுக்கும் முறையையும் ஒரு குறிப்பிடத்தக்க சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப்பிரச்சினை என வழங்குகின்றோம்.

இயந்திரங்களின் ஒற்றை மாற்று (alternative sets) தொகுதிகளைப் பயன்படுத்தி உற்பத்திப் பொருள்களை உண்டாகும் நிலையில் எந்த இயந்திரங்களைப் பயன்படுத்தலாம் எனத் தீர்மானிப்பது ஒரு பொதுவான ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினையாகிறது.

ஒரு தொழிற்சாலையில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் பயனெளிவான எத்தகைய தொகுதிகளை உற்பத்தி செய்வது என்பதைத் தீர்மானிப்பதும், ஒரு பொதுவான ஒதுக்கீட்டுப்பிரச்சினையாகும். இஃது ஓர் உற்பத்திக் கலவைப் பிரச்சினையாகிறது (product-mix problem).

வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினை (Assignment Problem)

பயனெளிவான ஓர் இட ஒதுக்கீட்டுச் செய்கையில் கடைசி கூறைத் (cell) தவிர மற்ற எந்தக் கூறின் மதிப்பும், நிரல் தேவைகளை (columns reqruirements) பூர்த்தி செய்து அதற்கான நிரையில் கிடைக்கக்கூடிய எல்லா வாய்ப்பு வளங்களையும் பயன்

படுத்தினால் அத்தகைய இட ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினையை ஓர் இனச்சிதைவான (degenerate) பிரச்சினை என்று கூறலாம்.

ஒரு வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினையிலோ ஒவ்வொரு வாய்ப்பு வளமும் ஒரே ஒரு வேலைக்குத்தான் பங்கீடு அளிக்கப்படுகிறது. அதேபோல் ஒவ்வொரு வேலைக்கும் ஒரே ஒரு வாய்ப்பு வளம் தான் தேவைப்படுகிறது. எனவே வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினையானது சரக்கு ஏற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் ஒரு முழுமையாக இனச் சிதைவு பெற்ற வடிவமாகிறது.

உதாரணமாக மாறுபட்ட 5 வேலைகளைச் செய்ய 5 ஆள்களை அமர்த்தவேண்டியுள்ளது. முன்னையப் பதிவேடுகளிலிருந்து (past records) ஒவ்வொரு வேலையையும் ஒவ்வோர் ஆளும் செய்து முடிக்க ஆகும் நேரங்களை $[a_{ij}]$ அணியில் தரப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். $C_{ij} = i$ஆவது ஆள் jஆவது வேலை செய்து முடிக்க ஆகும் நேரம் என்க. ஓர் ஆளுக்கு ஒரு வேலை ஒதுக்கப் பட்டால், $x_{ij} = 1$ என்று அர்த்தம். ஓர் ஆளுக்கு ஒரு வேலை ஒதுக்கப்படாதபோது $x_{ij} = 0$ ஆகும்.

எனவே, x_{ij}-ன் மதிப்பு 0 அல்லது 1 ஆக இருக்கிறது.

5 வேலைகளையும் 5 ஆள்களால் செய்து முடிக்கப்படும் நேரம்

$$Z = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} C_{ij}\, x_{ij} \text{ என்றால்,}$$

இந்த மதிப்பைக் காணும் நிபந்தனைக்கேற்ப மீச்சிறுமப்படுத்த வேண்டியது நமது பிரச்சினையாகிறது.

நிபந்தனைகள்

(i) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \ldots n$

(ii) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, 3 \ldots n$

(iii) $x_{ij} = 0$ அல்லது 1

கடைசி நிபந்தனையை $x_{ij} = x_{ij}^2$ என்றும் எழுதலாம் இந்தக் கடைசி நிபந்தனையை நீக்கிவிட்டு $x_{ij} \geqslant 0$ என்ற நிபந்தனையை எடுத்துக்கொண்டால், எல்லாத் தேவைகளும், எல்லா வாய்ப்பு வளங்களும் மதிப்பு 1-க்குச் சரியாக இருக்கின்ற ஒரு சரக் கேற்றுப் போக்குவரத்து பிரச்சினையாகிறது. ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வு x_{ij} என்பது ஒரு முழு எண் (integer) அல்லது பூஜ்யமாக இருக்கும். மேலும், இங்கு உள்ள ஒரே ஒரு முழு எண் 1 ஆகும். எனவே, சரக்கேற்றப் போக்குவரத்துப் பிரச்சனைக்கான தீர்வு $x_{ij} = x_{ij}^2$ என்ற மதிப்பைத் தானாகவே கொடுக்கும், எனினும் இனச் சிதைவால் (degeneracy) சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினை உபயோகமாக இராது. ஒரு வகுப்பீடு செய்யப் பட்டால் ஒரு நிரை நிரல் தேவையைத் தானாகவே (automatic) திருப்தி செய்து பூஜ்யமற்ற $(2n - 1)$ மதிப்புகள் x_{ij}-களுக்குப் பதிலாக n மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கிறோம். மீதமுள்ள $(n-1)$ இடங்களுக்கு $\in$ மதிப்பைப் போட்டு நிரப்பினால், பூஜ்யமற்ற x_{ij} மதிப்புகள் ஓர் உகந்த தீர்வைக் கொடுத்திருக்கமுடியும். ஆனால், $\in$ மதிப்புகள் தவறான இடங்களில் போடப்பட்டிருப்பதால் தீர்வு உகந்தது ஆகாது என நிரூபித்துவிடலாம்.

உதாரணம் : ஒரு வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினை

ஆள்கள்	வேலைகள்					கிடைக்கக் கூடியவை
	1	2	3	4	5	
1	2	9	2	7	1	1
2	6	8	7	6	1	1
3	4	6	5	3	1	1
4	4	2	7	3	1	1
5	5	3	9	5	1	1
தேவையானவை	1	1	1	1	1	5

தீர்வு முறைகள் இரண்டு சுலபமான தேற்றங்களைச் சார்ந்துள்ளது. c_{ij} அணியின் எந்த நிரையிலோ எந்த நிரலிலோ ஒரு மாறிலியைக் கூட்டினுலோ கழித்தாலோ தீர்வு மாருது என்பது முதல் தேற்றம் மூலம் விளங்கும்.

தேற்றம் 1.

$x_{ij} \geqslant 0,$

$\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij}$ என்றதற்குகந்த

$x_{ij} = X_{ij}$ மதிப்பானது எல்லா x_{ij}-க்களின் மீதும்

$Z = \sum_i \sum_j x_{ij}\ c_{ij}$ஐ மதிப்பை மீச்சிறுமமாக்கினுல்,

$Z = \sum \sum x_{ij}\ c_{ij}$ மதிப்பும் மீச்சிறுமமாகிறது.

இங்கு $c_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

எல்லா i, j மதிப்புகளிலும் $i, j = 1, 2, \dots \dots \dots n$

u_i என்பது iஆவது நிரையில் ஏதாவது ஒரு மாறிலி.

v_j என்பது jஆவது நிரலில் ஏதாவது ஒரு மாறிலி என்க.

தேற்றம் 2.

எல்லா $C_{ij} \geqslant 0$ எனவும்

மேலும், $\sum_i \sum_j x_{ij}\ c_{ij} = 0$ என்றவாருன

$x_{ij} = X_{ij}$ என்பது ஒரு மதிப்புத் தொகுதியாகவும்

இருப்பின் Z' என்ற முன்னேற்றத் தீர்வு ஒரு பெரிதும் உகந்ததோர் தீர்வாகும்,

நிரூபணம் :

$$Z' = \sum \sum (C_{ij} - u_{ij} - v_j)\ x_{ij} \text{ என்ருல்}$$

$$= \sum \sum C_{ij}\ x_{ij} - \sum u_i \sum x_{ij} - \sum V_j \sum_j x_{ij}$$

$$Z = -\sum u_i - \sum v_j$$

Z-லிருந்து Z' கிடைப்பதற்குக் கழிக்கப்படும் கூறுகள் (terms) x_{ij}–க்களைச்சாராமல் உள்ளதால், Z மீச்சிறுமாக்கும் போதெல்லாம் Z'–ம் மீச்சிறுமமாகின்றது. இதே போல முடிவு தரவாகத் தரவு முடிவாக மாறிய நிலையும் (converse) அல்லது மறுதலையும் உண்மையாகிறது.

முன்னே எழுதிய உதாரணத்துக்குத் தீர்வு காண நாம் இப்போது முற்படுவோம்.

பூஜ்யம் மதிப்புடன் ஒரு தீர்வை அடைவதற்கு ஏற்றவாறு போதுமான (sufficient) c_{ij}–க்களைப் பூஜ்யமாக்கவேண்டியுள்ளது. இதற்கு நிரைகளுக்கும் நிரல்களுக்கும் தகுந்த மறுவியை வேண்டிய அளவு c_{ij}–க்களை பூஜ்யமாக்கப்படும் வரை கூட்டியோ கழித்தோ செய்யும் முறையின்மூலம் தீர்வை அடைய முடியும். இப்போது ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்தும் அதனுள்ளிருக்கும் மிகச் சிறிய மதிப்பைக் கழித்து எழுதினால் ஒரு பூஜ்யம் அந்த நிரையில் கிடைக்கும். இதேபோல ஒவ்வொரு நிரலுக்கும் செய்வோம்.

அட்டவணை 2.

	1	2	3	4	5	கழிக்கப்பட்டது
1	1	8	1	6	0	1
2	5	7	6	5	0	1
3	3	5	4	2	0	1
4	3	1	6	2	0	1
5	4	2	8	4	0	1
						5

அட்டவணை 3

	1	2	3	4	5	கழிக்கப் பட்டது
1	0	7	(0)	4	0	1
2	(4)	6	5	3	0	1
3	2	4	3	(0)	0	1
4	2	(0)	5	0	0	1
5	3	1	7	2	(0)	1 = 5
கழிக்கப் பட்டது	1	1	1	2	1	6+5 = 11 மொத்தம்

நிரைகளிலிருந்தும் நிரல்களிலிருந்தும் மொத்தம் 11 மதிப்புகள் கழிக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, அட்டவணை 3ஐப் பயன்படுத்திக்காணப்படும் தீர்வில் சரியான மதிப்பீடுக்காக 11ஐக் கூடிக்கொள்ளவேண்டும்.

எந்தக் கூறுகளிலும் பூஜ்யம் மதிப்புகள் உள்ளதோ அவற்றைப் பயன்படுத்திக் காணும் தீர்வு சிறந்ததாக இருக்கும். சரிசமமான நல்ல தீர்வுகள் பல இருக்கலாம். ஒரு பயனெளிமையான நல்ல தீர்வை 3 ஆவது அட்டவணை கூறுகளில் வட்டமிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதைவிடச் சிறந்ததோர் தீர்வை நாம் காண்பதற்குக் கீழ்கண்ட விதிகளைப் பின்பற்றலாம்.

1. எல்லா பூஜ்யங்களையும், குறைந்தபட்சம் ஒருதடவையாவது உள்ளடக்குவதற்குத் தேவையான மிகக் குறைந்த படுக்கைக் கோடுகளையும் குத்துக் கோடுகளையும் வரைக,

[பொதுவாக, தீர்வு கிடைக்காதபோது எல்லா $n \times n$ அணிகளிலும் nஐவிடக் குறைவாகக் கோடுகளில் பூஜ்யங்களை மட்டும் உள்ளடக்கலாம் எனக் காட்டமுடியும். (ஒற்றை மாற்றாக (conversely) குறைந்த படியாக n கோடுகள் இருப்பின் ஒரு தீர்வு கிடைக்கிறது.

அட்டவணை 4.

	1	2	3	4	5
1					
2	4	6	5	3	
3					
4					
5	3	1	7	2	

அட்டவணையில் 4 கோடுகள் மட்டுமே இருப்பதைக் காண்க. (இந்த 4 கோடுகளிலும் எல்லாப் பூஜ்யங்களும் அடையப்பட்டுள்ளன.) எனவே, பூஜ்யக் கூறுகளுக்கிடையே பெரிதும் உகந்த தீர்வு கிடைக்காது.

(2) கோடுகளில் அடைபடாத மதிப்புகளில் மிகச் சிறிய எண்ணைத் தேர்ந்தெடு. இங்கு அந்த எண் 1 ஆகும். இவ்வெண் (5,2) கூறில் உள்ளது. [5 ஆவது நிரை 2 ஆவது நிரலில் உள்ள எண்.]

(3) கோடுகளின் அடைபடாத மதிப்புகளிலிருந்து இந்த எண்ணைக் கழிக்கவும். அதேபோல இரண்டு கோடுகள் சந்திக்கும் [வெட்டும்] இடங்களிலுள்ள மதிப்புகளுக்கு இவ் வெண்ணைக் கூட்டவும். இந்த மாதிரிக் கணக்கில், இவ்வாறு செய்தால் அட்டவணை (5) கிடைக்கிறது. இம் முறையில் இல்லாதவாறுன பூஜ்யம் மதிப்பு இன்னேர் இடத்தில் கிடைக் கிறது. அது (5,2) இடத்தில் அல்லது கூற்றில் (cell) அமைகிறது.

அட்டவணை 5.

	1	2	3	4	5
1	0	7	0	4	1
2	5	7	6	4	0
3	2	4	3	0	1
4	2	0	5	0	1
5	2	0	7	3	0

4. பூஜ்யங்களின் புதிய தொகுதியிலிருந்து ஒரு தீர்வு கிடைக்குமா என முயலவும். அப்படிப்பட்ட தீர்வு கிடைக்க வில்லை. எனவே, விதிமுறை 1ஐத் (Step or Rule) திரும்பச் செய்து தீர்வு கிடைக்கும் வரை முயலவேண்டும்.

அட்டவணை 6.

	5	6
	2	3
	2	5
	2	7

இங்கு 4 கோடுகள் எல்லாப் பூஜ்யங்களையும் உள்ளடக்கு கின்றன. கோடுகளில் அடைபடாத மிகச் சிறிய எண் 2 என்று அட்டவணை 6-ன் மூலம் அறிகிறோம். விதிமுறை 3ஐப் பின்பற்றி அட்டவணை 7ஐ அடைகிறோம்.

	1	2	3	4	5
1	0	9	(0)	6	3
2	3	7	4	4	(0)
3	0	4	1	(0)	1
4	0	(0)	3	0	1
5	(0)	0	5	3	0

அடைப்புக் குறிகளில் குறிக்கப்பட்டவாறான ஒரு தீர்வை இங்கு நாம் காண்கின்றோம். இதன் மதிப்பு 13 ஆகிறது. ( ) குறியிட்ட இடங்களில் மதிப்புகளைக் (அட்டவணை 1 ஐப் பார்த்து) கூட்டினால் மொத்த நேரம் 13 மணிகள் என்று தெரிகிறது. $(2+1+3+2+5=13)$ அட்டவணை 2 அதாவது தொடங்குகின்ற பயனெளிமையான தீர்வின் (initial feasible solution) மதிப்பு $(2+6+3+2+1=14)$. 14ஐ விட மேலே கண்ட தீர்வின் மதிப்பு 13 குறைவாக இருப்பதால் அதுவே (அட்டவணை 7-ன் மூலமான தீர்வு)பெரிதும் உகந்த தீர்வாகிறது.

இத் தீர்வை எந்த ஆளுக்கு எந்த வேலை என்று அடைப்புக் குறியின் மூலம் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுகிறோம்.

(1,3), (2,5), (3,4), (4,2), (5,1) அதாவது 1ஆம் ஆளுக்கு 3ஆவது வேலையும், 2ஆம் ஆளுக்கு 5ஆவது வேலையும், 3ஆவது ஆளுக்கு 4ஆவது வேலையும், 4ஆம் ஆளுக்கு 2ஆவது வேலையும், 5ஆவது ஆளுக்கு 1ஆவது வேலை என்ற கணக்கில் வேலைகள் வகுப்பீடு (assignment) செய்யப்படுகின்றன

மேலே குறித்த விதி முறைகளில் 3ஆவது விதி முறையானது சில நிரைகளிலிருந்து கழித்தும், சில நிரல்களுக்கு கூட்டியும் சமமான ஒரு முறை என்பதையும், தேற்றம் 1 இங்குப் பயன் படுகிறது என்பதையும் காண்கிறோம்.

சுருக்கத் திரட்டு (Summary)

ஓர் இட ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினையானது, வேலைகளின் தொகுதியைச் செய்து முடிக்கத் தரப்பட்ட வாய்ப்பு வளங்களை எந்தச் சிறந்த முறையில் பயன்படுத்தலாம் என்பதைப் பற்றிய ஒரு படிப்பாகும். இங்கு இரு சார்புடைய (relatively simple) சுலபமான இட ஒதுக்கீட்டு முறைகளை அதாவது சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினை, வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினை இவற்றைக் கவனித்து ஆராய்வோம்.

ஒரு சரக்கேற்றுப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினை (அல்லது பகிர்ந் தளிப்புப் பிரச்சினை) ஒன்றோ அதற்கு மேற்பட்டதோவான வாய்ப்பு வளங்களை அவை தேவைப்படும் வேலைகளுக்கு இட ஒதுக்கீடு செய்யப்படுவதைக் குறிக்கிறது.

பலவழிகளில் வாய்ப்புவளங்களைப் பயன்படுத்தி வேலைகளைச் செய்து முடிக்கும் தருணங்களில் இந்தச் சரக்கேற்றுப் போக்கு வரத்துப்பிரச்சினை பயன்படுகிறது. வகுப்பீட்டுப் பிரச்சனைகளைப் போல இங்கும் வாய்ப்பு வளங்களையோ அல்லது வேலைகளையோ எந்த விதத்தில் கூடுதல் அல்லது கழித்தல் செய்ய முடியும் என்பன போன்றதைத் தீர்மானிக்கலாம்.

வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினையானது வாய்ப்பு வளங்கள், வேலைகள் இவற்றின் ஒரே விதமான (Unique) ஒன்றுக்கொன்றான (one-to-one) சோடிகளைக் காணுதல் ஆகும். இவ்வாறு காணப்படும் ஜதைகளின் செயல்நிறைவேற்ற அளவுகளின், கூட்டலை மீச்சிறு மமாக்கும் வகையில் வகுப்பீடு (measures of performance) செய் யப்படுவதே வகுப்பீட்டு பிரச்சினையாம்.

செய்ய முடிவுகின்ற வேலைகளுக்கு செய்யப்பட வேண்டிய வேலைகள் அதிகமாக இருப்பின், எந்த வேலைகளைச் செய்யாது ஒழிக்கலாம் அல்லது என்ன வாய்ப்புவளங்களை கூட்டலாம். என்பதை நாம் தீர்மானிக்க வேண்டியதாகிறது. எனவே வகுப்பீட்டுப் பிரச்சனைப் பகிர்ந்தளிப்பீட்டுப் பிரச்சனை இவை யிரண்டும்பொதுவான இட ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சனையின் சில தனிப்பட்ட வகைமுறைகளாகும்.

வகுப்பீட்டுப் பிரச்சினைத் தீர்வுக்கான ஹங்கேரியன் முறை (Hungarian Method)

1. செலவு அணியின் (cost matrix) ஒவ்வொரு நிரையிலி ருந்தும் மிகச் சிறிய மதிப்பைக் கண்டு பிடித்து அதை அந்த நிரையின் எல்லா மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்கவும்.

2. விதிமுறை 1-ன் மூலம் கிடைக்கப்பட்ட அணியிலிருந்து ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்தும் மிகச்சிறிய மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து அதை அந்த நிரலின் எல்லா மதிப்புகளிலிருந்தும் கழித்துவிடவும்.

3. விளைபயன் அணியில் (resulting matrix) ஒவ்வொரு நிரையிலும் ஒவ்வொரு நிரலிலும் குறைந்த பட்சம் ஒரு பூஜ்ய மாவது இருக்கும் என கண்கூடாகத் தெரிகிறது.

4. மூல முதலான (Original) செலவு அணி C_0-ன் மூலம் கிடைக்கும் பெரிதும் உகந்த வகுப்பீடும் மாற்றி யமைக்கப்பட்ட (modified) செலவு அணி C_1-ன்மூலம் கிடைக்கும். ஒரு பெரிதும் உகந்த வகுப்பீடாகவும் உள்ளது என்பன தெள்ளத் தெளிவாகக் காணலாம். இதையே நிலை எதிர் மாருகவும் (Vice-Versa) கூறலாம்.

C_1-அணியில் எல்லா மதிப்புகளும் $\geqslant 0$ என்பதால் ஒவ்வொரு வகுப்பீடுக்குமான செலவு $\geqslant 0$ ஆக இருக்கும் என்பதில் ஐயமில்லை. எனவே, செலவு பூஜ்யமாக இருக்கக்கூடிய வகுப்பீடு தான் பெரிதும் உகந்ததாக இருக்கும். மாறியமைக்கப்பட்ட செலவில் அணியில் காணப்படும் பூஜ்யக் கூறுகளில் (Zero Cells) இட ஒதுக்கீடு செய்யப்படும் வகையில் ஒரு வித வகுப்பீடு கிடைக்குமோ எனத் தெரிந்தறிய கீழ்க்கண்ட 5 ஆவதுவிதி முறையைக் கவனிப்போம்.

5. ஒரே ஒரு குறிப்பிடப்படாத பூஜ்யம் கொண்ட ஒரு நிரையைக்காணும் வரை மாற்றியமைக்கப்பட்ட ஒரு செலவுஅணியின் நிரைகளைத் தொடர்ந் தேர்ச்சியாக ஆராயவேண்டும். ஒதுக்கீட்டைப் பொருந்துகிற நிலையில் காட்டுவதற்கு இந்தப் பூஜ்யத்தை ▭ என்ற கட்டத்திஞல் குறிக்கவும்.

ஒரு நிரலில் ஒரே ஓர் இட ஒதுக்கீடுதான் இருக்க (அதாவது ஒரு வேலையை ஒரே ஒரு கான்ட்ராக்டருத்தான் தர முடியும்) முடியும் என்பதால் அந் நிரலில் உள்ள மற்ற எல்லா பூஜ்யங்களையும் மற்ற ஒதுக்கீடுகளுக்குப் பயன்படுத்தமுடியாது என்பதைக் காட்டுவதற்கு அந்த நிரலில் மற்ற எல்லாப் பூஜ்யங்களையும் "×" பெருக்கல் குறியிஞல் குறிக்கவும். எல்லா நிரைகளும் அடைந்து முடியும்வரை இவ்விதத்தில் செயலாற்றுகிரும்.

ஆரம்பத்தில் எல்லா நிரைகளும் குறிக்கப்படாமலுள்ளன. அணியின் மேல் மட்டத்தில் ஒரு பூஜ்யம் கொண்ட ஒரு முதல் நிரையிலிருந்து ஆரம்பிக்கிரும்.

6. அடுத்தபடியாக நிரைகளை ஆராய்ந்து ஒற்றையான குறியிடப்படாத பூஜ்யங்களை (single unmarked zeros) தேடிப் பிடித்து அவற்றை □ என்ற கட்டத்தில் குறித்தும் அந்தப் பூஜ்யத்திற்கான நிரையில் உள்ள மற்ற எல்லாக் குறியிடப்படாத பூஜ்யங்களையும் '×' பெருக்கல் குறியினுல் குறிக்கிருேம். விதிமுறைகள் (5)ஐயும் (6)ஐயும் கீழ்கண்டபடி இரண்டில் ஒன்று நிகழும் வரை தொடர்ந்தாற்போல் திரும்பத் திரும்பச் செய்யவும்.

(a) எந்த ஒரு பூஜ்யமும் குறியிடப்படாமல் விடுபடக் கூடாது. அல்லது

(b) மிச்சமுள்ள குறியிடப்படாத பூஜ்யங்கள் ஒவ்வொரு நிரை நிரலிலும் குறைந்தபட்சம் இரண்டு இருக்க வேண்டும்.

7. (b) முறையில் இருந்தால், (6) ஆவது விதிமுறையின் கடைசியில் குறியிடப்படாமல் விட்டுவைக்கப்பட்ட பூஜ்யங்களில் ஒன்றை □ என்று கட்டமிட்டுக் குறிக்கவும்.

அந்த நிரல் நிரையிலுள்ள மீதமுள்ள பூஜ்யங்களை "×" பெருக்கல் குறியிட்டுக் குறிக்கவும்.

(5), (6) விதிமுறைகளைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்வதன் மூலம் மாற்றியமைக்கப்பட்ட செலவு அணியில் உள்ள எல்லாப் பூஜ்யங்களையும் குறியிட்டு முடிக்கும் வரையில் தொடர்ந்து செயலாற்றுகிருேம்.

8. இப்போது அணியில் உள்ள எந்த ஒரு பூஜ்யமும் குறிப்பிடப்படாத நிலையில் இல்லை என்ருல், நாம் செய்துமுடித்த ஒதுக்கீடுகள் ஒரு முழுமையான வகுப்பீடு ஆக இருக்கின்றதா என்று ஆராயவேண்டும். அப்படி இருந்தால் நாம் நமது பிரச்சினைக்குப் பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வைக் கண்டுபிடித்து விட்டதாக அர்த்தம். அப்படி இல்லாவிட்டால் மேலும் சில பல பூஜ்யங்களை உருவாக்குவதற்காக (generate) செலவு அணியில் மாற்றம் செய்து அதாவது நிரைகளிலும், நிரல்களும் மாறிலிகளைக் (constants) கூட்டியோ கழித்தோ திரும்பவும் அணியை மாற்றியமைக்கவேண்டும்.

9. இட ஒதுக்கீடுகள் (allotments) செய்யப்படாத எல்லா நிரைகளையும் (√) என்று குறிக்கவும்.

10. குறிப்பிடப்பட்ட நிரைகளில் உள்ள பூஜ்யங்களைக் கொண்ட நிரல்கள் இதுவரை குறியிடப்படாமலிருந்தால் அந்த நிரல்களை (√) என்று குறிக்கவும்.

11. குறியிடப்பட்ட நிரல்களில் இட ஒதுக்கீடுகள் (allocation) செய்யப்பட்ட நிரைகள் இதுவரை குறியிடப்படாமலிருந்தால் அந்த நிரல்களை (√) என்று குறிக்கவேண்டும்.

12. குறியிடப்படும் தொடர் (chain of marking) பூர்த்தியாகும் வரை (10), (11) விதி முறைகளைத் திரும்பத் திரும்ப மேற்கொள்ளவேண்டும்.

13. இப்போது குறியிடப்படாத எல்லா நிரைகளின் வழியாகவும் குறியிடப்பட்ட எல்லா நிரல்களின் வழியாகவும் கோடுகள் போடவும் (வரையவும்). அணியில் எல்லாப் பூஜ்யங்களும் கோடுகளுக்குள் இருப்பதை நாம் காண்கின்றோம். மொத்த கோடுகளின் எண்ணிக்கை மொத்த இட ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சரியாக இருக்கும்.

14. அணியின் உறுப்புகளை ஆராய்ந்து அவை கோடுகளில் அமைகிறதா அல்லது இல்லையா என்று சொல்லவும். கோட்டில் அமையாத உறுப்புகளை மீச்சிறுமமான 'θ' மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுத்து கோட்டில் அமையாத எல்லா உறுப்புகளிலிருந்தும் 'θ' மதிப்பைக் கழிக்கவும். இரண்டு கோடுகள் சந்திக்குமிடத்திலுள்ள மதிப்புகளில் 'θ' மதிப்பைக் கூட்டவும். அணியின் மற்ற உறுப்புகளின் மதிப்புகளை மாற்றக்கூடாது. இவ்வாறு மாற்றியமைக்கப்பட்ட அணியை C_2 என்று குறிக்கிறோம்.

இந்த மாற்றியமைக்கப்பட்ட அணிக்கு ஒரு பங்கீடு கண்டுபிடித்து அந்தத்தீர்வு பெரிதும் உகந்ததாயின், அத் தீர்வினால் ஏற்படும் மீச்சிறு செலவைக் கணிக்கவும். இந்த ஹங்கேரியன் முறையில் ஒரு பிரச்சினையை அணிகுவோம்.

மாதிரி கணக்கு 2.

5 வேலைகளை 5 இயந்திரங்களில் செய்யக்கூடிய ஒரு பிரச்சினையில் செயற்பாங்கிற்கான நேரங்கள் ஒவ்வோர் இயந்திரத்திற்கும் மாறுபடுகின்றன. அந்த நேரங்களைக் கீழ்க்கண்ட அணியில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. எந்த இயந்திரத்தில் எந்த வேலை செய்யவேண்டும் என்ற (பங்கீடு) முறையைக் கண்டுபிடித்து மொத்த மீச்சிறும நேரத்தைக் கணிக்கவும்.

வேலை / இயந்திரம்	1	2	3	4	5
A	11	17	8	16	20
B	9	7	12	6	15
C	13	16	15	12	16
D	21	24	17	28	26
E	14	10	12	11	15

தீர்வு :

இது ஒரு பங்கீட்டுப் பிரச்சினையாகும். இங்கு மொத்தம் 51=120 வழிகளில் பங்கீடுகள் செய்யலாம். மீச்சிறும நேரத்திற்கான ஒரு பெரிதும் உகந்த தீர்வை ஹங்கேரியன் முறையில் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம். ஒவ்வொரு குறியிலிருந்து மீச்சிறு மதிப்பைக் கழித்து எழுதினால் 2 ஆவது மாற்று அணியைக் கீழே காணுமாறு கிடைக்கிறது.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 9 & 0 & 8 & 12 \\ 3 & 1 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 7 & 0 & 11 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}$$

ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்து மீச்சிறு மதிப்பைக் கழித்தால் கிடைக்கும் 3ஆவது அணி.

2	9	0	8	8
2	1	6	0	5
0	4	3	0	0
3	7	0	11	5
3	0	2	1	1

இப்போது ஒவ்வொரு நிரையிலும் நிரலிலும் குறைந்த பட்சம் ஒரு பூஜ்யமாவது இருக்கிறது.

இங்கு ஒவ்வொரு நிரை நிரலிலும் ஒரே ஒரு பூஜ்யம் மட்டும் இருந்தால் அந்த பூஜ்யங்கள் இருக்கும் (இடங்களில்) பங்கீடு செய்கின்றோம். எனினும், ஏதாவது ஒரு நிரையிலோ, அல்லது நிரலிலோ ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்யம் இருப்பின் எந்தப் பூஜ்யம் உள்ள (இடத்தில்) கூறில் பங்கீடு செய்யலாம் எனத் தீர்மானிக்க வேண்டியதாகிறது, இங்கு மூன்றாவது நிரையில் 3 பூஜ்யங்களும் 3, 4ஆவது நிரல்களில் ஒவ்வொன்றிலும் 2 பூஜ்யங்களும் உள்ளன, எனவே எந்தெந்த நிரைகள், நிரல்களில் ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதோ அங்கெல்லாம் □ என்று கட்டமிட்டு அந்தந்த ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்ட நிரல்களில் அல்லது நிரைகளில் உள்ள மற்ற பூஜ்யங்களை × என்ற பெருக்கல் குறியிட்டு அணியைக் கீழ்கண்டவாறு எழுதுகிறோம்:

2	9	[0]	8	8
2	1	6	[0]	5
[0]	4	3	×0	×0
3	7	×0	11	5
3	[0]	2	1	1

இத்தகைய A—3, B—4, C—1, E—2 என்ற பங்கீடு முழுமையற்றது. ஏனெனில், Dஐப் பற்றிய விபரம் இல்லை. எனவே இட ஒதுக்கீடு செய்யப்படாத நிரைகள் இங்கு ஒன்றுதான். அது 4ஆவது நிரை.. அந்த 4ஆவது நிரையை √ என்று குறிக்கவும்.

குறிக்கப்பட்ட நிரையில் உள்ள ஒரே ஒரு பூஜ்யத்தைக் கொண்ட நிரல் 3ஆவது நிரலாகும். இந்த 3ஆவது நிரலை √ என்று குறிக்கவும். இந்த நிரலின் ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்ட நிரல் 1ஆவது நிரல். இது இன்னமும் குறியிடப்படாமலிருப்பதால் அந்த 1ஆவது நிரையையும் √ என்று குறிக்கவும்.

இந்த 1ஆவது நிரையில் உள்ள ஒரு பூஜ்யம் ஒன்றே ஒன்றுதான். அதுவும் ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டுள்ளதால் இத்துடன் இந்தக் குறியிடப்படும் தொடர் (chain of marking) முடிகிறது. எனவே, எப்போது குறியிடப்படாத எல்லா நிரைகளின் மீதும் குறியிடப்பட்ட எல்லா நிரல்களின் மீதும் கோடுகள் (கிழிக்கவும்) போடவும் √ கிடைப்பது கீழ்கண்ட தோற்றம்.

2	9	[0]	8	8	√
2	1	6	[0]	5	
[0]	4	3	⊗	⊗	
3	7	⊗	11	5	√
3	[0]	2	1	1	
		√			

இங்குக் குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கையான கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளது. மேலும் எல்லாப் பூஜ்யங்களும் இக் கோடுகளில் அமைந்து காணப்படுகின்றன.

இப்போது கோடுகளில் அமையாத மதிப்புகளில் மீச்சிறும மதிப்பு 2 ஆகிறது. இந்த மிகச் சிறிய மதிப்பு உள்ள கூறில் நாம் ஒரு பங்கீடு செய்யப் போகிறோம். எப்படி எனில், இந்த மதிப்பு 2ஐக் கோட்டில் அமையாத எல்லாக் கூறு மதிப்புகளிலிருந்தும் கழித்து இரு கோடுகள் சந்திக்கும் இடங்களில் உள்ள மதிப்பு

களில் உஐக் கூட்டியும், மற்ற இடங்களிலுள்ள கூறு மதிப்புகளை மாற்றுமல் அப்படியே எழுதினுல் கிடைப்பது

0	7	0	6	6
2	1	8	0	5
0	4	5	0	0
1	5	0	9	3
3	0	4	1	1

இப்போது முன்போலவே பங்கீடு செய்வோம். அதாவது ஒரு பூஜ்யம் கொண்ட நிரைகளிலும் நிரல்களிலும் பங்கீடு செய்து அதே சமயத்தில் குறியிடப்பட்ட நிரல்களிலும் நிரைகளிலும் உள்ள மற்ற பூஜ்யங்களை நீக்கி விடலாம். அத்தகைய (பங்கீடுகள்) குறியீடுகளை கீழ்க் கண்ட அணி மூலம் குறிக்கிருேம்.

[0]	7	~~0~~	6	6
2	1	8	[0]	5
~~0~~	4	5	~~0~~	[0]
1	5	[0]	9	3
3	[0]	4	1	1

இப்போது பங்கீடு முழுமையானதாக உள்ளது. அதாவது $A—1$, $B—4$, $C—5$, $D—3$, $E—2$ என்பது ஒரு பெரிதும் உகந்த பங்கீடு ஆகும்.

[எனவே, 5 இயந்திரங்களில் 5 வேலைகளைச் செய்து முடிக்க கண்டுபிடிக்கப்பட்ட] இத்தகைய பெரிதும் உகந்த பங்கீட்டினுல் ஏற்படும் மொத்த மீச்சிறும நேரம் $=11+6+16+17+10=60$ மணிகள் ஆகும் எனத் தெரிகிறது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1, ஒரு துறைத் தலைவரிடம் 4 கீழ்பணியாளர்கள் (subordinates) உள்ளனர். 4 வேலைகள் செய்யப்படவேண்டியுள்

ளன. கீழ் பணியாளர்கள் தங்கள் திறமையில் வேறுபட்டுள்ளனர் வேலைகளும் அவற்றின் உள்ளியல்பான இடர்ப்பாட்டில் (intrinsic difficulty) வேறுபடுகிறது. ஒவ்வொரு பணியாளும் ஒவ்வொரு வேலையும் செய்துமுடிக்கும் நேரத்தைத் தலைவர் மதிப்பிட்டு அம் மதிப்பீடுகளைக் கீழ்க்கண்ட பயனுறுதி அணியின் (effectiveness matrix) மூலம் காட்டியுள்ளார். ஓர் ஆளுக்கு ஒரு வேலை என்ற கணக்கில் மொத்த மனித நேரங்களை மீச்சிறுமமாக்கக் கூடியவாறு எவ்வாறு வேலைகளைப் பங்கீடு செய்ய வேண்டும் எனத் தீர்மானி.

ஆள்கள் / வேலைகள்	1	2	3	4
1	7	25	16	10
2	12	27	3	25
3	39	20	19	16
4	18	25	23	9

2. ஒரு தேசிய வாடகை ஊர்தி நிலையம் 1, 2, 3, 4, 5, 6, என்ற 6 நகர்களில் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு உபரியான (surplus) ஊர்தி வைத்துள்ளது. அதேபோல 7, 8, 9, 10, 11, 12 என்ற 6 நகர்கள் எவ்வொன்றிலும் ஓர் ஊர்தி பற்றுக் குறையாகக் காணப்படுகிறது. ஓர் உபரியுடைய நகர்களுக்கும், ஒரு பற்றுக் குறையுடைய நகர்களுக்கும் இடையேயுள்ள தூரங்கள் கீழே ஓர் அணியில் தரப்பட்டுள்ளன. பிரயாணம் செய்யும் மொத்த மைல் தூரங்களை மீச்சிறுமமாக்குமாறு ஊர்திகளை எந்த விதங்களில் அனுப்பலாம்?

		நகரங்களுக்கு					
		7	8	9	10	11	12
	1	41	72	39	52	25	51
	2	22	29	49	65	81	50
நகரங்களிலிருந்து	3	27	39	60	51	32	32
	4	45	50	48	52	37	43
	5	29	40	39	26	30	33
	6	82	40	40	60	51	30

3. ஒரு பங்கீட்டுப் பிரச்சினையில் ஒரு பயனுறுதி அணியில் ஒரு நிரையின் ஒவ்வொரு மதிப்பிலும் ஒரு மாறியைக் கூட்டினால், முதல் அணியின் மொத்த பயனுறுதியை மீச்சிறுமமாக்கும் ஒரு பங்கீடு, மற்ற அணிகளிலும் மொத்தப் பயனுறுதியை (effective-ness) மீச்சிறுமமாக்குகிறது என்ற தேற்றத்தை நிரூபிக்கவும்.

4. கீழ்கண்ட பங்கீட்டுக் (பிரச்சினை) கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்.

(a)

8	4	2	6	1
0	9	5	5	4
3	8	9	2	6
4	3	1	0	3
9	5	8	9	5

b)

5	0	6	8	7	4
5	2	3	0	6	7
3	4	4	3	5	2
3	9	7	2	7	6
9	8	7	8	4	5
1	8	7	4	2	3

5. கீழ்க்காணும் பங்கீட்டுப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண்.

		வேலைகள் 1	2	3
	1	5	4	7
மனுதாரர்கள்	2	6	7	3
	3	8	11	2

6. செலவு விவரம் தரப்பட்ட 4×4 அணிக்கான பங்கீட்டுக் கணக்கில் தீர்வைக் காண்க.

	1	2	3	4
1	3	5	5	11
2	9	7	9	15
3	7	7	11	13
4	13	13	13	17

5. தொடர் வரிசைத் தொகுதி

அல்லது

வரிசை முறை

(Sequencing)

அறிமுகம்

செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சிப் (Operations Research) பாடத்தின் கீழ் மிகவும் அறைகூவக்கூடிய (விளுக்களில்) பிரச்சினைகளில் ஒற்றை வரிசை முறைக் கணக்கு என்று நாம் அறிய வருகின்றோம். இந்தப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண்பது மிகவும் சிக்கலான பிரச்சினை. இதுவரை பொதுவான முடிவு விதிகள் (general decision rules) சிறிய சுலபமான வினுக்களுக்கு மட்டுமே காணப்பட்டுள்ளன.

இவற்றில் பொதுவாக எல்லா அங்காடிகளுக்கும் மிகவும் எளிதான முறையில் ஜான்சன் என்ற ஆசிரியர் கண்டுபிடித்துள்ளார். உதாரணமாக இரண்டு இயந்திரங்களில் n வேலைகளை, ஒவ்வொன்றும் சர்வ சமமான வழியில் இயக்க வைக்கும் போது ஏற்படும் மீச்சிறு மொத்தக் கழிவு நேரத்தைக் கணிக்க வல்ல ஒருபெரிதும் உகந்த வரிசை முறைத் தொகுதியைத் (optimal sequencing) தீர்மானிப்பதுதான் ஜான்சனின் முறையாகும்.

இதேபோல் மூன்று இயந்திரங்களில் n வேலைகளைச் சர்வ சமமான வழியில், இயக்கவைக்கக்கூடிய ஒரு தனிப்பட்ட வரிசை முறையையும் அவரே முன் மாதிரியைப் போலவே கண்டு பிடித்து விளக்கியுள்ளார்.

ஆனால் 'm' இயந்திரங்களில் n வேலைகளை வேறுபட்ட வழியில் (different route) இயக்கவைக்கக்கூடியதொரு பொது முறையில் $n!$ அமைப்புத்திட்டங்கள் (programmes) அதாவது $n!$ வரிசைமுறை அமைப்புகள் உள்ளன. இவற்றில் அநேகமான அமைப்புத் திட்டங்கள் தொழில் நுட்ப முறையில் பயனெளிமையற்றதாகி விடுகின்றன (Technologically infeasible). ஆகவே, அவை நம் கவனத்திலிருந்து நீக்கப்படுகின்றன. மீதமுள்ள

அமைப்புத் திட்டங்களில் சில, பெரிதும் உகந்த வரிசை முறைகளாக இருக்க முடியாதவையாகின்றன. ஆகவே, அவற்றையும் நீக்கி விடுகின்றோம். எஞ்சியுள்ள ஒரு சில பெரிதும் உகந்த வரிசை முறை/வரிசை முறைகளே தீர்வு காணும் வரிசை முறை அமைப்புத் திட்டங்களாகின்றன. எனவே, இவ்வாறு வரிசை முறைத்தீர்வுகளைக்காண்பது மிகச்சிக்கலான பிரச்சினையாகின்றது. ஏனெனில், உதாரணமாக ஒரு சிறிய பிரச்சினையை எடுத்துக் கொள்வோம். ஓர் இயந்திரத்தில் வரிசை முறைப்படி 20 வேலைகளை இயக்க வைத்தால் 20! வழிகள் உண்டு. அதாவது 20!=2432,902,008,176,640,000 வழி முறைகள் உண்டு. ஒரு வேகமாக இயங்கும் கணிப்பான் (computer) ஒரு மைக்ரோ செகண்டுக்கு ஒரு வரிசைமுறைத் தீர்வு வீதம் திட்டமிட்டுச் செயல்பட்டால், ஒரு நாளைக்கு 8 மணி நேரமும் கணிப்பான் இயங்கி, ஓர் ஆண்டு 365 நாள்களும் இயங்கிச் செயல்பட்டால் மேற்படி எல்லா வழி முறைகளிலும் வரிசைத் தீர்வு காண்பதற்கு $2\frac{1}{4}$ இலட்சம் ஆண்டுகள் பிடிக்கும் என்று தெரிகிறது என்றால் இத்தகைய தீர்வுகளிலிருந்து பெரிதும் உகந்த ஒரு சில தீர்வுகளைக் காணுதல் செயல் முறைக்கு ஒவ்வாததும் நிகழ முடியாததுமான ஒரு தீர்வேயாகும் என்பது கண்கூடாகப் புலனாகின்றது. ஒரு இயந்திரத்தில் 20 வேலைகளைச்செய்வதற்கே இந்தப்பாடுஎன்றால் பல "m" இயந்திரங்களில் 20 வேலைகளைச் செய்தாலோ அல்லது $n(>20)$ வேலைகளைச் செய்தாலோ எத்தகைய கடினமானதும் நிச்சயமாக நிகழ இயலாததுமான நிகழ்ச்சியாகும் என்றே கூறலாம்.

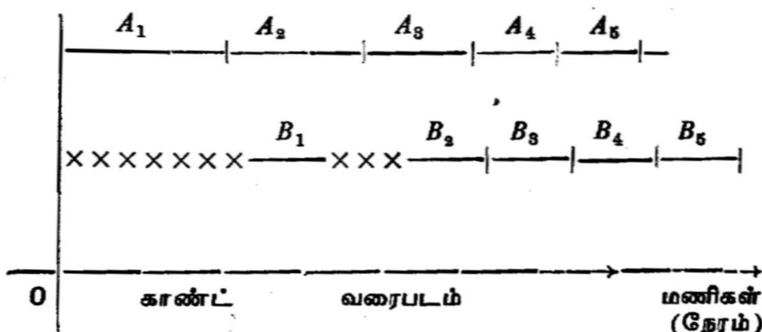
இம்மாதிரி நிலையில் செயல்படக் கூடிய வேலைகளின் ஒரு தொடர்ச்சியை ஒரு முறைப்படி வரிசைப்படுத்தி வரிசைக்கிரமமாகச் செய்வதால் ஏற்படக்கூடிய மொத்தக் கழிவு நேரத்தை மீச்சிறு நேரமாக்கும் முயற்சியை "வரிசை முறைத் தொகுப்பு" என வழங்குகிறோம். வரிசை முறைத் தொகுப்பில் பலவிதமான சூழ்நிலைகள் உள்ளன. இவற்றை அறிந்து கொள்வதற்கு முன்பாக நாம் ஒரு சிறிய எளிதான உதாரணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். ஐந்து இயந்திரங்களில், 4 வேலைகளை ஒவ்வொன்றிலும் இயக்கி, அவற்றுலான மொத்த நேரத்தைக் கணக்கிட்டு எல்லா வேலைகளும் எல்லா இயந்திரங்களின் வழியாக இயக்கி முடிக்கப்பட்ட பின், முதல் வேலை முதல் இயந்திரத்தில் ஆரம்பித்த நேரத்தில் இருந்து கடைசி வேலை கடைசி இயந்திரத்தில் முடிக்கப்பட்ட நேரம் வரையாக மொத்த நேரத்தைக் கணக்கிடுவோம். எந்த இயந்திரத்தில் எந்தஒரு வேலையை

ஆரம்பித்து அடுத்தாற்போல் எந்த இயந்திரத்துக்கு எந்த ஒரு வேலை செய்வது அடுத்து எந்த இயந்திரத்துச் செய்வது என்று தீர்மானிப்பது, இதே போல் இரண்டாவது இயந்திரத்தில் எந்த ஒரு வேலையை ஆரம்பித்து .... கடைசியாக, கடைசி இயந்திரத்தில் எந்த ஒரு வேலையை ஆரம்பிப்பது, எந்த வேலை கடைசியாக இயக்கப்படுவது, இதனால் ஏற்படும் நேரக்கழிவு என்ன, இதைக் குறைக்க முடியுமா, இதற்கு வேறு பல தீர்வுகளையும் ஆராயலாமா, ஆராய்ந்து எந்தத் தீர்வு மொத்தக்கழிவு நேரத்தை மீச்சிறு நேரமாக்குகிறதோ அந்தத் தீர்வையே பெரிதும் உகந்த தீர்வாகக் கணிப்போம். இப்படிச் செய்கையில் இயந்திரங்களின் ஒழுங்கு வரிசையையும் நாம் குறிப்பிட்டாக வேண்டும். A, B, C, D என்று 4 இயந்திரங்கள் இருக்குமாயின் ஒழுங்கு வரிசை $ACBD$ என்று குறிப்பிட்டால் இதன் அர்த்தம் என்ன என்றால் ஒரு குறிப்பிட்ட i வேலையானது, முதலில் A-யால் இயக்கப்பட்டு அது முடிக்கப்பட்ட பின்னரே C-யால் இயக்கப்படும். அதே i வேலை C-யால் முடிக்கப்பட்ட பின்னரே B-யால் இயக்கப்படும். கடைசியாக D-யால் இயக்கப்படும். இத்தகைய ஒழுங்கு வரிசை குறிக்கப்படாவிட்டால் நாம் எல்லாவிதமான மாறுபட்ட வரிசைகளிலும் தீர்வுகள் காணமுடியும். அப்படிக் காண்பதாயின் மொத்த தீர்வுகள் 4 இயந்திரங்களில் 5 வேலைகள் என்றால் $(4!)^5 = 7,962,624$ தீர்வு முறைகள் உள்ளன. இவ்வளவு தீர்வுகளையும் கணித்து இவற்றிலிருந்து பெரிதும் உகந்த (மீச்சிறு மொத்த கழிவு நேரத்தைக் காட்டக் கூடிய) ஒரு வரிசை முறைத் தொகுப்பைக் காண்பது மிகவும் அரிதான செயல். எனவேதான் நாம் இவ்வழிமுறைகளுக்கு உட்பட்டுச் சில நிபந்தனைகளை விதித்து அவற்றுக்குள் கட்டுப்பட்டவாறு தீர்வுகளைக் காண விழைகின்றோம். அத்தகைய கட்டுப்பாடுகளைக் கீழே விளக்குவோம். ஏற்கக்கூடிய வேலைகளின் வரிசை முறைகளும் சில நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டால் உதாரணமாக ஓர் இயந்திரத்தின் ஒரு பகுதியை வர்ணம் பூசுவதாக (Paint) வைத்துக் கொள்வோம். அந்தப் பகுதியிலுள்ள அழுக்குகளைச் சுத்தம் செய்து சுரண்டி எடுத்த பின்னர்தான் வர்ணம் பூசமுடியுமே தவிர, அதைச் செய்யாமல் வர்ணம் பூசமுடியாது. எனவே, சுரண்டி எடுத்துச் சுத்தம் செய்வது முதல் வேலை. இரண்டாவதே வர்ணம் பூசுவது. ஒரு தையல் மிஷினில் ஒரு நூலை ஒரு துவாரத்தில் கோர்ப்பதென்றால், முதலில் அந்த இயந்திரத்தின் பகுதியில் ஓர் ஓட்டை/துவாரம் ஏற்படுத்தப்பட்டால்தான் நூலைக் கோர்க்க முடியும். எனவே எந்த ஒரு வேலையும் "முன்னோடித் தேவைகள்" / முன்னோடி நிபந்தனைகள் (Precedence requirements) இவற்றால் கட்டுப்பட்டதாகும்.

மேற்கூறியவற்றை ஆதாரமாகக் கொண்டு இங்குச் சில எளி தான கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணுவோம்.

I (a) உதாரணமாக A, B என்ற இரண்டு இயந்திரங்களில் n வேலைகளைச் செய்வதாகக் கொள்வோம். (b) ஒவ்வொரு வேலையும் ஒரே வரிசை முறையில் செயல்படுவதாகக் கொள் வோம். (c) "கடந்து செல்லல் அனுமதிக்கப்படவில்லை." அதாவது எந்த ஒரு வேலையும் A–யிலும், B–யிலும் ஒரே வரிசை முறையில்தான் இயக்கப்படவேண்டும். எந்த ஒரு வேலை யானது முதலில் A–யில் இயக்கப்படுகின்றதோ அதே வேலை முதலில் B–யிலும் இயக்கப்படுகின்றது. அதே போல் A இயந் திரத்தில் இரண்டாவதாக இயக்கப்படும் வேலையே B:இயந்திரத் திலும் இரண்டாவதாக இயக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். இதே முறையில் மற்ற வேலைகளும் செய்யப்படுவதாக வைத்துக் கொள்வோம். உதாரணமாக ஓர் இரசாயனத் தொழிலகத்தில் தொழிற்படும் பொருள்களைக் கொண்டு செல்லும் கருவிகளின் மூலம் ஒரு தொழிற் கூடத்திலிருந்து மற்றொரு தொழிற் கூடத் துக்கு அந்தப் பொருள்கள் தங்கு தடையின்றி செல்லும் முறையே இவ்வரிசை முறையாகும். இதன்படி ஒரு தொழிற் கூடத்தில் பொருள்களைக் கொண்டு செல்லும் கருவி (conveyor belt)–யில் ஒரு வேலையானது இரண்டாவது தொழிற்கூடம் அந்த வேலைத் தயாராகும் வரை தற்காலிகமாக நிறுத்தி வைக்கப்படுகிறது. இரண்டாவது தொழிற்கூடம் அது செய்து கொண்டிருக்கும் வேலையைப் பூர்த்தி செய்துவிட்டு, முதல் தொழில் கூடத்தில் பூர்த்தி செய்யப்பட்டுக் கன்வேயர் பெல்டில் தற்காலிகமாக நிறுத்திவைக்கப்பட்டிருந்த வேலையை எடுத்து இயங்குகிறது. இதற்குள், முதற் தொழிற்கூடம் மற்றொரு வேலையை எடுத்துச் செய்வதற்கு ஆயத்தமாகின்றது. A இயந்திரத்தில் i வேலையைச் செய்வதற்கான நேரத்தை A_i என்று குறிப்போம். அதேபோல் B இயந்திரத்தில் i வேலையை செய்து முடிக்க B_i நேரமாகிறது எனவும், மொத்த வேலைகள் $(1, 2, 3 \ldots n)$ n வேலைகளையும் செய்துமுடிக்க ஆகும் மொத்த நேரம் T எனவும் கொள்வோம். B இயந்திரத்தில் $(i-1)$ஆவது வேலை முடிக்கப்பட்டபின் iஆவது வேலையை ஆரம்பிக்கும் வரை ஆகும் பயனற்ற நேரத்தை (idle time) i என்று குறிக்கலாம். 1 முதல் n வரை உள்ள எண்களின் வரிசை மாற்றம் (permutation) $(i_1, i_2, \ldots i'_n)$ என்றால் மொத்தம் $n!$ வரிசை முறைகள் உள்ளன. அவற்றில் எந்த ஒரு முறை, மொத்தக் கழிவு நேரம் மீச்சிறுமாகுமோ அந்தக் கழிவு நேரத்தைத் தீர்மானிக்கும் வரிசை முறையையே பெரிதும் உகந்த வரிசை முறையாகும். உதாரணமாக $n = 5$ உரிய ஒரு வரிசை முறை

யைத் தருந்த (உகந்த) கீழ்க்கண்ட காண்ட் வரைபடத்தின் (Gantt Chart) மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளதைக் காணவும் :



———— =செலவிடப்பட்ட நேரம் (utilised time.)

× × × ×= பயனற்ற நேரம் (idle time)

A_i, B_i = இயந்திரங்களின் நேரம்.

X_i = B இயந்திரங்களில் iஆவது வேலைக்கு முந்திய பயனற்ற நேரம்.

A இயந்திரத்தில் முதல் வேலை ஆரம்பித்த நேரத்திலிருந்து B இயந்திரத்தில் கடைசி (5ஆவது) வேலை பூர்த்தியடைந்து விட்ட நேரம் முடிய இடைவெளி நேரமே மொத்தக் கழிவு நேரம் எனத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

எந்த ஒரு நேரத்திலும் B இயந்திரம் இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் அல்லது சும்மா இருக்கும்.

$$B \text{ இயங்காமல் சும்மா இருக்கும் மொத்த நேரம் } = \sum_{i=1}^{5} X_i$$

(இங்கு 2 இடங்களில்தான் சும்மா இருக்கின்றது) எனவே,

$$\text{மொத்தக் கழிவு நேரம் } T = \sum_{i=1}^{5} B_i + \sum_{i=1}^{5} X_i \qquad \dots (1)$$

ΣB_i கூட்டலானது நிலையானதால் (fixed) ΣX_i மீச்சிறுமமாக்கினாலே Tஐ மீச்சிறுமமாக்கியதாக அர்த்தம்.

வரை படத்தின் மூலம் நாம் அறிவது $X_1 = A_1$

$x\, A_1 + A_2 > X_1 + X_2$ என்றால், $X_2 = A_1 - A_2 - B_1 - X_1$

$A_1 + A_2 < X_1 + B_1$ எனில் $X_2 = 0$

எனவே, $X_2 =$ மீப்பெரு $(A_1 + A_2 - B_1 - X_1,\ 0)$

$$= \text{மீப்பெரு}\left(\sum_{i=1}^{2} A_i - \sum_{i=1}^{1} B_i - \sum_{i=1}^{1} X_j,\ 0 \right)$$

$$\therefore\ X_1 + X_2 = \text{மீப்பெரு}\ (A_1 + A_2 - B_1,\ X_1)$$

$$= \text{மீப்பெரு}\ \left(\sum_{i=1}^{2} A_i - \sum_{i=1}^{1} B_i,\ X_1 \right)$$

இதேபோல், $X_3 =$ மீப்பெரு

$$\left(\sum_{i=1}^{3} A_i - \sum_{i=1}^{2} - B_i - \sum_{i=1}^{2} X_i,\ 0 \right)$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_i = \text{மீப்பெரு}\ \left(\sum_{i=1}^{3} A_i - \sum_{i=1}^{2} B_i - \sum_{i=1}^{2} X_i \right)$$

$$= \text{மீப்பெரு}\left(\sum_{i=1}^{3} A_i - \sum_{i=1}^{2} B_i,\ \sum_{i=1}^{2} A_i - B_1\ A_1 \right)$$

இங்கு $A_1 = X_1$

இப்போது,

$$D_s\ (S) = \sum_{i=1}^{n} X_j \text{ என்றால், பொதுவாக}$$

$$D_n (S) = \sum_{1}^{n} \text{1}$$

$$= \text{மீப்பெரு} \left(\sum_{1}^{n-1} A_i - \sum_{1}^{n-1} B_i, \quad \sum_{1}^{n-1} A_i - \sum_{1}^{n-2} B_i, \ldots\ldots A_1 \right)$$

$$= \text{மீப்பெரு} \left(\sum_{1}^{u} A_i - \sum_{1}^{n-1} B_i \right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (2)$$

$$1 < u < n$$

u-ன் ஒவ்வோர் எண்ணின் அடைப்புக்குறி மதிப்புகளைத் தனித் தனியாகக் கண்டுபிடித்து, அவற்றில் மீப்பெரு மதிப்பையே $D_n(S)$ என்று S-ன் சார்பலனாகக் குறிக்கின்றோம்.

2 இயந்திரங்களில் n வேலைகளைச் செய்வதற்கான பெரிதும் உகந்த வரிசை முறையைக் கண்டு பிடிக்கும் வழிமுறைகள் $D_n(S) = \Sigma X_i$ =தொடர் வரிசைக்குரிய B இயந்திரத்தின் மொத்த வீணான நேரம்.

$D_n(S) < D_n(S)$ என்ற சமனிலியைச் சார்ந்ததொரு வேலைகளின் தொடர்வரிசை S ஐக் கண்டுபிடிப்பதே நம் குறிக்கோள் ஆகும்.

"ஜான்சன், பெல்மேன் என்ற இரு ஆசிரியர்களும் கீழ்க்கண்ட விதிமுறைகளை அனுசரித்து ஒரு பெரிதும் உகந்த வரிசை முறையைக் கண்டுபிடித்துள்ளனர். j, $j+1$ என்ற இரு வேலைகளை எடுத்துக்கொண்டால்

"மீச்சிறு $(A_j, B_{j+1}) <$ மீச்சிறு (A_{j+1}, B_j) என்றால் j வேலையானது $(j+1)$ஆவது வேலையை முந்தும்." ...(3)

"மீச்சிறு $(A_j, B_{j+1}) =$ மீச்சிறு (A_{j+1}, B_j) என்றால் ...(4)

jஆவது வேலையானது $(j+1)$ஆவது வேலையைப் பொறுத்த வரை சார்பு எதிர்ப்பு அற்ற நிலையில் இருக்கும் (indifferent). (சார்பு எதிர் வற்ற) அதாவது j வேலை $j+1$ வேலையை முந்தலாம் அல்லது $j+1$ வேலை j வேலையை முந்தலாம்.

நிருபணம்:

நாம் S' என்ற ஓர் எண்ணின் தொடர் வரிசையை எடுத்துக் கொண்டால், அதிலிருந்து j; $j+1$ ஆவது வேலைகளை முறையே இடைப் பரிமாற்றம் (interchange) செய்வதால் கிடைக்கும் தொடர்வரிசையை S'' என்று கூறலாம்.

இந்த இரு தொடர் வரிசைகள் :—

$S' = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots \underline{j-1, j}, j+1, j+2, \ldots\ldots\ldots n$

$S'' = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots j-\underline{1, j+1, j}, j+2; \ldots\ldots\ldots n$

$K_u = \sum_{i=1}^{u} A_i - \sum_{i=1}^{u-1} B_i$ என்று கொள்க.

S'-க் கான K_u-ன் மதிப்பு $= K'_u$

S''-க்கான K_u-ன் மதிப்பு $= K''_u$

சார்பலன் 2-ன் மூலம்,

$$D_n(S) = \text{மீப்பெரு} \quad 1 < u < n \left(\sum_{i=1}^{u} A_i - \sum_{i=1}^{u-1} B_i \right)$$

$= \text{மீப்பெரு } 1$

$< u < n \quad (K_u)$

எனவே $u = 1, 2, \ldots\ldots j-1, j-1, j+2, \ldots\ldots n$ என்ற மதிப்புகளில் $K'_u = K_u{}^u$

ஆனால் $u = j, j+1$ என்றுகும் போது,

K_j, K'_{j+1} முறையே K''_j, K''_{j+1}-க்குச் சரிசமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை

$\therefore \quad K'_j \neq K''_j$

$\quad K'_{j+1} \neq K''_{j+1}$

இதனால் $D_n(S')$-ம் $D_n(S'')$-ம் மாறுபட்டு இருக்கும். இங்கே இரண்டு விவரவாசகங்களைக் (கூற்றுகளை) (statements) கீழ்க் கண்டவாறு எழுதலாம்:

(i) மீப்பெரு (K_j, K_{j+1}) = மீப்பெரு $(K''_j + K_{j+1})$ என்றால்

$$D_n(S') = D_n(S'')$$

அதாவது மொத்த கழிவு நேரத்தை மீச்சிறுமாக்கும்போது S', S''-ல் எந்தத் தொடர் வரிசையை வேண்டுமானாலும் பயன் படுத்தலாம்.

(ii) மீப்பெரு $(K'_j, K'_{j+1}) <$ மீப்பெரு (K''_j, K''_{j+1}) என்ருலோ S''ஐ விட S' தொடர் வரிசை முன் மதிப்புக்குரியது (preferable) ஆகும். அதாவது j வேலேயானது $(j+1)$ஆவது வேலேயை விட முந்த வேண்டும். எனவே $(j+1)$ஆவது வேலேயை விட jஆவது வேலேயை முன் செயல் வேண்டும். இந்த இரு விவர வாக்கியங்களே K_j-ஐ நன்கு விளக்கி மாற்றி எழுதினுல்

$$k'_j = \sum_{1}^{j} A_i - \sum_{1}^{j=1} B_i$$

$$k'_{j+1} = \sum_{1}^{j+1} A_i - \sum_{1}^{j} B_i$$

$\therefore$ மீப்பெரு (k_j, k'_{j+1})

$$= \text{மீப்பெரு} \left(\sum_{i=1}^{j} A_i - \sum_{i=1}^{j=1}, \sum_{i=1}^{j+1} A_i - \sum_{i+1}^{j} \right) \quad \ldots \quad (5)$$

இதேபோல

$$k''_j = \sum_{i=1}^{j-1} A_i + A_{j+1} - \sum_{i=1}^{j-1} B_i$$

$$k''_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} A_i - \sum_{i=1}^{j-1} B_i - B_{j-1}$$

$\therefore$ மீப்பெரு $(k_j'', k_j''_{+1}) =$ மீப்பெரு

$$\left(\sum_{i=1}^{j-1} A_i + A_{j+1} - \sum_{i=1}^{j=1} B_i, \sum_{i=1}^{j+1} A_i - \sum_{i=1}^{j+1} B_i - B_{i+1} \right) \ldots (6)$$

(5), (6)-ன் வலப் பக்கத்திலிருந்து

$$\left(\sum_{i=1}^{j+1} A_j - \sum_{i=1}^{j+1} B_i \right)$$ ஐக் கழித்தால், வருவதைப்

பின்வருமாறு எழுதலாம்:

மீப்பெரு $(-A_{j+1}-B_j)$

மீப்பெரு $(-A_j, -B_{j+1})$ என்ருல் ... (7)

மீப்பெரு $(k_j', k_{j+1}) <$ மீப்பெரு $(k_j'', k_j''_{+1})$ ... (8)

(7)ஐ (-1)ஆல் பெருக்கிச் சமனிலியை மாற்றி எழுதிஞல்

மீச்சிறு $(A_{j+1}, B_j) >$ மீச்சிறு (A_j, B_{j+1}) என்ருல் அதாவது,

மீச்சிறு $(A_j, B_{j+1}) <$ மீச்சிறு (A_{j+1}, B_j) என்ருல்,

மீப்பெரு (k_j', k_{j+1}) மீச்சிறு (k_j'', k'_{j+1}) ஆகும்.

இது எல்லா j மதிப்புகளுக்கும் பொருத்தம் என்பதால்,

$$D_n(S') < D_n(S'') \quad \text{ஆகும்.}$$

எனவே தொடர் வரிசை S''ஐவிடத் தொடர் வரிசை S' முன் மதிப்புக்கு உரியதாகும். அதாவது மீச்சிறு $(A_j, B_{j+1}) <$ மீச்சிறு (A_{j+1}, B_j) என்ருகும்போது, $(j+1)$ஆவது வேலையைவிட jஆவது வேலையை முன்செயல் வேண்டும். (நிருபணமானது)

மேலே கூறிய விதிகளை அனுசரித்து அடுத்தடுத்துள்ள வேலைகளைத் தொடர்ந்து இடைப் பரிமாற்றம் செய்தால், முதலில் ஆரம்பித்த ஒரு தொடர் வரிசைகளிலிருந்து, S^+ என்ற பெரிதும் உகந்ததொரு தொடர் வரிசையை அடைய முடியும் என்பதை ஜான்சன் விளக்கியிருக்கிருர். அப்படிப்பட்ட ஒவ்வோர் இடைப் பரிமாற்றத்தின் வழியாகவும் $D_n(S)$-ன் மதிப்பானது இடைப் பரிமாற்றத்திற்கு முன்பு இருந்த மதிப்பைவிடக் குறைந்த தாகிறது.

மாதிரி கணக்கு

ஒரு வரிசை முறைக் கணக்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இரு இயந்திரங்களில் 5 வேலைகளைச் செய்ய ஆகும் நேரங்களின் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ஒரு காண்ட் வரைபடம் வரையவும். அதன்மூலம் ஆகும் மீச்சிறு மொத்தக் கழிவு நேரத்தைக் கணக்கிடவும்.

(அட்டவணை அடுத்தப் பக்கம் பார்க்கவும்.)

ஒரு பெரிதும் உகந்த வரிசை முறையைக் கண்டுபிடிக்கும் முறைகள்:

1. அட்டவணையிலிருந்து A_i, B_i இவற்றின் மதிப்புகளை ஆராய்ந்து மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காணவும்.

மீச்சிறு $(A_i, B_i) = B_2 = 2$ மணி நேரங்கள்.

2. அந்த மீச்சிறு மதிப்பு A காலத்திலிருப்பின் அந்த வேலையை A இயந்திரத்தில் கடைசியாக இயக்கவும். இங்கு

இயந்திரங்கள் (மணிக் கணக்கில்)

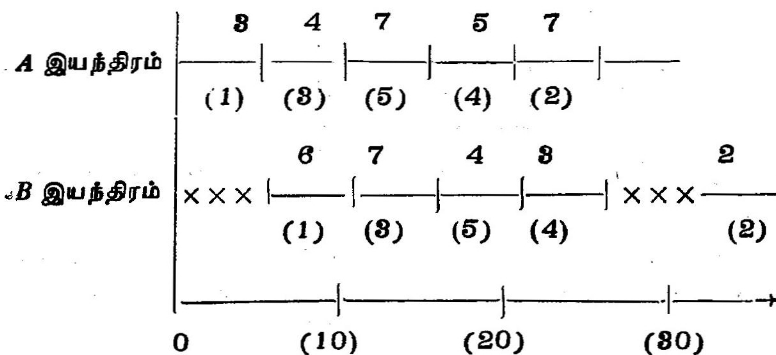
i	A_i	B_i
1	3	6
2	7	2
3	4	7
4	5	3
5	7	4

மீச்சிறு மதிப்பு $B_2 = 2$ என்பதால், இரண்டாவது வேலையை A இயந்திரத்தில் கடைசியாக இயக்கவும்.

3. இப்படிக் குறிக்கப்பட்ட வேலைகளை விடுத்து, மற்ற வேலைகளில் எது மீச்சிறு நேரத்தில் முடிக்கப்படுகிறதோ, அவ் வேலை A இயந்திரத்திலா B இயந்திரத்திலா என்பதை (1) (2) வழி களின்படி ஆராய்ந்து தீர்மானித்து அதன்படி அந்த வேலைகளை இயக்க வேண்டும். மீச்சிறு மதிப்பு இரண்டு இயந்திரங்களிலும் ஒரே சமமாக வந்தாலும், அல்லது ஒரே இயந்திரத்தில் இரண்டும் அதற்கும் மேற்பட்ட வேலைகளுக்கும் சமமாக வந்தாலும், ஒத்தன (tie) ஏற்படுகிறது. இந்தச் சமநிலையில் ஒத்தனவான வேலை களில் ஏதாவது ஒரு வேலையைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இங்கு முதல் கட்டத்தில் 2ஆவது வேலையை இயக்குவது எப்படி என்று தீர்மானித்துவிட்டோம். மீதமுள்ள வேலைகளில் மீச்சிறு மதிப்பு மூன்று ஆகிறது. இம் மதிப்பு $A_1 = 3$, $B_4 = 3$ என்று சமநிலையில் இருக்கிறது. இதில் ஏதாவது ஒரு வேலையை நாம் தேர்ந் தெடுக்கலாம். இங்கு $A_1 = 3$ என்று எடுத்துக்கொண்டால், முதல் வேலையை A இயந்திரத்தில் முதலில் இயக்கலாம் என்று தீர்மானிக்கிறோம். எனவே, அடுத்ததான மீச்சிறு மதிப்பு $B_4 = 3$ என்பதால் 4ஆவது வேலையை A இயந்திரத்தில் கடைசிக்கு முந்தியதாகச் செய்யவேண்டும். மீதமுள்ள வேலைகளில் மிகச் சிறிய மதிப்பு $= 4$ அதாவது $A_3 = 4$, $B_5 = 4$.

இதில் $A_3 = 4$ஐ முதலாவதாக எடுத்துக்கொள்வோம். (முதலாவதாக வேலை எண் 1) கடைசியாக மிஞ்சியுள்ள 5ஆவது வேலை A இயந்திரத்தில் மூன்றாவதாகச் செயல்படும். எனவே, A, B இயந்திரங்களில் வேலைகள் செய்யப்படும் வரிசை கணிக்கப்

படுகிறது. வேலை எண்கள் 1, 3, 5, 4, 2 Aக்-குப் பிறகு B-ல் அந்த வேலைகள் இயக்கப்படுவதால், A-க்கும் B-க்கும் பொருந்தும் பெரிதும் உகந்ததொரு வேலைகளின் வரிசை முறையானது 1, 3, 5, 4, 2 ஆகும். இவ் வரிசைமுறைகளைப் பயன்படுத்திக் காண்ட் வரைபடம் இரு இயந்திரங்களுக்கும் வரைந்து, B இயந்திரத்தில் காணப்படும் பயனற்ற நேரங்களையும் கூட்டிப் பார்த்தால் மொத்தக் கழிவு நேரம் எவ்வளவு என்று தீர்மானிக்கலாம்.



காண்ட் வரைபடம்

——— : உபயோகமான நேரம்

× × × : பயனற்ற நேரம்

(i) : வேலை எண்கள்

கோட்டுக்கு மேலே உள்ள எண்கள் வேலை செய்து பூர்த்தியாக ஆகும் நேரத்தைக் மணிகளை குறிக்கின்றது.

முதல் வேலை சிறிது செய்து முடிக்கப்பட்ட பின்னர்தான் B இயந்திரத்தில் முதல் வேலை செய்யப்படுகிறது. அதுவரை B இயந்திரம் 3 மணி நேரம் இயங்காமல் உள்ளது. இதே போல A இயந்திரம் 2ஆவது இலகக்கமிட்ட வேலையைச் செய்து முடிக்கும் வரை B இயந்திரம் 4 இலக்கமிட்ட வேலையைப் பூர்த்தி செய்த பின்னர் காத்திருக்கிறது.

எனவே, முதலில் மூன்று மணிக்குப் பிறகு மூன்று மணி ஆக 6 மணி நேரங்களில் B இயந்திரம் செயல்படாமல் இருக்கிறது. எனவே முதல் வேலை A இயந்திரத்தில் இயக்கப்பட ஆரம்பித்த திலிருந்து கடைசி வேலை இயந்திரத்தில் இயங்கி முடிக்கப்படும் வரையான மொத்த நேரம்தான் மொத்தக் கழிவு நேரம் ஆகும்

அந்த மொத்தக் கழிவு நேரம் = 28 மணிகள் என்று காண்ட் வரைபடம் மூலம் நாம் அறிகின்றோம்.

மாதிரி கணக்கு

5 வேலைகளை A, B என்ற இயந்திரங்களில் எஞ்சியப்பின் B-ல் டெக்னிகல் வரிசையில் செய்து முடிக்கக் கூடிய மணி நேரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இந்த 5 வேலைகளுக்குமான மீச்சிறு மொத்தக் கழிவு நேரத்தைக் கவனிக்கவல்ல ஒரு பெரிதும் உகந்த வரிசை முறையைக் கண்டுபிடி.

செயல்படும் நேரம் (மணி அளவில்)

வேலை	A இயந்திரம்	B இயந்திரம்
1	5	2
2	1	6
3	9	7
4	3	8
5	10	4

நிருபணம் :

(1) மீச்சிறு $(A_i, B_i) = A_2 = 1$

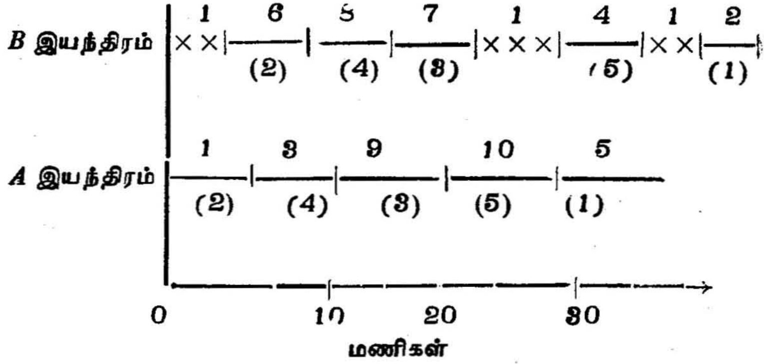
∴ 2 இலக்கமிட்ட வேலை A இயந்திரத்தில் முதலில் செயல்படுகிறது.

(2) வேலை எண் 2ஐ நீக்கிவிட்டு மீதமுள்ள வேலைகளில் மீச்சிறு $(A_i, B_i) = B_i = 2$ எனவே வேலை எண் 1. A இயந்திரத்தில் கடைசியாகச் செயல்படும்.

(3) வேலை எண்கள் 1, 2-ஐ நீக்கிவிட்டு மீதமுள்ள வேலைகளில் மீச்சிறு $(A_i, B_i) = A_4 = 3$. எனவே வேலை எண் 4. A இயந்திரத்தில் இரண்டாவதாகச் செயல்படும்.

(4) வேலை எண்கள் 1,2,4 தவிர மீதம் உள்ள வேலைகளில் மீச்சிறு $(A_i, B_i) = B_5 = 4$. ∴ 5 இலக்கமிட்ட வேலை A இயந்திரத்தில் கடைசிக்கும் முன்னதாகச் செயல்படும்.

(5) எஞ்சியுள்ள 3ஆவது வேலை A இயந்திரத்தில் எஞ்சியுள்ள வரிசையில் அதாவது மூன்ருவதாகச் செயல்படும். ஆகவே, A-ன் வரிசை முறை 2, 4, 3, 5, 1 இதே வரிசையில்தான் B இயந்திரமும் இயங்கும். எனவே, பெரிதும் உகந்த மொத்தக் கழிவு நேரத்தைக் கணக்கிடக் காண்ட் வரைபடத்தை வரைவோம்.



$\Sigma A_i = 28 \quad \Sigma B_i = 27 \quad \Sigma X_i = 1 + 1 + 1 = 3$

$T = \Sigma B_i + \Sigma X_i = 30$ மணிகள்

எனவே, மொத்தக் கழிவு நேரம் = 30 மணிகள்

$\Sigma A_i = 28$ மணிகள் என்பதால், A-ன் வீணை (பயன்படா) நேரம் = 2 மணிகள்

$\Sigma B_i = 27$ மணிகள் என்பதால், B-ன் வீணை (பயன்படா) நேரம் = 3 மணிகள்

II (i) ABC என்ற மூன்று இயந்திரங்களில் n வேலைகளை இயக்குவதாகக் கொள்வோம்.

(ii) ஒவ்வொரு வேலையும் அதே வரிசை முறையில் செயல்படுகிறது.

(iii) கடந்து செல்லல்—அனுமதிக்கப்படவில்லை.

இந்த நிபந்தனைக்குட்பட்ட முன்மாதிரியான வகையைக் கவனிப்போம்.

iஆவது இலக்கமிட்ட வேலையை ABC என்ற இயந்திரங்களில் செயல்படும்போது ஆகும் நேரத்தை A_i, B_i, C_i என்போம். இரண்டாவது இயந்திரத்தின் வீணை நேரத்தை X_i என்றும், மூன்ருவது இயந்திரத்தின் வீணை நேரத்தை Y_i என்றும் குறிப்போமாக. எனவே மொத்த மீச்சிறு மொத்தக் கழிவு நேரம் T என்ருல்,

$$T = \sum_{i=1}^{n} C_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

ΣC_i என்பது நிலையானது ஆகையால் T-ன் மதிப்பை மீச்சிறு மமாக்குதல் ΣY_i-ன் மதிப்பை மீச்சிறுமமாக்குதற்குச் சமம்.

தனிக் குறிப்பிட்ட முறை (Special case)

மீச்சிறு $A_i \geqslant$ மீப்பெரு B_i என்றுலோ

அல்லது மீச்சிறு $C_i \geqslant$ மீப்பெரு B_i என்றுலோ

இவ்விருவகைகளிலும், ஒரு பெரிதும் உகந்த வரிசை முறை யைக்கணக்கிடும் முறையை "ஜான்சன்" கண்டு பிடித்திருக் கின்ருர்.

மேற்குறிப்பிட்ட இரண்டு சமனிலிகளும் ஒத்து வராத போது பெரிதும் உகந்த வரிசை முறையைக் காண முடியாது.

பொதுவான முறை (General Case) :

n வேலைகள், இயந்திரங்கள் 3 விளுக்களில்,
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \underset{1 \leqslant u \leqslant v \leqslant n}{\text{மீப்பெரு}} (H_v + K_u)$$

இங்கு,

$$H_v = \sum_{i=1}^{v} B_i - \sum_{i=1}^{v-1} C_i \quad v = 1, 2, \ldots n$$

$$K_u = \sum_{i=1}^{u} A_i - \sum_{i=1}^{n-1} B_i \quad u = 1, 2, \ldots n$$

இந்த $\sum_{i=1}^{n} Y_i$-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் கணக்கிடுவதே நம் முக்கிய வேலையாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு

3 இயந்திரங்களில் 5 வேலைகளை இயக்குவதற்கான இயந்திர நேரங்கள் பின்வருமாறு :

	A_i	B_i	C_i
1	8	5	4
2	10	6	9
3	6	2	8
4	7	3	6
5	11	4	5

இந்த 5 வேலை—3 இயந்திரங்கள் கணக்கை 5 வேலை—2 இயந்திரங்கள் கணக்கைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றியமைத்தால் பிறகு தீர்வு முன் மாதிரிகள்போல எளிதாகிவிடும்.

$G_i = A_i + B_i$

$H_i = B_i + C_i$ எனக் கொள்க.

இப்போது புது அட்டவணை G, H என்ற இரு போலியான (fictitious) இயந்திரங்களில் 5 வேலைகளை இயக்குவதன் விபரத்தைக் கவனிப்போம். G-க்குப்பின் H என்ற டெக்னிகல் (வரிசை) முறையில் வேலைகளை இயக்குவதாகக் கொள்வோம். இப்படிச் செய்வதால் கிடைக்கும் பெரிதும் உகந்ததொரு வரிசை முறையே மூலக்கணக்கிற்கான பெரிதும் உகந்ததொரு வரிசை முறையாகும்.

இங்கு மீச்சிறு $A_i = 6$

மீப்பெரு $B_i = 6$

மீச்சிறு $C_i = 4$

எனவே, மீச்சிறு $A_i = 6 \geqslant$ மீப்பெரு $B_i = 6$ என்பதால் முதல் நிபந்தனை சரியாகிறது. எனவே, G, H என்ற போலி இயந்திரங்களை வரையறுத்துப் பின்வருமாறு புது அட்டவணை போடலாம்.

i	$G_i = A_i + B_i$	$H_i = B_i + C_i$
1	13	9
2	16	15
3	8	10
4	10	9
5	15	9

இதற்கான பெரிதும் உகந்த வரிசை முறையைக் (வரிசை முறைகளை) கணிக்கலாம்.

1, மீச்சிறு $(G_i, H_i) = 8 = G_3$

$\therefore$ 3 இலக்கமிட்ட வேலை G இயந்திரத்தில் முதலில் செயல் படும்.

2. வேலை எண் 3ஐ நீக்கியபின்

மீச்சிறு $(G_i, H_i) = 9 = H_1 = H_4 = H_5$

ஏதாவது ஒன்றை எடுத்துக்கொள்வோம் $H_1 = 9$ எனவே, ஓர் இலக்கமிட்ட வேலை G இயந்திரத்தில் கடைசி யாகச் செயல்படும்.

3. $H_4 = 9$. ஆகவே இலக்கமிட்ட வேலை G இயந்திரத்தில் கடைசிக்கு முன்பாகச் செயல்படும்.

4. $H_5 = 9$. எனவே 5 இலக்கமிட்ட வேலை G இயந்தி ரத்தில் கடைசிக்கு இரண்டு இடம் முன்பாகச் செயல்படும். (இங்கு 3ஆவது இடத்தில்)

5. எஞ்சியுள்ள வேலை எண் 2 G இயந்திரத்தில் 2ஆவதாக செயல்படும். எனவே, பெரிது முகந்ததொரு வரிசை முறை யானது : (3, 2, 5, 4, 1) இதேபோல வேறு முறையில் மாற்றி எழுதினல் வேறு ஒரு பெரிது முகந்ததொரு வரிசைமுறை கிடைக்கும்.

உதாரணமாக : மீச்சிறு $(C_i, A_i) = G_3 = 8$

3ஆவது எண் வேலை முதலில் G-ல் செயல்படும்.

பிறகு மீச்சிறு $(G_i, H_i) = H_1 = H_4 = H_5 = g$

இப்போது $H_4 = 9$ என்று கொண்டால் 4ஆவது எண் வேலை கடைசியில் G-ல் செயல்படும். பிறகு $H_5 = 9$ என்றால் 5ஆவது எண் வேலை கடைசிக்கு முன்பாக G-ல் செயல்படும். அடுத்தபடி $H_1 = 9$ 1ஆவது வேலை கடைசிக்கு 2ஆவது இடம் முன்பாக G-ல் செயல்படும். எனவே, பெரிதும் உகந்த வரிசை முறை (3, 2, 1, 5, 4).

இதேபோல பல வழிகளிலும் பல்வேறு பெரிதும் உகந்த வரிசை முறைகளைக் கணிக்கலாம். அவையாவன:

(32154); (32451); (32415); (32514)

கடைசியாக ஒவ்வோர் உகந்த வரிசை முறைக்கும் ஒரு காண்ட் வரைபடம் வரைந்து மொத்தக் கழிவு நேரத்தைக் கணக்கிடலாம். எந்த ஒரு வரிசை முறைக்கு மொத்தக் கழிவு நேரத்தைக் கணக்கிடலாம். எந்த ஒரு வரிசை முறைக்கு மொத்தக் கழிவு நேரம், மீச்சிறுமமாக இருக்குமோ அந்த வரிசை முறையையே நாம் பெரிதும் உகத்ததொரு வரிசை முறை என்று தீர்மானித்து அதற்கான மீச்சிறுமொத்தக் கழிவு நேரத்தை இறுதியாகக் கூறிவிடலாம், மொத்தம் 6 உகந்த வரிசைகளுக்கும் 6 காண்ட் வரைபடங்கள் கீழே வரையப்பட்டுள்ளது.

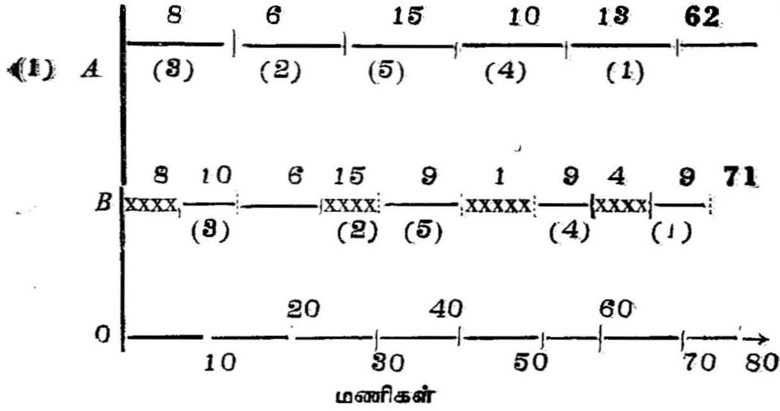
6 வரிசை முறைகள்

(1) (32541)
(2) (32451)
(3) (32514)
(4) (32154)
(5) (32145)
(6) (32415)

இயந்திர நேரங்கள் (மணிகளில்)

i = வேலை	G_i	H_i
1	13	9
2	16	15
3	8	10
4	10	9
5	15	9

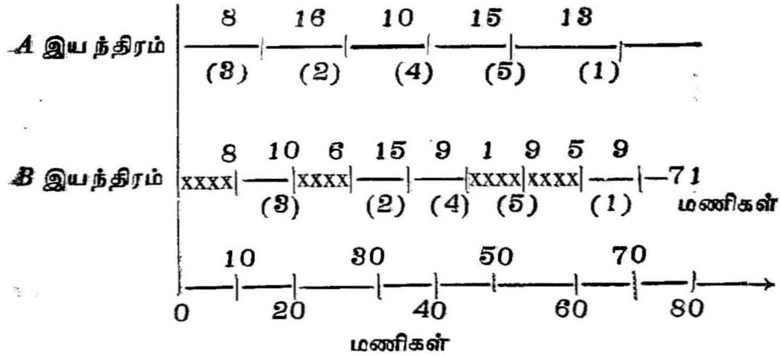
(1)



காண்ட் வரைபடம் (1)
மொத்தக்கழிவு நேரம்-71 மணிகள்

(2)

A இயந்திரம் வரிசை	வேலைகள் 32451	
A-க்கு நேரம்	8 16 10 15 13	அடுக்குக்
அடுக்குக் கூட்டு	8 24 34 49 62	கூட்டு—
B-க்கு நேரம்	10 15 9 9 9	8 18 24 39 48
$B_i + X_i$	$810(6)15q(1)q(4)q$	49 58 62 71



காண்ட் வரைபடம் (2)

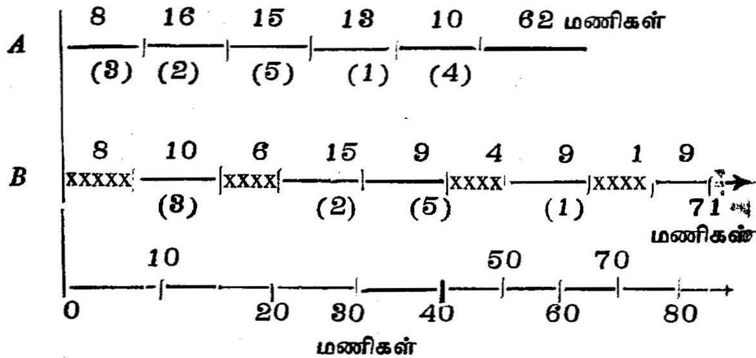
மொத்தக் கழிவு நேரம்—71 மணிகள் $\Sigma x_i = 19$ மணிகள்

(3) (3 2 5 1 4)

இயந்திரம் வரிசை	வேலைகள் & நேரம்
	3 2 5 1 4

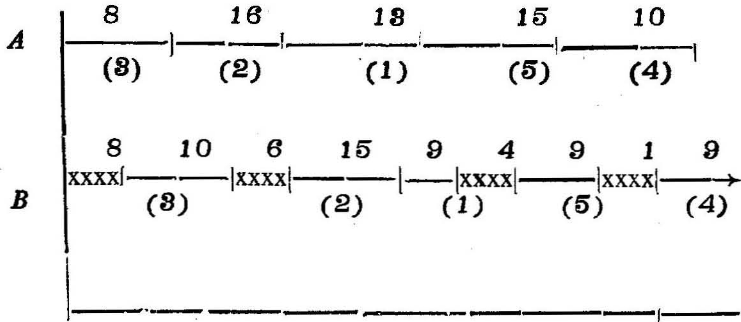
A-க்கு நேரம்		8 16 15 13 10
அடுக்குக் கூட்டு		8 24 39 52 62
B-க்கு நேரம்		10 15 9 9 9
$B_i + X_i$	:	8 10 6 15 9 4 9 1 9
அடுக்கு கூட்டு		8, 18, 24, 39, 48, 52, 61, 62, 71

$\Sigma X_i = 19$ மணிகள்.



காண்ட் வரைபடம் (3)

4. வரிசை முறை : 3 2 5 1 4



$\Sigma X_i = 19$ மணிகள்

காண்ட் வரைபடம் (4)

மொத்தக் கழிவு நேரம்—71 மணிகள்

5. 3 2 4 1 5 8 24 34 47 62

8 16 10 13 15 (8) 10 (6) 15 99 (5) 9

10 15 9 9 9 8 18 24 39 48 57 62 71

6. 3 2 1 4 5 8 24 37 47 62
8 16 13 10 15 8 10 (6) 15 99 (5) 9
10 15 9 9 9 8 18 24 39 48 57 62 71

மற்ற இரு வரிசை முறைகளிலும் இதே 71 மணிகள்தான் ஆகிறது எனக் காண்கின்றோம்.

மேலே கூறப்பட்ட மீச்சிறு A_i > மீப்பெரு B_i

அல்லது மீச்சிறு C_i > மீப்பெரு B_i பொருந்திவிட்டால்,

இதுவரை பெரிது முகந்ததொரு வரிசை முறைகளுக்கான எந்த ஒரு பொது வழிமுறையும் கிடைக்கப்பெறவில்லை.

இதேபோல 'm' இயந்திரங்களில் n வேலைகளை இயக்குவது ஒரே வழியில் ஒவ்வொரு வேலையும் இயக்கப்படுவது கடந்து செல்லல் அனுமதிக்கப்படாத முறை இத்தகைய மிகப் பொது வான கணக்குக்கான எந்த ஒரு பொதுத் தீர்வும் இதுவரை கண்டுபிடிக்கப்படவில்லை.

எனினும் கீழ்கக்ண்ட அறிக்கை பொருந்தும்.

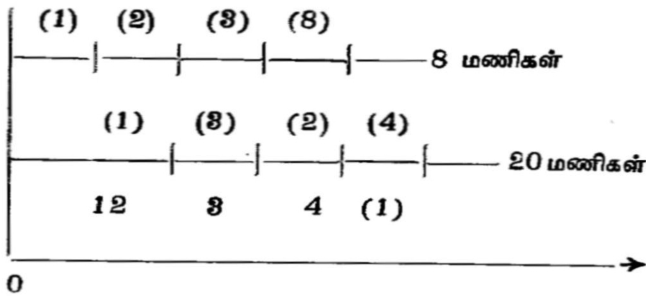
"பெரிதும் உகந்த வரிசை முறைகளுக்கு கடைசி இயந்தி ரத்தின் மொத்த வீணான நேரத்தை மீச்சிறுமமாக்கப்பட வேண்டும்."

ஒருமித்த வழித்தடம்: கடந்து செல்லல் அனுமதிக்கப் படுகிறது (Identical Routing Passing Permitted).

n வேலையில் ஒவ்வொன்றும் m இயந்திரங்களில் ஒவ்வொன் றின்மூலமாகவும் ஒரு குறிப்பிட்ட வழித்தடத்தில் இயக்கப் படுகிறபோதிலும் அவ் வேலைகள் ஒவ்வொன்றும் எப்போதும் ஒருமித்த வழித்தடத்தில்தான் செல்லவேண்டும் என்று அவசிய மில்லை, அதாவது கடந்து செல்வது அனுமதிக்கப்படுகிறது. சில சமயங்களில் இது சரியாகும். உதாரணமாக A இயந்திரம் 4 வேலைகளை $(1, 2, 3, 4)$ என்ற வரிசையில் இலக்கினால், மேலும் A வேலைகளை முடிக்க முறையே 5, 3, 2, 8 மணி நேரங்கள் பிடித்தால், B இயந்திரமும் A முடித்த வேலைகளைத் தான் AB என்ற வரிசையில் செய்யும் என்றால் B-யும் 1, 2, 3, 4 என்றுதான் செயல்படவேண்டும் என்ற அவசியமில்லை. அதா வது $A1$ஆவது வேலையைப் பிடித்தபின் B 1ஆவது வேலையை இயக்கும்.

A 2ஆவது 3ஆவது வேலையை முடித்தபின் B 2ஆவது வேலையைச் செய்வதற்குப் பதிலாக 3ஆவது வேலையைச் செய்யலாம்.

A:	1	2	3	4
	5	3	2	3
B:	1	3	2	4
	12	3	4	1



இங்கு B-ன் வேலை வரிசை 1 3 2 4 என்றிருக்கலாம். இத்தகைய முறையைக் கடந்து செல்லல் அனுமதிக்கப்படும் முறை எனலாம்.

பொதுவாகப் பெல்மன் & ஜான்சன் இருவரும் ஒவ்வோர் இயந்திரத்தின்மூலமும் ஒரே வரிசை முறையில் வேலைகளை இயக்குவதன்மூலம் பெரிதும் உகந்ததொரு வரிசை முறையைக் கணிக்க முடியும் எனக் காட்டியுள்ளனர்.

வேறுபட்ட பாதை (வழிமுறை) (Different Routing)

பல உற்பத்தி செய்முறையில், குறிப்பாக தொழிற் பட்டறைகளில் செய்யப்படும் பலதரப்பட்ட வேலைகள் ஒரேமாதிரியான வழித் தடத்தைப் பின்பற்றுவதில்லை எனக் காண்கின்றோம். அவை வேறுபட்ட வழித் தடத்தில் (Different Routing) அமைகின்றன. உதாரணமாக இரண்டு மாறுபட்ட வழித் தடங்களில் இரண்டு வேலைகளை m இயந்திரங்கள்மூலமாகச் செய்வதாகக் கொள்வோம். இங்கு எந்த ஒரு வேலைக்கும் மாற்று வழித்தடம் (Alternative Routing) அனுமதிக்கப்படவில்லை. மேலும், எந்த

ஓர் இயந்திரமும் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரே ஒரு வேலையைத்தான் செய்யமுடியும்.

இரு வேலைகள் "m" இயந்திரங்களில் இயக்குதல் (செய்வித்தல்) கீழ்க்கண்ட நிலைமைகளைக் (Situation) கவனிப்போம்.

(i) $A, B, C, \ldots\ldots K$ என்ற 'm' இயந்திரங்கள் இருப்பதாய்க் கொள்வோம்.

(ii) இரு வேலைகளை மட்டுமே செய்யவேண்டியது. அதாவது வேலை எண் 1. வேலை எண் 2.

(iii) m இயந்திரங்களில் இரு வேலைகளை ஒவ்வொன்றும் தொழில் நுட்ப முறையில் வரிசைப்படுத்துதலை முன்னதாகவே அறிந்ததாகக் கொள்வோம். இரண்டு வேலைகளுக்கும் ஒரே மாதிரியான தொழில் நுட்ப வரிசை முறை இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

(iv) m இயந்திரங்களில் இரு வேலைகளுக்குமான வேலை நேரங்கள் முறையே,

$A_1, B_1, C_1, D_1 \ldots K_1$
$A_2, B_2, C_2, D_2 \ldots K_2$ கொடுக்கப்பட்டதாகக் கொள்வோம்.

முதல் வேலை ஆரம்பத்திலிருந்து கடைசி வேலை பூர்த்தியாகும் வரையான மொத்தக் கழிவு நேரத்தை Tஐ மீச்சிறுமமாக்குவதே நம் நோக்கமாகும், இதை ஓர் உதாரணத்தின்மூலமாக விளக்குவோம். A, B, C, D எனும் 4 இயந்திரங்கள் 2 வேலைகளைக் கீழ்க்கண்ட தொழில் நுட்ப வரிசை முறையில் செய்து முடிக்கும் நேரங்கள் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை

வேலை		இயந்திரங்கள்			
வேலை 1	வரிசை முறை	A	B	C	D
	(நேரம்) (மணிகளில்)	2	4	5	1
வேலை 1	வரிசை முறை	D	B	A	C
	நேரம் (மணிகளில்)	6	5	2	3

ஆரம்ப காலத்தில் A இயந்திரத்தில் 1 இலக்கமிட்ட வேலை யையோ அல்லது 1 இயந்திரத்தில் 2 இலக்கமிட்ட வேலையையோ செயல்படுத்த வேண்டும், இரு வேலைகளையும் ஒரே இயந்திரத்தில் ஒரே சமயத்தில் செய்ய முடியாது. ஆயினும், இரு வேலைகளையும் வெவ்வேறு இயந்திரத்தில் ஒரேசமயத்தில் தொழில் நுட்பவரிசை முறையில் செயல்படுத்தலாம்.

இந்த வேலைகளை 1,2 என்ற வரிசை முறையிலோ அல்லது 2,1 என்ற வரிசை முறையிலோ ஒவ்வொரு இயந்திரத்திலும் செய்யக்கூடிய விதத்தை இப்போது தீர்மானிக்கவேண்டும்.

இவ்வாறான m இயந்திரங்களுக்கான m தீர்மான விதங்களின் தொகுப்பை ஒரு திட்டம் (Program) என்கிறோம்.

ஆகவே, எல்லா விதமான நிகழக் கூடிய திட்டங்களை ஓர் அட்டவணைப் படுத்துவதே முதல் கட்டத் தீர்வாகும், இதில் மொத்தம் 2^m நிகழக்கூடிய திட்டங்கள் உள்ளன. இங்கு $m=4$ இயந்திரங்களுள்ளதால்,

$2^m=16$ நிகழக்கூடிய திட்டங்கள் உள்ளன.

A இயந்திரத்தில் வேலைகள் 1-க்குப் பிறகு வேலை எண் 2 என்ற தீர்மானத்தை "a" எனக் கொள்க.

இதேபோல

$\bar{a}$ = (A இயந்திரத்தில் வேலைஎண் 2-க்கு பிறகு வேலை எண் 1 என்ற தீர்மானம்)

அதாவது,

$a = 4$ இயந்திரத்தில் வேலை வரிசை முறை 1,2 ஆகும்.

$\bar{a} = A$ .... 2,1 ஆகும்.

இதேபோல,

$b = B$ இயந்திரத்தில் வேலை வரிசை முறை 1,2

$\bar{b} = B$ 2, 1

மற்ற இயந்திரங்களுக்கும் இந்த முறையைப் பின்பற்றக் கிடைக்கும் 16 நிகழக் கூடிய திட்டங்களைப் பின்வருவாறு அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

திட்ட எண்
(Program Number)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	a	$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	b	b	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	b
$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c	c	c	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c	c	c
$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	$\bar{d}$	d	d	d	d	d	d	d	d

அட்டவணை எழுதும் முறை

kஆவது நிரை (row)-யில் முதல் 2^{k-1} இடங்களுக்கு மேல் கோடிட்டு எழுத்துகளையும் அடுத்து வரும் 2^{k-1} இடங்களுக்கு மேல் கோடில்லாமல் எழுத்துகளையும் எழுதி இதே போல் தொடர்ந்து எழுதி முடிக்கவும். உதாரணமாக 3ஆவது நிரையானது $2^{3-1} = 4$ இடங்களுக்கு $\bar{c}$ எழுத்துகளுடனும் பிறகு $4c$ எழுத்துக்களுடனும் பின்னர் $4\bar{c}$-ம் கடைசியில் $4c$ எழுத்துக்களுடனும் பூர்த்தியாகிறது. 1ஆவது நிரையானது $2^{1-1} = 1$ $\bar{a}$ பிறகு ஒரு a இதே போல் மாற்றி மாற்றி எழுதி முடிக்கப்படுகிறது.

B-க்கு கொடுக்கப்பட்ட இயந்திரத்தில் இரு வேலைகளும் செயல்படும் ஒழுங்கு முறைகளை இத் திட்டங்கள் வகுக்கின்றன வேதவிர A கொடுக்கப்பட்ட வேலையைப் பற்றிய இயந்திரங்களின் தொழில் நுட்ப ஒழுங்கு முறைகளை இத்திட்டங்கள் வகுக்கவில்லை. திட்டம் எண் 1 $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ என்பது ஒவ்வொரு இயந்திரத்திலும் வேலை எண் 2-க்குப்பின் 1ஐச் செய் என்று மட்டுமே கூறுகிறது. இதை $(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}, \bar{d})$ என்றோ $(\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{a})$ என்றோ அல்லது மற்ற வரிசை முறைகளிலும் குறிப்பிடலாம். அடுத்தக் கட்டத் தீர்வானது தொழில் நுட்ப பயனெளிமையற்ற மற்ற எல்லா திட்டங்களையும் நீக்கிவிடுவதாகும். ஏனெனில் அவை குறிக்கப்பட்ட இரு தொழில் நுட்ப ஒழுங்கு முறைகளுக்கு ஒவ்வாதவையாகும்.

விதி : வேலை 1ஐச் செய்ய X இயந்திரம் yஐ முந்துவதாகவும் வேலை 2ஐச் செய்ய y இயந்திரம் Xஐ முந்துவதாகவும் கொள்வோம். எனவே $\bar{x}$, y என்ற இரு தீர்மானங்களை யொட்டிய எந்த ஒரு திட்டமும் தொழில் நுட்ப முறையில் பயனெளிமையற்றதாகிறது. இதை எளிதில் நிரூபிக்கலாம். தொழில் நுட்ப

ரீதியாக கீழ்கண்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கிடையேயான நேர் உறவுகளைக் காண முடிகிறது.

[Y-ல் வேலை 1]ஐ [X-ல் வேலை 1] முந்துகிறது. ... (1)

[X-ல் வேலை 2]ஐ [Y-ல் வேலை 2] முந்துகிறது. ... (2)

$\bar{x}$, y என்ற தீர்மானங்களைக் கொண்ட ஒரு திட்டம் சரியானதாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால்

[X-ல் 1]ஐ [Z-ல் 2] முந்துகிறது. ... ... (3)

மேலும் [Y-ல் 2]ஐ [Y-ல் 1] முந்துகிறது. ... (4)

இங்கு (1), (2), (4) மூன்றையும் சேர்த்துப் பார்த்தால், [Xல் 2]ஐ [Y-ல் 2] முந்த, [Y-ல் 2]ஐ [Y-ல் 1] முந்த, [X-ல்1]ஐ [X-ல் 1] முந்துகிறது.

எனவே, [X-ல் 2]ஐ [X-ல் 1] முந்துகிறதாகும். ... (5)

ஆனால் (3)ஆவது கூற்றின்படி (5) தவறுகிறது.

எனவே. மேற்படி விதி நிரூபணமாகிறது.

இந்த விதியைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வேலைகளுக்கும் பின்புற ஒழுங்கில் (reverse order) அமையும் இயந்திரங்களின் எல்லா ஜதைகளையும் அடையாளம் காண்போம்.

தரப்பட்ட வினாவில் [ஒழுங்குமுறை $ABCD$, $DBAC$ செய்தால்] AB, AD, BD, CD என்பன இத்தகைய ஜதையாகும்.

(ஏனெனில் AC, BC, CD என்பன சரியான ஒழுங்கு முறையில் அமைந்துள்ளனவாம்.)

இவ் விதியின்படி $\bar{a}b$, $\bar{a}d$, $\bar{b}d$ அல்லது $\bar{c}d$ என்ற திட்டங்கள் தொழில் நுட்ப முறையில் பயனெளிமையற்றதாக உள்ளது, இதனால் 9 திட்டங்கள் (எண்கள் : 3, 7, 9, 10, 11, 12, 13. 14, 15) நீக்கப்பட்டு மீதித் திட்டங்கள் சோதனையில் உள்ளன அவையாவன:

1	2	4	5	6	8	16
$\bar{a}$	a	a	$\bar{a}$	a	a	a
$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	b
$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c	c	c
$\breve{d}$	$\breve{d}$	$\bar{d}$	d	$\breve{d}$	$\bar{d}$	$\breve{d}$

இந்தக் குறைந்த எண்ணிக்கைத் திட்டங்களிலிருந்தும் உகந்ததல்லாதவற்றை நீக்கத்தக்க விதிகள் (நிரூபணமின்றி) கீழே தரப்பட்டுள்ளன:

விதி	தொழில் நுட்ப ஒழுங்கு முறைகள்		கீழ்க்காணும் திட்டங்கள் நீக்குக
	வேலை-1	வேலை-2	
I	X.. ......Y	Y	xy
II	X..... Y......	...XY...	$\bar{x}y$
III	... .. X......Y	.. XY...	$\bar{x}y$
IV	......XY.. ...	X Y...	$x\bar{y}$
V	..... XY...Z ..	...X.. YZ...	$x\bar{y}z$
VI	.. X...YZ...	.. XY...Z...	$\bar{x}y\bar{z}$

புள்ளி குத்திக்காட்டியுள்ள இடங்கள் தொழில் நுட்பஒழுங்கு முறையில் மற்ற இயந்திரங்களின் இடங்களைக் குறிப்பதாகும். நமது உதாரணத்தில் தொழில் நுட்ப ஒழுங்கு முறையில் $ABCD$ $DBAC$ என்பதால் $(A\ldots\ldots D v_3 D)$ என்ற விதிஎண் 1 ஆனது adஐக் கொண்ட 16-ம் எண் திட்டத்தை நீக்குகிறது. விதி எண் 2 $(A\ldots\ldots C\ldots\ldots)\ v_3\ (\ldots AC)$ ஐக் கொண்டு $\bar{a}c$ஐக் கொண்ட 5ஆவது திட்டத்தை நீக்குகிறது. விதிகள் 3 4 5 6 நமக்குப் பயன்படுவதில்லை. எனவே, கீழ்க்காணும் 5 தொழில் நுட்ப ஒழுங்கு முறைத் திட்டங்கள் உகந்ததாகத் தெரிகிறது.

இப்போது மீதமுள்ள ஒவ்வொரு திட்டத்திற்கும், காண்ட் வரைபடம் மொத்தக் கழிவு நேரத்தைக் கணித்து, அவற்றில் மீச்சிறு மதிப்புகளின் திட்டத்தை நாம் தேர்ந்தெடுக்கின்றோம்.

திட்ட எண்

1	2	4	6	8
$\bar{c}$	a	a	a	a
$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	$\bar{b}$	b
$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c
d	d	$\bar{d}$	d	$\bar{d}$

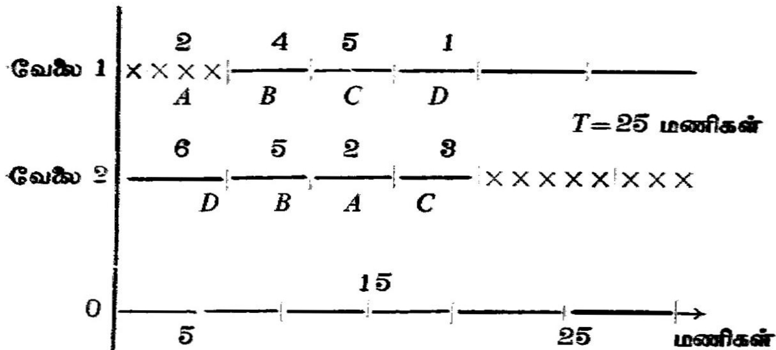
திட்ட எண்-1 : ($\bar{a}\ \bar{b}\bar{c}\ d$) எல்லா இயந்திரங்களிலும் வேலை 2 ஐ செய்யவும். (வேலை 2 க்குப் பின் வேலை 1)

வேலை 2 வரிசை முறை $D\ B\ A\ C$

நேரம் 6 5 2 3

வேலை 1 வரிசை முறை $A\ B\ C\ D$

நேரம் 2 4 5 1



காண்ட் வரைபடம்

மொத்தக் கழிவு நேரம் = 25 மணிகள்

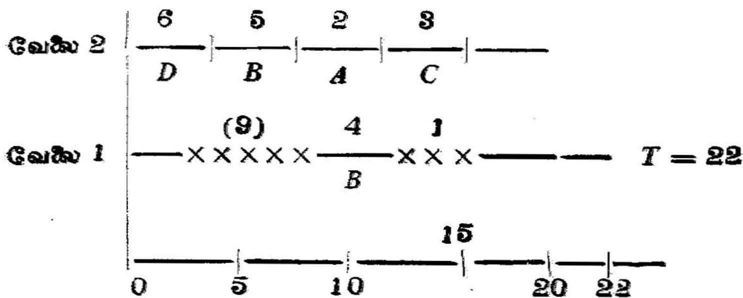
திட்ட எண் 2: $a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ A-ல் [1-க்கு பின் 2] மற்றவைகளில் [2-க்குப் பின்] மாகச் செய்தல்

வேலை 2 வரிசை முறை $D\ B\ A\ C$

நேரம் 6 5 2 3

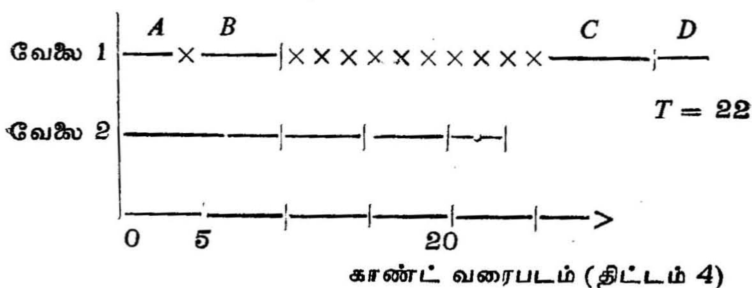
வேலை 1 வரிசை முறை $A\ B\ C\ D$

நேரம் 2 4 5 1



காண்ட் வரைபடம் (திட்டம் 2)

திட்டம் 4: $(a, b, \bar{c}\ \bar{d})$



காண்ட் வரைபடம் (திட்டம் 4)

திட்டம் 6 $(a\ \bar{b}\ c\ \bar{d})$

வேலை 2   *D B A C*   *A,C* இயந்திரங்களில் [1-க்குப் பின் 2]

6 5 2 3   *B,D*-ல் [2-க்குப் பின் 1]

வேலை 1   *A B C D*

2 4 5 1

2   9   4   5   1

A   *B*   *C*   *D*

(21 மணிகள்)

15

5   10   20   23

$T = 23$ மணிகள்

காண்ட் வரைபடம் (திட்டம் 6)

திட்டம் 8

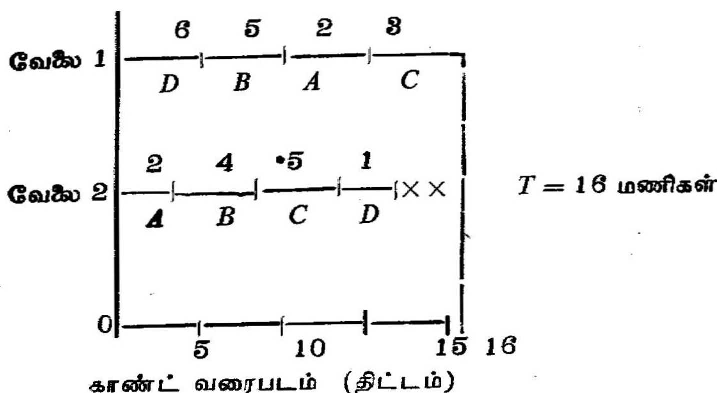
$(a.b,c,d)$ *A,B,C* இயந்திரங்களில் [1க்குப் பின் 2] [2-க்குப் பின் 1]   *D*-ல்

வேலை 2   *D B A C*

6 5 2 3

வேலை 1   *A B C D*

2 4 5 1



காண்ட் வரைபடம் (திட்டம்)

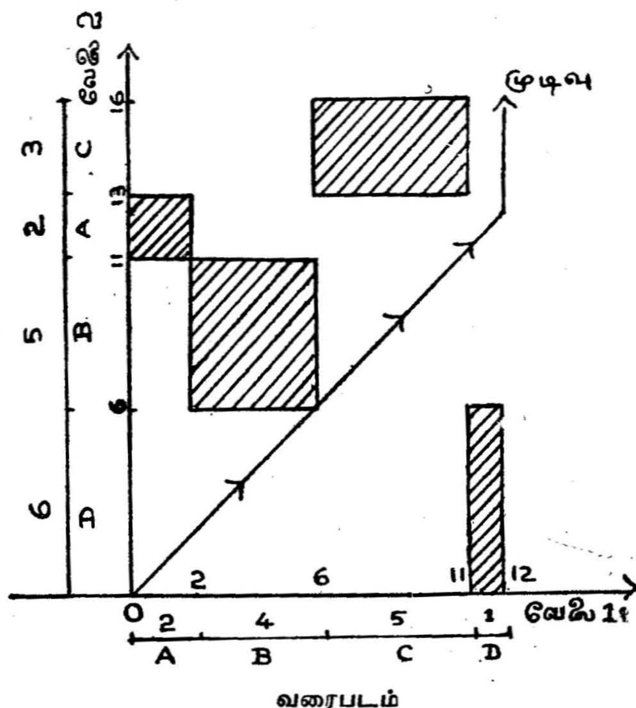
இந்த 5 திட்டங்களின் காண்ட் வரைபடங்களின்மூலம் திட்டம் 8-ன் காண்ட் வரைபடம் தான் மீச்சிறு மொத்தக் கழிவு நேரம் 16 மணிகள் என்று அறிகிறோம்.

இந்த 2-வேலை இயந்திரங்கள் கணக்கை வரைபட முறையிலும் அணுகுவோம் (graphically). இந்த முறை உபயோகப்படுவதற்கு எளிதானதும் நல்ல விளைவுகளைத் தரக்கூடியதும் ஆகும். X, Y இரு அச்சுகளையும் கோடிட்டு வேலை 1ஐச் செய்யும் நேரங்களை X–அச்சிலும், வேலை 2ஐச் செய்யும் நேரங்களை Y அச்சிலும் குறிப்பதாகத் தொழில் நுட்ப முறையில் இயந்திரங்கள் இரு வேலைகளுக்கும் கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(வரைபடம் அடுத்தப் பக்கம் பார்க்கவும்)

இந்த வரைபடத்தில் குறுக்குக் கோட்டில் அமைந்துள்ள எந்த ஒரு Q புள்ளியையும் எடுத்துக்கொண்டால் வேலை எண் 1-ம் $\frac{1}{3}$-ம் வேலை எண் 2-ல் $\frac{1}{4}$-ல் முடிவு பெற்றதைக் காட்டுகிறது. இந்த Q புள்ளி மூலத்திலிருந்து (origin) ஆரம்பித்து ஒவ்வோர் இயந்திரத்திலும் அந்தந்த வேலையை முடித்த நிலையில் நகர்ந்து "முடிவு" இடத்தை அடைவதற்கு ஏற்படும் கோட்டுப்பாதையை ஒரு திட்டம் என்று கூறலாம். Q-ன் பாதையானது படுக்கை கோடு அல்லது குத்துக் கோடு அல்லது சரிவு 1 (slope 1) உள்ள மூலை விட்டக் கோடாகவோ உள்ள துண்டுக் கோடுகளின் தொகுப்பாக (series of segments) அமையும் வலது புறமாகக் கருதலானது வேலை எண் 2. நடைபெறும்பொழுது வேலை எண் 2 சும்மா இருப்பதைக் குறிக்கும். மேல் நோக்கி நகருதலானது வேலை எண் 2 நடைபெறுகையில் வேலை எண் 1 சும்மா இருப்

பதைக் குறிக்கும் மூலை விட்டத்தில் குறுக்குக் கோடாய் நகரு தலானது இரு வேலைகளும் ஒரே சமயத்தில் நடைபெறுவதைக்



வரைபடம்

குறிக்கும். Q-ன் மற்றொரு கட்டுப்பாடு, இரு வேலைகளும் ஒரே சமயத்தில் ஒரே இயந்திரத்தில் செய்ய முடியாது என்பதாகும். உதாரணமாக A இயந்திரத்தில் வேலை எண் 1-ம் வேலை 2-ம் ஒரே சமயத்தில் செய்ய முடியாததாகையால் X அச்சில் A அளவு Y அச்சில் A-ன் அளவு இவற்றின் கார்டிஷியன் பரப்பளவும் பகுதியை நிழலுருவத்தில் (Shaded Area) காட்டப்பட்டுள்ளது. Q-ன் குறுக்குக் கோட்டுப்பாதை இந்த நிழலுருவத்தில் செல்ல முடியாது. இதே போல மற்ற இயந்திரங்களுக்கும் நிழல் உருவங் கள் வரையப்பட்டுள்ளன. எனவே, வேலை எண் 1-ன் பயனற்ற (வீணான) நேரத்தைப் படுக்கைக் கோடுமூலமாகவும் வேலை எண் 2-ன் பயனற்ற (வீணான) நேரத்தைக் குத்துக்கோடுமூலமாகவும் அறியலாம். இந்தப் பயனற்ற (வீணான) நேரத்தை ஒவ்வொரு வேலைக்கும் மீச்சிறுமமாக்கவல்ல பாதை ஒரு குறுக்கு கோடுமூல மாக அமைகிறது. ஆகவே, எந்த அளவுக்கு Q-ன் பாதையானது

தொ. மு.—15.

குறுக்குக் கோட்டிலேயே அமைகிறதோ அதுதான் ஒரு பெரிதும் உகந்த பாதையாகக் கொள்ள விரும்புகிறோம். இந்த பாதையில் பயனற்ற நேரங்கள் (எந்த வேலைக்கும்) கண்கூடாகக் காண்கின்றோம் (பக்கம் 225 வரைபடம் காண்க). வரைபடத்தில் அம்புக் குறியிட்டக் கோட்டுப்பாதைதான் ஒரு சிறந்த பாதையாகிறது. தீர்மானிக்கப்பட்ட இந்த குறுக்குக் கோட்டுப் பாதைமூலம் நாம் அறிவது :

வேலை 1-க்கான பயனற்ற (வீணான) நேரம் 4 மணிகள். வேலை 2-க் கான பயனற்ற நேரம் 0 மணிகள். எனவே, வேலை 1-ன் செயல் நேரங்களும் அதன் வீணான நேரங்களும் சேர்ந்து வேலை 1-க்கான மொத்தக் கழிவு நேரம். இது $12 + 4 = 16$ மணிகள். இதேபோல வேலை 2-ன் செயல் நேரங்களும் அதன் வீணான நேரங்களும் சேர்ந்து 1-ன் செயல் நேரங்களும் அதன் வீணான நேரங்களும் சேர்ந்து வேலை 2-க்கான மொத்தக் கழிவு நேரம் $= 16 + 0 = 16$ மணிகள். இந்த வரைபடத்தின் மூலமாக எளிதில் கிடைக்கப்பட்ட விடையையே மிகவும் கடினமான முந்தின முறையில் கண்டறிந்தோம்.

பயண விற்பனையாளர் பிரச்சினை (Travelling salesman)

ஒரு பயண விற்பனையாளரை n நகரங்களுக்கு பயணம் செய்து (தன் வியாபாரத்தின் நிமித்தமாக) ஆரம்பித்த இடத்திற்கே திரும்பும் மொத்தப் பயண தூரத்தை மீச்சிறுமமாக்கும் ஒரு வழித் தடத்தைத் தேர்ந்தெடுக்கின்றார். இதையே வேறு விதத்தில் கீழ்க் கண்டவாறு கூறலாம். n பொருள்களை ஏதாவது ஓர் ஒழுங்கு முறையில் தொடர்ந்தாற்போல் உற்பத்தி செய்வதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு பொருளின் நிறுவன அமைப்புச் செலவும் (set up cost) அதற்குச் சற்று முந்தியதாக உற்பத்திச் செய்த பொருளைச் சார்ந்ததாக அமைகிறது. A_i பொருளுக்குப் பின் A_j பொருள் உற்பத்தியாகும் நிலையில் ஏற்படும் நிறுவன அமைப்புச் செலவு C_j குறிக்கப்பட்டால் மொத்த நிறுவன அமைப்புச் செலவு மீச்சிறுமப்படுத்தக்கூடிய பொருள்களின் வரிசை முறையைத் தீர்மானிக்க நாம் முற்படுவோம். தனிப்பட்ட நிறுவன அமைப்புச் செலவு ஒரு சதுர அணியில் (Square Matrix) ஒழுங்குபடுத்துவோம்.

இங்குத் தலையாய மூலைவிட்டங்களின் மதிப்புகள் பூஜ்யமாக இருக்கும் (leading diagonal terms). நிரையின் இடது பக்கத்தில் குறித்த பொருளிலிருந்து நிரலின் உச்சியில் குறித்த பொருள்களுக்கு மாற்றப்படும். நிறுவன அமைப்புச் செலவை இச் சதுர அணியில் காணலாம். ஒரு பொருளிலிருந்து அதே பொருளுக்கு

மாற்றப்படும் நிறுவன அமைப்புச் செலவு பூஜ்யமாவதை இங்குக் காணலாம். ஒவ்வொரு நிரைக்கு ஒரு மூலப் பொருளுமாக, n மூலப்

இருந்து		A_1, A_2, A_3 ... வரை A_n				
	A_1	—	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
	A_2	a_{21}	—	a_{23}	......	a_{2n}
	...	......	......	......	......	......
	A_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	......	—

பொருள்களை அல்லது (a_{ij}) மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இப்படித் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் கூடுதல் மீச்சிறுமமாக இருக்கவேண்டும். இப்போது இந்தக் கணக்கு ஒரு வகுப்பீட்டுக் கணக்காகிறது எனக் காண்கிறோம். மேலும், மூலப் பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் மேலும் இரண்டு கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன. முதலாவதாக மூலை விட்டங்களில் பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக்க முடியாததாகையால், தலையாய மூலை விட்டங்களின் மதிப்புகளை ∞ என்று குறிப்பதன்மூலம் அந்த மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதைக் கைவிட்டு விடலாம். இரண்டாவதாக A_i பொருள் உற்பத்தி செய்த பிறகு, மற்ற எல்லாப் பொருள்களையும் உற்பத்தி செய்து முடிக்கும் வரை, மேற்கொண்டு A_iஐ உற்பத்தி செய்ய நாம் விரும்பவில்லை.

உதாரணமாக A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 என்ற 5 பொருள்களுக்கான a_{ij} மதிப்புகளின் தீர்வு C_{12}, C_{21}, C_{34}, C_{45}, C_{53} என்றால் அத் தீர்வு சரியானதல்ல. ஏனெனில், C_{12}, C_{21}ஐ எடுத்துக் கொண்டால் A_1ஐ உற்பத்தி செய்தபின் A_2ஐ உற்பத்தி செய்துவிட்டு, பிறகு A_3, A_4, A_5ஐ உற்பத்தி செய்வதற்கு முன்னரே A_1 ஐத் திரும்பவும் உற்பத்தி செய்கின்றோம். (அதாவது C_{12}–ன் நிலைமை) பயண விற்பனையாளர் கணக்கைத் தீர்வு காணும் எல்லா முறைகளும் ஏதாவது ஒரு நிலையில் கணக்கெடுப்பிற்கு ஆளாகின்றன.

ஆகவே, இந்தச் சூழ்நிலையில் இந்தக் கணக்கை ஒரு வகுப்பீட்டுக்கணக்காக மனத்தில் கொண்டு தீர்வு காண முற்படுவதே சாலச் சிறந்ததாகும். இத்தகைய கணக்கை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் விளக்குவதற்கு முன்னால் பின்வரும் கூற்றை (Statements) கவனிப்போம்.

(i) $n \times n$ ஒழுங்கு முறையில் சதுர அணி $[a_{ij}]$ தரப்பட்டுள்ளது.

(ii) $a_{ii} = \infty$ ஒவ்வொன்றுக்கும் என்றால் $(C_{pq}, C_{qr}, C_{rq} \ldots\ldots C_{uv})$ c_{vp} என்ற n மதிப்புகளை இவற்றின் கூட்டுத்தொகை மீச்சிறுமமாக இருக்கும்படி கண்டுபிடிக்கவேண்டும். இங்கு $(p, q, r, s \ldots\ldots uv)$ என்பன $1, 2, 3 \ldots\ldots n$ என்ற n எண்களின் ஏதோ ஒரு வரிசை மாற்றம் (permutation) ஆகும். $1, 2, 3 \ldots\ldots n$ என்ற n எண்களுக்கு மொத்தத்தில் $n!$ வரிசை மாற்றங்கள் உண்டு. ஆனால், எந்த ஒரு கொடுக்கப்பட்ட சிறு தொகுப்பிலிருந்தும், சரிசமமாக n தொகுதிகளை நாம் உண்டாக்க முடியும். எப்படியெனில், ஒரு தரப்பட்ட சிறு தொகுப்பின் மூலமாக நடுவில் எங்காவது ஆரம்பித்துக் கடைசியிலிருந்து விட்டுப்போன a_{ij}-க்களை வரிசைப்படி குறித்தால் n சிறு தொகுப்புகள் (subsets) கிடைக்கும். எனவே, $(n-1)!$ சிறு தொகுப்புகளிலிருந்து எங்கிருக்கிறது எனக்கண்டுபிடிக்கலாம்.

உதாரணம் :

நிறுவன அமைப்புச் செலவுகளின் அணி கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு சுற்று (cycle) க்குமான அமைப்புச் செலவை மீச்சிறுமமாக்குவதற்கு உற்பத்தியை எவ்விதம் வரிசை முறைப்படுத்த வேண்டும் என்று கண்டுபிடி.

இருந்து \ வரை	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	∞	2	5	7	1
A_2	6	∞	3	8	2
A_3	8	7	∞	4	7
A_4	12	4	6	∞	5
A_5	1	3	2	8	∞

முதலில் இதை ஒரு வகுப்பீட்டுக் கணக்காகவே எடுத்துக்கொண்டு தீர்வு காண ஆரம்பிப்போம். ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்தும் மீச்சிறு மதிப்பைக் கழித்தால் கிடைப்பது:

வரை

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5 ✓
A_1	∞	1	3	6	0
A_2	4	∞	1	6	0
A_3	4	3	∞	0	3
A_4	8	0	2	∞	1
A_5 ✓	0	2	1	7	∞

ஒவ்வொரு நிரையிலிருந்து மீச்சிறு மதிப்பைக் கழித்தால் கிடைப்பது :

வரை

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	∞	1	2	6	[0]
A_2	4	∞	[0]	6	0
A_3	4	3	∞	[0]	3
A_4	8	[0]	1	∞	1
A_5	[0]	2	0	7	∞

இந்த அணியில் கட்டங்கள் வகுப்பீட்டுக் கணக்கின் தீர்வைக் காண உதவுகின்றன.

தீர்வு: $C_{15}, C_{23}, C_{34}, C_{42}, C_{51}$ இது பயண விற்பனையாளர் கணக்கின் தீர்வாகக் கொள்ளமுடியாது. ஏனெனில் A_1-லிருந்து A_5-க்குச் சென்றுவிட்டு A_5-லிருந்து A_1-க்குத் திரும்பி வரவேண்டிய தீர்வாக உள்ளது.

எனவே, இதைவிடச் சிறந்த ஒரு தீர்வுக்காகத் தரப்பட்ட அணியை மறுபடியும் ஆராய்வோம். கூடுதலாகக் கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளைத் திருப்திபடுத்தும் அளவில் ஒரு தீர்வைக் காணலாம். அணியில் மிகச் சிறிய மதிப்பு 1 என்பதால் தீர்வில் இம் மதிப்பை எடுத்துக்கொள்வதால் ஏற்படும் விளைவைக் கவனிப்போம்.

∞	[1]	3	6	0
4	∞	0	6	0
4	3	∞	[0]	3
8	0	1	∞	1
[0]	2	0	7	∞

(1, 2) கட்டத்தின் மதிப்பிலிருந்து தீர்வுகாண ஆரம்பிப்போம். 1ஆவது நிரையையும் 2ஆவது நிரலையும் கோடிட்டு நீக்கவும். மீதமுள்ள 4×4 அணியில், உகந்ததொரு தீர்வை □ கட்டத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

மேலும், இத்தகைய பயண விற்பனையாளரின் ஒரு பயனெளிமையுடைய தீர்வாகும். ஆனால், இந்த மாற்று அணியின்மூலமான செலவு 2 ஆகிறது. $(1+1)$. எனவே, இதைவிடச் சிறந்த ஒருதீர்வைக் காண (4, 3) கட்டத்தின் மதிப்பிலிருந்து ஆரம்பிப்போம்.

∞	[1]	3	6	0
4	∞	0	6	[0]
4	3	∞	[0]	3
8	0	[1]	∞	1
[0]	2	0	7	∞

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	∞	[2]	5	7	1
A_2	6	∞	[3]	8	2
A_3	8	7	∞	[4]	7
A_4	12	4	6	∞	[5]
A_5	[1]	3	2	8	∞

4ஆவது நிரையையும் 3ஆவது நிரலையும் நீக்கிவிட்டு மீதமுள்ள 4×4 அணியில் உகந்த தீர்வைக் காண்பின் திரும்பவும் மீச்சிறு செலவு 2 ஆகிறது. எனவே, மிகச் சிறந்த சுற்று $A_5 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow$ ஆகும்.

$$(5, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 3), \quad (3, 4), \quad (4, 5)$$

எனவே, மொத்த நிறுவன அமைப்புச் செலவு

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

பயிற்சிகள் :

1. கீழே குறிக்கப்பட்ட வேலைகளை முடிப்பதற்கு ஆகும் மொத்தக் கழிவு நேரத்தை மீச்சிறுமபடுத்தும் ஒரு வரிசை முறையைக் கண்டுபிடி.

வேலை	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1ஆவது இயந்திரத்தில் ஆகும் நேரம்	2	5	4	9	6	8	7	5	4	
2ஆவது இயந்திரத்தில் ஆகும் நேரம்	6	8	7	4	3	9	3	8	11	

2. கீழே காணும் வேலைகளைச் செய்து முடிக்க ஆகும் மொத்தக் கழிவு நேரத்தை மீச்சிறுமமாக்கும் ஒரு வரிசை முறையைக் கண்டுபிடி.

வேலை	A	B	C	D	E	F	G
முதல் இயந்திரத்தில் ஆகும் நேரம்	3	8	7	4	9	8	7
2ஆவது ,,	4	3	2	5	1	4	3
3ஆவது ,,	6	7	5	11	5	6	12

(3) ஓர் ஏடு கட்டுபவர் (Book Binder), ஓர் அச்சகம் ஒரு ஏடு கட்டும் இயந்திரம் (binding machine) மேலும் நிறை நூல்களின் (Manuscripts) கையெழுத்துப் பிரதிகள் இவற்றை வைத்திருக்கிறார். ஒவ்வொரு நூலையும் அச்சடிக்கவும் ஏடுகட்டவும் ஆகும் நேரங்கள் (மணிகளில்) கீழே தரப்பட்டுள்ளன. எல்லா நூல்களும் முழுமையாக வெளிவரும் ஆகும் மொத்த நேரத்தை மீச்சிறுமமாக்கக்கூடிய நூல்களின் வரிசை முறையைத் தீர்மானிக்கவும்.

நூல்	அச்சிடும் நேரம்	ஏடுகட்டும் நேரம்
1	30	80
2	120	100
3	50	90
4	20	60
5	90	30
6	110	10

(4) மூன்ருவது பயிற்சியில் மற்றுமொரு வேலை அதாவது இறுதிக்கட்ட வேலை நேரம் (finishing time) சேர்க்கப்படுகிறது என்ருல் நூல்களின் வரிசை முறை எவ்வாருக இருக்கும் ?

நூல்	அச்சிடும் நேரம்	ஏடுகட்டும் நேரம்	இறுதிக்கட்ட நேரம்
1	30	80	20
2	120	100	40
3	50	90	60
4	20	60	120
5	90	30	70
6	110	10	30

இந்த கணக்கிற்கு ஒரு கடுமையான (பிசகாத) (vigorous) பெரிதும் உகந்த தீர்வைக் காண முற்படவேண்டாம், ஒரு சிக்கனமான தீர்வைக் (Economical solution) காண முற்படவும்.

(5) ஒரு தொழிற் பட்டரையில் *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* என்ற 6 இயந்திரங்கள் உள்ளன. ஒவ்வோர் இயந்திரத்திலும் 2 வேலைகள் செய்யப்பட வேண்டும். ஒவ்வோர் இயந்திரத்திலும் வேலை வரிசை முறைகளும் அவை செயல்படும் நேரங்களும் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒழுங்கு முறை	1	2	3	4	5	6
வேலை 1	*A*—20	*C*—10	*D*—10	*B*—30	*E*—25	*F*—15
வேலை 2	*A*—10	*C*—30	*B*—15	*D*—10	*F*—15	*E*—20

வேலைகளை முடிப்பதற்கு ஆகும் மீச்சிறுமமாக்கும் வகையில் வேலைகள் ஒவ்வோர் இயந்திரத்தில் செயல்படும் வரிசை முறையைக் காண்க. இரண்டு முறைகளிலும் காண்க (காண்ட் வரைபடம் மூலமும் கார்டிஷன் வரைபடம் மூலமும்).

6. கீழ்க்கண்ட வேலைகளைத் தரப்பட்ட இயந்திரங்களில் இயக்குவதற்குத் தேவைப்படும் நேரங்களை மீச்சிறுமமாக்கும் வரிசைமுறையை இரண்டு முறைகளிலும் விளக்குக.

வேலை 1	ஒழுங்கு முறை	A	B	C	D	E
	நேரம்	2	3	4	6	2
வேலை 2	ஒழுங்கு முறை	C	A	D	E	B
	நேரம்	4	5	3	2	6

7. கீழே தரப்பட்டுள்ள நிறுவன அமைப்புச் செலவுகளின் அணியைப்பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு சுற்றுக்கான நிறுவன அமைப்புச்செலவை மீச்சிறுமமாக்க எவ்வாறு உற்பத்திப் போக்கை வரிசை முறைபடுத்த வேண்டும் என்று விளக்கிடுக. (இது ஒரு பயண விற்பனையாளரின் கணக்கு.)

		வரை				
		A	B	C	D	E
	A	∞	4	7	3	4
இருந்து	B	4	∞	6	3	4
	C	7	6	∞	7	5
	D	3	3	7	∞	7
	E	4	4	5	7	∞

6. பதிலமர்த்தீட்டுக் கருத்தியல்
(Replacement Theory)

பதிலமர்த்திட்டுத் தத்துவம்

ஓர் இயந்திரம் மின் விளக்கு முதலிய பொருள்களை மாற்றீடு செய்யும்பொழுது ஏற்படும் பலவித சிக்கல்களைப் பற்றிய படிப்பு பதிலமர்த்தீட்டுத் தத்துவம் ஆகும். பொதுவாக நாம் ஆராயும் பொருள்களுக்குச் செயலொழிவு ஏற்படும்போது (failures) பதிலமர்த்தீடு செய்யப்படுகிறது. உதாரணமாக ஒரு மனிதன் தனது பதவியிலிருந்து ஓய்வு பெறும்போதும் இறக்கும் போதும் அல்லது வேலையை விட்டு நீங்கும் போதும் பயனற்று விடுகிறார். அதே போல் ஒரு விமானப்பாங்கி (air-hostess) திருமணம் ஆகும் போது வேலைக்குப் பயனற்றவளாகி விடுகிறாள். ஆகவே, இச் சமயங்களில் வேறு ஆளை பதிலமர்த்தீடு செய்ய வேண்டியதாகிறது. செயல் ஒழிவு (failures) இரு வகையில் நிகழ்கிறது. ஒன்று படிப்படியாக நிகழ்தல் (gradual); இரண்டாவது திடீரென் நிகழ்தல் ஆகும். உதாரணமாக, ஓர் இயந்திரம் சில ஆண்டுகள் உபயோகப்படுத்தபட்ட பிறகு பராமரிப்பதற்கு அதிகச்செலவு பிடிப்பதுடன் அதன் உற்பத்தி மிக மிகக் குறைந்தும் விடுகிறது. இதே போல ஒரு தொலைபேசி பெயர் குறிப்பு நூல் நாள் ஆக பழமைபட்டதாகிறது. இச் சமயங்களில் பொதுவாக இத்தகைய பொருள்களை எப்போது பதிலமர்த்திட வேண்டும் என்பதே தலையாய பிரச்சினையாகும். செயலொழிவு என்பதைப் பல இடங்களில் அழிவு எனவும், அணைந்து விடுதல் என்றும் வெவ்வேறு விதமாகக் குறிக்கலாம்.

சில சூழ்நிலைகளில் ஒரு மின் விளக்கு முழுவதுமாக அணைந்து விடுதல், குழாய் அடைப்பு அல்லது ஒரு தொழிலாளியின் மறைவு இவை போன்ற தனி நிகழ்ச்சிகளை அழிவு செயலொழிவு என்கிறோம். அந்தப் பொருள் மாற்றீடு செய்வதற்கு உகந்ததாக இருந்தால், அதன் செயல் ஒழிவுக்குப் பிறகு எப்போது பதிலமர்த்தீடு செய்வதென்றால் எவ்வளவுக்கு விரைவில் பதிலமர்த்தீடு செய்ய முடியுமோ அவ்வளவு விரைவில் செய்வதேயாகும். மேலும், ஒரு பொருள் அதன் செயல் ஒழிவுக்குப்பின் பதிலமர்த்து

வதற்குப்பதிலாக அப் பொருளின் செயல் ஒழிவுக்கு முன்னமேயே பதிலமர்த்துதல் சிறந்ததாகும். இம் முறையே "தடுப்புப் பதிலமர்த்தீட்டு முறை" என வழங்குகிறோம். (Preventive Replacement).

பதிலமர்த்தீடு, செயலொழிவு போன்ற வார்த்தைகளை உபயோகப்படுத்துவதால் பதிலமர்த்தீட்டுத் தத்துவத்தின் பரந்த நோக்கம் முற்றிலும் அங்கீகரிக்கப்படவில்லை எனக் கூறலாம். இவ்வார்த்தைகள் தவறான எண்ணத்தைத் தோற்றுவிப்பதாகவும், முறையற்ற தடை வரம்புகளுடன் (unduly restrictive) உடையதாகவும் இருக்கின்றன. ஒரு பொருளின் பதிலமர்த்தீடு பற்றி ஆராய்கையில் சில சமயங்களில் அப் பொருளை உண்மையாகவே மாற்றீடு செய்வதில்லை. அதற்குப் பதிலாக அந்தப் பொருளுக்கு ஏற்ற நடைமுறையொழுங்கான பராமரிப்பைச் (Routine Maintenance) செய்துவிடுகிறோம். இப்படிச் செய்வதையும் பதிலமர்த்தீடு என்றுதான் குறிப்பிடுகின்றோம்.

உதாரணமாக, ஓர் இயந்திரத்திற்கு எண்ணெய் பூசி உராய்வைக் குறைப்பதோ (lubricating) சுத்தப்படுவதோ ஒழுங்காக்குவதோ (தக்கவாறு அமைத்துக் கொள்ளுவதோ) (adjusting) போன்ற பல வேலைகளை நடைமுறையொழுங்கான பராமரிப்பின் மூலம் பதிலமர்த்தீடு செய்கின்றோம். எனவே, எந்த ஒரு பொருளையும் உண்மையாக மாற்றீடு செய்தாலோ அல்லது செய்யாவிடிலோ செயல் ஒழிவின் விரும்பத்தகாத விளைவுகளைத் (undesirable consequence) தவிர்ப்பதற்காக அல்லது மீச்சிறுமமாக்குவதற்காக எடுக்கப்படும் எந்த ஒரு தனிப்பட்ட (special) செய்கையையும் ஒரு பதிலமர்த்தீடு என வரையறுக்கலாம்.

ஒரு பொருளின் செயல் ஒழிவு என்பது உண்மையாகவே அப் பொருள் அழிவுறாத போதும் கூட, அதன் செயல் நிறைவேற்றத்தை அழிகேடாக்கும் நிலையையோ (deterioration in performance) அல்லது ஒரு செயற் பாங்கில் (process) ஏற்படும் குறுக்கீட்டுத் தடங்கலையோ குறிக்கிறது (interruption in process). எனவே, பதிலமர்த்தீடு தத்துவம், ஏதோ தவறு நிகழும்போது (அழிவுகள்) அவற்றைச் சரிபடுத்த எடுக்கப்படும் நடவடிக்கைகளைப் (பதிலமர்த்தீடுகள்) பற்றியதாகும். ஆகவே, இந்தப் பதிலமர்த்தீட்டுத் தத்துவத்தின் நோக்கம் உண்மையாகவே மிகவும் பரந்த ஒரு நோக்கமாகும். (மேலே குறிப்பிட்ட விதத்தில்) எந்த ஒரு தொடர்ச்சியான செயற்பாங்கு முறையையும் செயல்ஒழிவு ஏற்பட வாய்ப்புள்ளதாகிறது. இத்தகைய செயல் ஒழிவுகள் அல்லது

அழிவுகள் அவை ஏற்படும் விதங்கள், அழிவுகளின் அலை வெண்கள் (frequency), அவை நிகழும் போது தோன்றும் விளைவு கள் — இவைகளைப் பற்றி நாம் அலசி ஆராய்வோம்.

செலவுகள்: எல்லாச் செயல் முறை ஆராய்ச்சி பயன்பாடு களிலும் (applications of O.R) உபயோகப்படுத்தப்படும் செலவு களை வாய்ப்புச் செலவுகள் (opportunity costs) என வழங்கு கிறோம். ஒரு செயல் ஒழிவினால் ஏற்படும் மொத்த நிதியின் விளைவை ''செயலொழிவுச் செலவு'' (cost of failure) எனலாம். அந்தச் செயலொழிவுச் செலவானது பதிலமர்த்தீட்டுச் செலவை மட்டும் கொள்ளாது மேலும், பல கீழ்க்கண்டவற்றால் ஏற்படும் செலவுகளையும் சேர்ந்தது ஆகும்.

கழிவுப் பொருள் (waste) பயனற்ற உடைசல் துண்டுகள் (scrap) உற்பத்தி நஷ்டம் (loss of production) இலாபத்தில் ஏற்படும் நஷ்டம், சாதனங்களின் (equipments) சிதைவு (damage) அல்லது ஊறுபாடு, காப்பு இடர் அல்லது அபாயம் (safety-risk) இவற்றில் ஏற்படும் செலவுகளையும் சேர்ந்ததுதான் செயல் ஒழிவுச் செலவு ஆகும். செயல் ஒழிவுகளின் விதங்கள் ஒரு செயற்பாங்கில் மாறினால் நிறுவன அமைப்புச் செலவைப் போலவே செயல் ஒழிவுச் செலவும் என்ன நடக்கும் என்பதைப் பொறுத்துள்ளது.

ஒரு மிகைப்படியான (extra) அழிவினால் மொத்தச் செலவில் ஏற்படும் கூடுதல், அழிவுச் செலவாகும். தடுப்பு பதிலமர்த்தீட்டுக் கணக்குகளில் முக்கியமான கருத்து என்னவென்றால் ஒரு தடுப்பு பதிலமர்த்தீட்டைச் செய்தால் ஓர் இசைவான காலத்தில் (covenient time) செலவுகளைப்பற்றி எண்ணாமல் பின்னால் பதி லமர்த்தீடு செய்வதால் ஏற்படும் செலவைவிட இந்தச் செலவு குறைவாக இருக்கும்.

படிப்படியாக அழிவுபெறும் பொருள்கள்

உதாரணம்

ஓர் இயந்திரத்தின் விலை 80,000 எனலாம். 1 ஆண்டுக் குப்பின் (அதை விற்றால்) அதன் மதிப்பு 48,000 ரூ. 2 ஆண்டு களுக்குப்பின் ரூ. 36,000 3 ஆண்டுகளுக்குப்பின் 27,000 ரூ. என்றவாறு உள்ளது. அதாவது, முதலாண்டில் அதிகப்படியான விலை இறக்கத்துக்குப் (heavier depreciation) பின்னர் அடுத் தடுத்த ஒவ்வோர் ஆண்டிற்கும் மீதமுள்ள மதிப்பில் 25 சத விகித மதிப்புக் குறைகிறது.

ஆண்டு	ஆண்டுக் கடைசியில் மதிப்பு	அந்த ஆண்டில் விலையிறக்கம்	இயக்கும் செலவு	ஆண்டின் மொத்தச் செலவு	கூட்டு மொத்தச் செலவு	ஆண்டொன்றுக் கான சராசரி செலவு
0	80,000	—	—	—	—	—
1	48,000	32,000	4,000	36,000	36,000	36,000
2	36,000	12,000	6,000	18,000	54,000	27,000
3	27,000	9,000	8,000	17,000	71,000	23,670
4	20,250	6,750	10,000	16,750	87,000	21,940
5	15,200	5,650	12,000	17,050	1,04,000	20,960
6	11,400	3,800	14,000	17,800	1,22,600	20,430
7	8,550	2,850	16,000	18,850	1,41,450	20,210
8	6,400	2,150	18,000	20,180	1,61,600	20,200
9	4,800	1,600	20,000	21,600	1,83,200	20,360

அதன் இயக்கும் செலவு (operating cost) இயந்திரத்தின் சீர் குலைவு (break down) காரணமாக ஏற்படக் கூடிய உற்பத்தி இழப்பு, கழிவு களத்தின் (சில்லரைப் பொருளின்) செலவு முதலியன சேர்ந்து இயக்கும் செலவு முதலாண்டில் 4000 ரூபாயும், இரண்டாம் ஆண்டில் 6000 ரூபாயையும் என்று ஒவ்வோர் ஆண்டும் ஆண்டு ஒன்றுக்கு 2000 ரூபாய் கூடுதலாக மதிப் பிடப்பட்டுள்ளது. இந்த இயந்திரத்தை எப்பொழுது பதில மர்த்தீடு செய்ய வேண்டும் ?

பக்கம் 238-ல் கண்ட அட்டவணைமூலம் மீச்சிறு சராசரி வரு டச் செலவு ரூ 20200 என அறிகிறோம். ஆகவே, ஒவ்வோர் எட்டு ஆண்டுகளிலும் இயந்திரத்தை பதிலமர்த்தீடு செய்ய வேண்டும் எனக் கணிக்கிறோம். (இந்த இயந்திரத்தை ஒவ்வொரு 6, 7 அல்லது 9 ஆண்டுகளுக்கு ஒருமுறை மாற்றீடு செய்தால் குறைந்த தண்டத் தொகை (penalty) ஆகிறது என்பதைக் காணலாம்.)

உதாரணம்

மற்றோர் உதாரணமாக லாரிகளின் சொந்தக்காரர் ஒருவர் ஒரு லாரியை எப்பொழுது பதிலமர்த்தீடு செய்ய வேண்டும் என்ற பிரச்சினையை ஆராய்வோம். நாள் செல்லச் செல்ல ஒரு லாரி பயனற்றுப் போவதால் எப்பொழுது அதை மாற்ற வேண்டும் என்று தீர்மானிப்பது அவரின் பொறுப்பு ஆகிறது. இதற்காகக் கீழ்க்கண்ட பிரச்சினையைக் கவனிப்போம்.

ஒரு லாரி 6,000 ரூபாய்க்கு வாங்கப்படுகிறது. அதை ஒட்டு வதற்காக ஆண்டு ஒன்றுக்கு ஆகும் செலவுகளையும் அதன் மறு விற்பனை மதிப்புகளும் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. லாரியை எந்த வருடத்தில் பதிலமர்த்திட வேண்டும்.

	ஆண்டு t	1	2	3	4	5	6	7	8
R_t	ஓட்டச்செலவு	1000	1200	1400	1800	2300	2800	3400	4000
S_t	மறு விற்பனை மதிப்பு	3000	1500	750	375	200	200	200	200

தீர்வு

அந்த லாரியின் (பயன்படும்) ஆயுள் காலத்தில் ஆண்டுச் சராசரிச் செலவைக் காட்டக் கூடிய ஓர் அட்டவணையைப் பின் கண்டவாறு தயாரிப்போம்.

பதிலமர்த்தீடு செய்யும் ஆண்டுக்கடைசி	மொத்த ஓட்டச் செலவுகள்	மொத்த மூலதனச் செலவுகள்	கூட்டுமொத்தச் செலவு	ஆண்டுச் சராசரிச் செலவு
1	1000	2000	4000	4000
2	2200	4500	6700	3350
3	3600	5250	8850	2950
4	5400	5625	11025	2756
5	7700	5800	13500	(2700)
6	10500	580	16300	2750

மொத்த மூலதனச் செலவு = கொள்முதல் மதிப்பு—
மறுவிற்பனை மதிப்பு = $P - (St)$

கூட்டு மொத்தச் செலவு = ஓட்டச் செலவு + மூலதனச் செலவு
$= R(t) + [P - S(t)]$

இங்கு $P = 6000$ ரூபாய்

5 ஆண்டில் ஆண்டுச் சராசரி செலவு மீச்சிறுமமாக இருப்பதால் 5ஆவது ஆண்டின் இறுதியில் லாரியைப் பதிலமர்த்தீடு செய்யவேண்டும்.

அப்படி செய்யாவிட்டால், ஆண்டொன்றுக்கான சராசரி செலவு அதிகரிக்க ஆரம்பிக்கும்.

மாதிரி 3:

ஒரு செய்—தொழிலாளியிடம் (ஆக்குவிப்பவர்) (manufacturer) A, B என்ற இரு இயந்திரங்கள் தரப்படுகின்றன. A-யின் கொள்முதல் விலை 5000 ரூ. அதன் ஓட்டச் செலவு முதல் 5 ஆண்டுகளுக்கு ஆண்டொன்றுக்கு 800 ரூ. வீதம் மதிப்பிடப் படுகிறது. பிறகு 6ஆவது ஆண்டிலும் அதற்குப் பின்னும் ஆண்டொன்றுக்கு 200ரூ. கூடுதலாகிறது. Aஐப் போன்ற அதே செயல் திறன் (capacity) உள்ள B-ன் கொள்முதல் விலை 2500 ரூபாய்தான். ஆனால் அதன் ஓட்டச் செலவு முதல் ஆறு ஆண்டுகளுக்கு ஆண்டொன்றுக்கு 1200 ரூ. என்றும், அதற்குப் பிறகு

ஒவ்வோர் ஆண்டுக்கும் 200 ரூ. கூடுதலாகிறது. பணத்தின் ஈடான பொருள் ஆண்டு ஒன்றுக்கு 10 சதவிகிதம் என்ருல், (money is worth 10% per year) எந்த இயந்திரத்தை வாங்க லாம்? (இரண்டு இயந்திரங்களும் கழிவுப் பொருள்களாக விற்கப் படும் மதிப்பு மிகமிகக் குறைவு எனக்கொள்வோம்.)

தீர்வு :

"பணம் ஆண்டொன்றுக்கு 10% பெருமதிப்புடையது" என்பதை இரு விதமாக இப்போது விளக்குவோம். முதலாவதாக தற்போது 100 ரூபாய் செலவழிப்பது, ஓர் ஆண்டுக்குப் பின்னர் 110 ரூபாய் செலவழிப்பதற்குச்சமம். அதாவது அடுத்த ஆண்டு 110 ரூ. செலவழிப்பதாகத் திட்டமிட்டால் இப்போதே 100 ரூபாயை அடுத்த ஆண்டில் 110 ரூ. கிடைக்கக்கூடிய அளவில் ஒரு சேமிப்புச் செய்யவேண்டும்.

இரண்டாவதாகப் பணத்தை ஆண்டுக்கு 10% வட்டி விகி தத்தில் கடஞக வாங்கிச் செலவுகள் செய்வதாக வைத்துக் கொள்வோம். இப்போதும் ஓராண்டுக்குப்பின் 110 ரூ. செல வழிப்பது இன்று 100ரூ. செலவழிப்பதற்குச்சமம். இன்று 100ரூ. செலவு செய்தால் ஓராண்டுக்கடைசியில் கடனை அடைக்க 110ரூ. தரவேண்டியுள்ளது. எனவே, இருவிதத்திலும் இன்றைய 100ரூ. ஓராண்டுக்குப் பின் 110ரூ க்குச் சமமாகிறது.

இதே போல இன்றிலிருந்து ஓராண்டுக்குப் பின் 1 ரூ. $(1{\cdot}1)^{-1}$ ரூ-க்குச் சமம். இன்றிலிருந்து γ ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு 1 ரூ. என்பது இப்போதைய $(1.1)^{-\gamma}$ ரூ.–க்கு சமம். இந்தத் தொகை $(1.1)^{-r}$ஐ இன்றிலிருந்து γ ஆண்டுகளுக்குப் பின் செலவிடப்போகும் 1 ரூபாயின் தற்போதைய மதிப்பு (present worth (or) present value) என்கிருேம். மேற்கூறிய உதார ணத்தில் A, B இயந்திரங்களை ஒத்திடுவதற்கு அவ்விரு இயந்தி ரங்களின் செலவுகளின் தற்போதைய மதிப்பை ஒப்பிட வேண்டும். இப்போது ஒரு குறிக் கணக்கியல் (algebraic) சூத்திரத்தை நிலைநாட்டுவோம் (establish).

"தற்போதைய மதிப்பிற்கான ஒரு குறிக்கணக்கியல் சூத்திரம் :

ஓர் இயந்திரத்தின் கொள்விலையை C எனக் கொள்வோம். nஆவது ஆண்டில் அதன் ஓட்டச்·செலவு R_n எனவும், வட்டி விகிதம் i எனவும் கொள்வோம்.

$v = \frac{1}{1+i}$ என்பது இப்போதிலிருந்து ஓராண்டுக்குப் பின் செலவிடக்கூடிய ஒரு பொருளின் (அலகின், கூறின்) (unit) தற்போதைய மதிப்பு என்றால், vஐத் தள்ளுபடி விகிதம் (dicount rate) என்று கூறலாம்.

இந்த இயந்திரத்லதை γ ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு பதிலமர்த்து வதாகக் கொள்வோம், ஒவ்வோர் ஆண்டு ஆரம்பத்திலும் செலவு ஏற்படுவதாகக் கொண்டால், மொத்தச் செலவின் தற்போதைய மதிப்பு $P(\gamma)$ ஆனது $P(\gamma) = C+R_1+vR_2+v^2R_3 + \dots \dots \dots + v^{r-1} R_r$ γ கூடக்கூட $P(\gamma)$-ம் கூடும்.

எனவே 5 ஆண்டுகளுக்குப்பின் மாற்றீடு செய்வதால் ஏற்படும் தற்போதய மதிப்பைவிட $(\gamma+1)$ ஆண்டுகளுக்குப்பின் மாற்றீடு செய்வதால் ஏற்படும் தற்போதய மதிப்புக் கூடுதலாக இருக்கிறது. இந்த மிகைப்பட்ட (extra) பணத்தினால் நமக்கு ஓர் அதிகப்பட்ட ஆண்டுப் பணி (service) கிடைக்கிறது. இதை அனுமதிக்கக்கூடிய ஒரு பதிலமர்த்தீடு இடைவெளியின் ஒரு சார்பலனை நாம் கணிக்க விரும்புகிறோம். இப்போது γ ஆண்டு களில் ஒரு பதிலமர்த்தீடு நிகழ்வதாகவும் ஒரு செய் தொழிலாளர் இயந்திரத்திற்கான எல்லாச் செலவுகளையும் சரிக்கட்டுமளவில் (வட்டி விகிதத்தில்) $P(\gamma)$ நிதியை ஒதுக்குகிறார் என்றும் கொள் வோம். அவர் $P(\gamma)$ தொகையை i வட்டி விகிதத்தில் கடன் வாங்கி இயந்திரத்தின் ஆயுள் பரியந்தம் வருடத் தவணைகளில் நிலையாகச் செலுத்தி வருகிறார் எனக் கொள்வோம். இப்படி எடுத்துக் கொள்வதால் இயந்திரங்களின் பதிலமர்த்தீட்டை வருடாந்திர முடிவுகளில் (ஒத்துப் பார்ப்பதற்கு) கணக்கிடுவ தற்கு ஒத்தாற்போல மாறுபடுகிற பண வழங்கீட்டை நிலையான வருடாந்திரப் பண வழங்கீட்டாக மாற்றிக்கொள்ள முடியும். (முந்திய மாதிரியில் வட்டியைப் பொருட்படுத்தாதவாறு ஆண்டுச் சராசரிச் செலவை ஒத்துப் பார்க்கையில் இதே முறையைத் தான் மேற்கொண்டோம்) ஆண்டுகளுக்கான நிலையான வருடாந் திர பண வழங்கீடுகள் x-ன் தற்போதய மதிப்பு $P(\gamma)$ என்றால்,

$$P(\gamma) = x + v\,x + v^2\,x + v^3\,x + \dots + v^{r-1}\,x = \frac{1-v^r}{1-v} \dots (1)$$

இந்தத் தொகையைத்தான் கடனாகப் பெறவேண்டி இருப்ப தால்

$$x = \frac{1-v}{1-v^r}\quad P(\gamma) \qquad \dots \qquad \dots \ (2)$$

எனவே $x = \frac{1-v}{1-v^r} P(\gamma)$ ஐ மீச்சிறுமமாக்கும். γ-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து அந்த γ ஆவது ஆண்டினிறுதியில் இயந்திரத்தை மாற்றீடு செய்தால் அந்த γ சிறந்த மதிப்பாகும்.

மீச்சிறுமப்படுத்த வேண்டிய சார்பலன்

$$F(\gamma) = \frac{P(\gamma)}{1-v^r}$$ ஏனெனில் $(1 - v)$ என்பது ஒரு மாறிலி

$F(\gamma)$ ஐ மீச்சிறுமமாக்கும் γ-ன் மதிப்பைக் காண முற்படுவோம். r-ன் சரியான மதிப்புகள் தொடர்ச்சியற்றவை: எனவே ஒரு பெரிதும் உகந்த γ-ன் மதிப்பைக் காண்பதற்கு "Finite Differences" முறையை உபயோகிக்கிரோம்.

ஒரு $f(x)$ சார்பலன் x_0-ல் சுற்றருமை மீச்சிறுமம் ஆவதற்கு (local minimum) ஏற்ற கட்டுபாடுகள் (1) $f(x_0 + 1) > f(x_0)$ அதாவது, $\Delta f(x_0) > 0$ மேலும், (2) $f(x_0-1), < f(x_0)$, அதாவது, $\Delta f(x_0-1) < 0$ அதாவது $\Delta f(x_0-1) < 0 < \Delta f(x_0)$ என்றால், $f(x)$சார்பலன் x_0-ல் சுற்றருமை மீச்சிறுமத்தையடைகிறது." ஒருசார்பலன் $f(x)$ ஆனது எல்லா γ மதிப்புகளுக்கும்,

$$f(x_0) \leqslant f(x) \text{ என்றால்}$$

x_0-ல் அச் சார்பலன் முழுமையான மீச்சிறுமத்தை (Absolute minimum) அடைகிறது.

இங்கு $\Delta F(\gamma-1) < 0 < \Delta F(\gamma)$ என்றால் ... (3)
$F(r)$ மீச்சிறுமமாகிறது.

$$\Delta F(\gamma) = F(\gamma+1) - F(\gamma)$$

$$= \frac{P(\gamma+1)}{-1 v^{r1} +} - \frac{P(\gamma)}{1-v^r}$$

$$= \frac{P(\gamma+1) - v^r P(\gamma+1) - P(\gamma) + v^{r+1} P(\gamma)}{(1-v^r)(1-v^{r+1})}$$

$$= \frac{P\gamma+1 - P(\gamma) + v^{r+1} P(\gamma) - v^r P(\gamma) + 1}{(1-v^r)(1-v^{r+1})}$$

$$= \frac{v^r R_{r+1} + (v^{r+1} - v^r)c + v^r(^{+1} - v^r)^r \sum_{j=1}^{r} v^{l-1} R_j - v^{2r} R_{r+1}}{(1-v^r)(1-v^{r+1})}$$

$$= \frac{v^r R_{t+1}}{1-v^{r+1}} + \frac{(v^{r+1})\ (P\gamma)}{(1-v^r)(1-v^{r+1})}$$

$$= \frac{v^r}{1-v^{r+1}} \left[R_{r+1} - \frac{1-v}{1-v^r} P(\gamma) \right] \qquad \ldots(4)$$

இங்கு, $\frac{v^r}{1-v^{r+1}} > 0$ எப்போதும் ஏனெனில், $|v| < 1$

எனவே, $\triangle F(\gamma)$-ன் குறி (sign) யானது $\left[R_{r+1} - \frac{1-v}{1-v^r} P(\gamma) \right]$ன் குறியைப் போன்றே இருக்கும்.

குறி இதே போல $\triangle F\ (\gamma-1)$-க்கும் எழுதினால், பெரிதும் உகந்த ஒரு மாற்றீடு இடைவெளிக்கான நிபந்தனையானது.

$$\frac{1-v^{r-1}}{1-v} R_r - P(\gamma-1) < 0 < \frac{1-v^r}{1-v} R_{r+1} - P(\gamma) \qquad \ldots (5)$$

இப்போது இந்த நிலையில் நமது உதாரணத்தின் A இயந்திரத்திற்கு விளைவுகளைக்கீழ்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

அட்டவணை :

A இயந்திரத்திற்கான பதிலமர்த்தீட்டுச் செலவு A-ன் கொள்முதல் விலை ரூ 5000/-

ஆண்டு	ஓட்டச் செலவு R_t	v^{r-1}	$v^{r-1}R$	$P(\gamma)$	$\frac{1-v^r}{1-v} R_{r+1}$
1	800	1·0000	800	5800	800
2	800	0·9091	727	6527	1528
3	800	0·8264	661	7188	2189
4	800	0·7513	601	7789	2790
5	800	0·6830	546	8335	4170
6	1000	0·6209	621	8956	5749
7	1200	0·5645	677	9633	7497
8	1400	0·5132	718	10351	9390
9	1600	0·4665	746	11097	11403
10	1800	0·4241	763	11860	...

(5) சமனிலியையும் அட்டவணை மதிப்புகளையும் ஒப்பிட்டால் A இயந்திரத்தை 9 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு மாற்றீடு செய்வது சிறந்ததாகும் என்று தெரிகிறது.

இதேபோல B இயந்திரத்திற்கும் அட்டவணை போட்டு சமனிலியுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால் B இயந்திரத்தை 8 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு மாற்றீடு செய்தல் சிறந்ததாகும் எனத் தெரிகிறது.

இதற்குச் சரியான A இயந்திரத்திற்கு வருடாந்திர நிலையான விலை (2) சார்பலன் மூலம் ரூ 1752/-ம், B இயந்திரத்துக்கு 1680 ரூபாயும் ஆகிறது. எனவே, B இயந்திரம் வாங்குவதே சாலச் சிறந்தது என்று முடிவு கட்டுகிறோம்.

உண்மையான (actual) பண வழங்கீட்டின் சராசரி A-க்கு 1578 ரூ, B-க்கு 1588ரூ. என்பதைக் காண்க.

குறிப்பு : $i \to 0$ எனும்போது $v \to 1$. எனவே L' Hospital Ruleபடி

$$\lim_{v \to 1} x = \lim_{v \to 1} \frac{1-v}{1-v^r} P(\gamma) = \frac{P(\gamma)}{\gamma}$$

இது ஆண்டுச் சராசரிச் செலவுதான் என்பதால் மாதிரிகள் (1), (2)-ன் முறைகள் மாதிரி (3)-ன் முறையின் (limiting case).

படிப்படியாக அழிவுறும் (உறுப்புகளை) பொருள்களைப் பதிலமர்த்தீடுக்கான ஒரு பகுமுறை விளக்கம் (analytical approach)

ஓர் இயந்திரத்தின் மூலதனச் செலவு C எனவும் t ஆண்டுகளுக்குப்பின் விற்பனைவிலை $S(t)$ எனவும், t ஆண்டுகளுக்குப்பின் வருடாந்திர இயக்கச் செலவு $f(t)$ எனவும், பெரிதும் உகந்த ஒரு மாற்றீடு காலப்பகுதி T எனவும் கொள்ளவும். எனவே T ஆண்டுகளுக்குப்பின் மொத்தச் செலவு

$$= C - S(T) + \int_0^T f(t)\,dt$$

வருடாந்திர சராசரி செலவு (வ. ச. செ.)

$$= \frac{C - S(T) + \int_0^T f(t)\,dt}{T}$$

$\frac{d}{dt}$ (வ. ச. செ.) $= 0$ எனும்போது, வ. ச. சே. மீச்சிறும மாகிறது.

$$\frac{d}{dt} (\text{வ. ச. செ.}) = -\frac{C}{T^2} + \frac{S(T)}{T^2} - \frac{1}{T} - \frac{dS}{dT} - \frac{1}{T^2}\int_0^T f(T)\, dt + \frac{1}{T} f(T) = 0$$

அதாவது,

$$-\frac{1}{T^2}\left[C - S(T) + T\frac{dS}{dT} + \int_0^T f(t)\, dt - T f(T)\right] = 0$$

$$\therefore \quad f(T) - \frac{dS}{dT} = \frac{C - S(T) + \int_0^T f(t)\, dt}{T}$$

இடதுபக்க மதிப்பு T ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் குறைக் கணிப்பையும் (depreciation) சேர்ந்து வருடாந்திர செலவு ஆகும். வலதுபக்க மதிப்பு T ஆண்டுகளில் வருடாந்திரச் சராசரி செலவாகும். எனவே முடிவு என்னவென்ருல் நடப்பு (current) வருடாந்திரச் செலவு அன்றைய தேதியில் வருடாந்திரச் சராசரி செலவுக்குச்சமமாக இருக்கும்போது பதிலமர்த்திட வேண்டும். அதனுல் வ. ச. செலவை ஒவ்வோர் ஆண்டும் படிப்படியாகக் கண்டுபிடித்து, எந்த மாற்றீடுக் காலவரம்பில் வ. ச. செலவு மீச்சிறுமமாகிறதோ அந்த மாற்றீடுக் காலவரம்பிணைத் தேர்ந் தெடுக்கின்ருேம்.

செயலொழிவு கணிப்பு வீதங்கள் (failure rates) இரு வகைப் படும். அவை (i) படிப்படியானது (ii) திடீரென நிகழ்வது. திடீரென நிகழும் செயலொழிவில் 3 வகையான செயலொழிவு நுட்பங்கள் உள்ளன. அவையாவன (அ) முன்னேறுகின்ற (Progressive) (ஆ) அங்கொன்று இங்கொன்றுமான (random) (இ) பின்னேக்கிச் செல்கிற செயலொழிவுகள் (retrogressive)

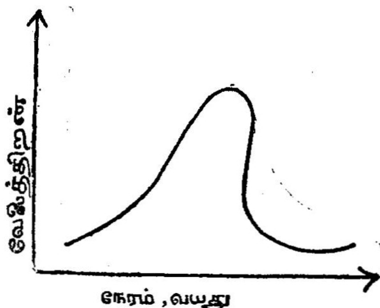
(அ) ஆயுள் கூடக்கூட செயலொழிவு வீதமும் கூடும் வகையை முன்னேறுகிற செயலொழிவு நுட்பம் என்கிருேம்.

(ஆ) செயலொழிவு இங்கொன்றும் அங்கொன்றுமான தொடர்பின்றி (random) நிகழ்வது: உதாரணமாக ஒரு கண்ணுடி டம்ளரை உடைத்தல்.

(இ) இப்போது, புதிதாக ஒரு வேலையில் சேர்ந்த நபர் அதே நிலையில் தொடர்ச்சியாக நீடிப்பதற்கான், நிகழ்தகவு மிகவும் குறைவு ஆகும். இயல்பாகவே அவர் வேறு வேலைக்குத் தேடியலைந்து தாவி விடுவார். முதல் போரில் வெற்றியுடன் (அல்லது) திரும்பிய ஒரு போர்வீரன் 2ஆவது போரில் இறந்து படக்கூடிய நிகழ் தகவு மிகவும் குறைவாகும். இந்த எல்லா வகைகளிலும் தடுப்பு பதிலமர்த்திடு முறைகளை மேற்கொள்ளலாம். ஏனெனில், அவை சிக்கனமானவையாகும்.

நம் வாழ்வுப் போக்கின் ஆரம்பக் கட்டத்தில் வேலைத்திறன் குறைந்தும், காலம், அனுபவம் இவற்ருல் இது கூடியும் பிறகு வயது முதிர்ச்சி, அசட்டை மனப்பான்மை (lethargy) இவற்ருல் வேலைத்திறன் கடைசியில் திரும்பவும் குறைவதைக் காண்கிறேம்.

மேலே கூறிய மூன்று வகை நுட்பங்களிலும் முன்னேறுகிற, செயலொழிவு நுட்பத்தில் மட்டுமே தடுப்புச் செயல் முறையை மேற்கொள்ளுகிறேம். திடீர் செயலொழிவின்கீழ் முன்னேறுகிற செயலொழிவு நுட்பத்தில்(ஒழுங்கமைப்பில்) (mechanism)மூன்று விதமான திறமையான திட்டங்கள் உள்ளன.



A—பொருள் எவ்வெப்போது செயலொழிவுறுகிறதோ

B—(i) பொருள் எவ்வெப்போதுசெயலொழிவு ஏற்படும் போதும்

(ii) *T* காலத்திற்குப் பின்னும்.

C—(i) எவ்வெப்போது பொருள் செயலொழிவு ஏற்படுகிறதோ அல்லது.

(ii) அப்பொருள் '*t*' ஆயுளை அடைந்த உடனேயோ

இந்த *A*,*B*,*C* மூன்று வகையினங்களும் (categories) பதிலமர்த்தீடுக்கானவை.

உதாரணமாக ஒரு நீளமான தெருவில் 100 மின்விளக்குகளைப் பொருத்துகிறேம் என்று வைத்துக்கொண்டால், ஒருவாரத்துக்குப்

பின்னர் 98 மின்விளக்குகள் மட்டுமே எரிகின்றன, 2ஆம் வாரக் கடைசியில் 8 விளக்குகள் அணைந்து விடுகின்றன (பழுதடைந்து விடுகின்றன) அல்லது செயல் ஒழிவு ஏற்பட்டுப் போகின்றன. இதேபோல 3 மாதங்களுக்கான விபரங்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

வாரங்கள்	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
வார இறுதியில் எரியும் மின் விளக்குகளின் எண்ணிக்கை	100	98	90	88	...	...	...	...	...	...	20	15	10	10	...

விளக்குகளின் ஆயுள் t என்பது 3 மாதங்கள் அல்லது 12 வாரங்கள் என எடுத்துக் கொள்வோம்.

B முறைப்படி முதல் வாரத்துக்குப் பின் 2 மின் விளக்குகள் மாற்றப்படுகின்றன.

இரண்டாம் வாரக் கடைசியில் 8 மின் விளக்குகள் மாற்றப் படுகின்றன.

12ஆவது வாரத்துக்குப் பின் மீதமுள்ள 10 விளக்குகள் எரிந்து கொண்டுள்ளன. மேலும் B வகையின்படி மூன்று மாதங் களுக்குப் பின் (அந் நேரத்தில் சில விளக்குகளுக்கு ஆயுள் இருந் தாலும் கூட) எல்லா விளக்குகளையும் மாற்றீடு செய்கிறோம்.

C முறையில் அப்படியல்ல, முதல் வாரக் கடைசியில் எரிந்து அணைந்து போன 2 விளக்குகளை மாற்றுகிறோம். பிறகு இந்த இரு விளக்குகளையும் 12 வாரங்களுக்குப் பின்னர் 13ஆவது வாரக் கடைசியில் மாற்றிட வேண்டும். (அல்லது இடையில் அணைந்து போனாலும் கூட அப்போதும் மாற்றிட வேண்டும்) இதே போல 2ஆம் வார இறுதியில் மாற்றிடும் 8 விளக்குகளைத் திரும்பவும் 14ஆம் வார இறுதியில் மாற்றிடவேண்டும். ஆனால், B முறையிலோ 12ஆம் வாரக் கடைசியில் எல்லா 100 விளக்கு களையும் மாற்றிட வேண்டும். எனவே, இத்தகைய முன்னேறுகிற செயலொழிவு நுட்பத்தில் இரு வித தடுப்புப் பதிலமர்த்தீடு முறை களைக் காண்கிறோம்.

(i) தனித்த தடுப்புப் பதிலமர்த்தீடு (Individual preventive
(தனி. த. ப.) Replacement)

(ii) பொதுவான (தொகுதி) பதிலமர்த்தீட்டு (Common or
(பொது. த. ப) group Preventive Replacement)

பொது. த. ப B முறைக்கும் தனி த, ப. C முறைக்கும் பொருந்தும் தனி த.ப. பொது த.ப இரு முறைகளையும் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்போம்.

(1) தனி த. ப வில் மாற்றீடின் எண்ணிக்கை பொது த. ப. மாற்றீடு எண்ணிக்கையைவிடக் குறைந்து இருக்கும். ஏனெனில், பொது. த. ப. வில் 100+மூன்று மாதங்களில் செயலொழிவு ஏற்பட்ட பொருள்களையும் மாற்றீடு செய்கின்றோம்.

(2) பொது த. ப வில் மாற்றீடின் (பதிலமர்த்தீட்டின்) நிகழ் தகவைக் (கவனிப்பது இல்லை) எடுத்துக் கொள்வதில்லை. எந் தெந்தத் தடுப்பு முறையில் செலவு குறைவாக உள்ளதோ அதையே நாடுகிறோம்.

(3) பணிமுறைப் பதிலமர்த்தீட்டின் (Service Replacement) செலவு, தடுப்புப் பதிலமர்த்தீட்டுச் செலவை விடக் குறைவாக இருக்கும் போது, பொது, த. ப. சிறந்ததாகிறது. ஒரு தெரு விளக்குக் கணக்கை எடுத்துக் கொண்டால் தனி த.ப. முறையில் மிகவும் செலவாகிறது.

உதாரணமாக 1—4—76-ல் 22ஆவது கம்பத்திலுள்ள ஒரு விளக்கு அணைந்து போகிறது.

4—4—76-ல் 48ஆவது கம்ப விளக்கு அணைகிறது என்றால் இதற்கான தனிக் குறிப்புப் புத்தகம் வைத்துப் பராமரிக்க வேண்டும். இதனாலும் தனி ப. ம முறை கூடுதல் செலவான தாகிறது.

(4) தனி த. ப. வில் சரியான குறிப்பு முறைகள் அவசிய மாகின்றன. இவையே தனி த. ப. பொது த. ப முறைகளின் நன்மைகளும் தீமைகளுமாகும்.

இப்போது தனி த. ப முறைக்கான செலவு மீச்சிறுமமாகும் விதத்தைக் கவனிப்போம்.

பணி முறைப் பதிலமர்த்தீட்டின் செலவை C_s எனவும் தடுப்புப் பதிலமர்த்தீட்டின் செலவை C_p எனவும் குறிப்போம்.

மேலும் $C_s > C_p$ என்று இருக்கலாம். மொத்தம் M பதிலமர்த் தீடுகள் ஏற்படுவதாகக் கொள்வோம். "t" நேரத்தில் ஒரு பொருளை தடுப்புப் பதிலமர்த்தீடுவதற்கான நிகழ்தகவு $= S\ (T)$ எனவும் கொள்வோம்.

't' நேரத்தில் ஒரு பொருளைத் தடுப்புப் பதிலமர்த்திடுவதற் கான நிகழ் தகவு $= S\ (t)$ எனவும் கொள்வோம்.

"t" நேரத்தில் ஒரு பொருளைப் பணி முறைப் பதிலமர்த்தீடு வதற்கான நிகழ்தகவு $= F\ (T) = 1 - S\ (T)$ ஆகும்.

எனவே, தடுப்புப் பதிலமர்த்தீட்டில் எதிர்பார்க்கும் எண் $= MS(T)$. பணி முறைப் பதிலமர்த்தீட்டில் எதிர்பார்க்கும் எண் $= M.\ F\ (T)$

$$= M\ [1 - S(T)]$$

C_p, C_s என்பன முறையே தடுப்பு, பணி முறைப் பதிலமர்த் தீடுகளின் செலவாகையால்,

மொத்தச் செலவு $= C_s\ M\ [1 - S(T)] + C_p\ M\ S\ (T)$

ஒரு பொருளின் ஆயுள் $= \int_0^T S\ (t)\ dt = I\ (T)$ என்றால்

M பொருளுக்கு மொத்த ஆயுள் $= M\ I\ (T)$

எனவே, ஒவ்வோர் அலகும் நேரத்துக்குமான செலவு

$$= \frac{C_s\ M[1 - S(T) + C_p\ MS\ (T)}{M\ I(T)}$$

இச் செலவை மீச்சிறுமமாக்க வேண்டும்.

$F\ (T) = 1 - S\ (T)$ என்பதால்,

$$\text{செலவு } X\ (T) = \frac{C_s\ F\ (T) + C_p - C_p\ F\ (T)}{I\ (T)}$$

$$X(T) = \frac{(C_s - C_p)\left[F\ (T) + \frac{C_p}{(C_s - C_p)}\right]}{I\ (T)}$$

$$X(T) = (C_s - C_p)\ \left[\frac{F\ (T) + \gamma}{I\ (T)}\right] \text{இங்கு } \gamma = \frac{C_p}{C_s - C_p}$$

$\frac{F(T)+n}{I(T)}$ மீச்சிறுமமாக்கும் போது இச் செலவும் மீச்சிறுமமாகின்றது.

உதாரணம் ; $C_p = 1 \quad C_s = 3$ என்க.

$$C_s > C_p \gamma = \frac{C_p}{C_s - C_p} = \frac{1}{2}$$

கீழ்க்காணும் கணக்கிற்குத் தீர்வு காணுவோம்.

$T =$	0	1	2	3	4	5
$S(T) =$	1·00	0·98	0·95	0·92	0·85	0·74
$T =$	6	7	8	9		
$S(T) =$	0·62	0·50	0·34	0·28		

அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்து இவ்வாறு எழுதலாம்.

(அட்டவணை அடுத்தப்பக்கம் பார்க்க.)

$$I(T) = \int_0^T S(t)\,dt$$

இரண்டு அடுத்தடுத்த T மதிப்பகளின் மைய மதிப்பை 't' ஆக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$T = 0$–க்கும் $T = 1$-க்கும் T இடையில் மையமான t–ல் $S(t)$-ன் மதிப்பு $= 0·99$

$$\therefore \quad I(T) = \int_0^1 0·99\, dt = 0·99 S(t) = \frac{(·98 + ·95)}{2} = ·965$$

$$T = 1,\ T = 2; \quad \int^2 S(t)\,dt = \int_1^2 0.965\, dt = ·965$$

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S(T)$	1·00	0·98	·95	·92	·85	·74	·62	·50	·34	·28
$F(T)$	0	·02	·05	0·08	·15	·26	·38	·50	·66	·78
$F(T)+\gamma$	0	·52	·55	·58	·65	·76	·88	1·00	1·16	1·28
$I(T)$	—	0·99	1·965	2·89	3·78	4·57	5·25	5·81	6·23	6·51
$X(T)$	—	·525	·28	·20	·17	·16	·165	·17	·18	—

எனவே, $T = 2$ல்

$$I(T)=\int_0^2 S(t)dt=\int_0^1 .99\ dt+\int_1^2 \cdot 965\ dt$$

$$= .99+.965=1.955$$

$$X(T) = \frac{F(T)+r}{I(T)}$$

எனவே, தனி.த.ப முறையின் தீர்வு:

$X(T)$-ன் மதிப்பு $T=5$-ல்-மீச்சிறுமமாவதால்,

(i) பொருள் எவ்வப்போது செயலொழிவு ஏற்படுகிறதோ அல்லது (ii) $T=5$ மதிப்பை அடைந்த பின்னரோ மாற்றீடு செய்திட வேண்டும்.

பொது த. ப. முறையில் தீர்வு காணல்:

முன்போலவே C_p, C_s வரையறுப்போம் மொத்தச் செயலொழிவுகளின் எண்ணிக்கை $\phi(t)$ எனக் கொள்க.

மொத்தச் செலவு $= C_p + C_s \cdot \phi(t)$

இங்கு எல்லாப் பொருள்களையும் மாற்றிட வேண்டியுள்ளது.

ஓர் அலகு நேரத்துக்கான செலவு (cost permit time)

$$= \frac{C_p + C_s\,\phi(t)}{T}$$

இதன் மீச்சிறுமத்தை முன்மாதிரியைப்போலவே கணிக்கலாம்.

முழுமையாகச் செயலொழிவுறும் பொருள்கள் (Items that fail completely)

பதிலமர்த்தீட்டு முறையின் இரண்டாவது விதத்தில் பொருள்கள் இயங்குகிறது. அல்லது எல்லாம் முழுதாய் செயல் ஒழிவு ஏற்பட்டு பயனின் நஷ்டம் திடீரெனவும் முழுமையாகவும் ஏற்படுகிறது என முன்பே கண்டறிந்தோம். இதைக் கீழ்க்காணும் ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் விளக்குவோம்.

மாதிரி : ஒரு மின் விளக்குத் தொகுப்பை எடுத்துக்கொண்டால் அவற்றின் ஆயுள் விகிதங்கள் (mortality rates) பக்கம் 254-ல் தரப்பட்டுள்ளன.

வாரம்	1	2	3	4	5	
வாரக் கடைசியில் அழிவுறும் சதவீதம்	10	25	50	80	100	

உபயோகத்தில் 1000 மின் விளக்குகள் இருக்கின்றன எரிந்துபோன தனிப்பட்ட ஒரு விளக்கினைச் செய்வதற்கு 1 ரூ. செலவாகிறது. எல்லா விளக்குகளையும் ஒரே சமயத்தில் மாற்றீடு செய்தால், ஒவ்வொன்றுக்கும் 25 பைசா செலவாகிறது. (குறிப்பிட்ட) நிலையான இடைவெளிகளில் எல்லா விளக்குகளையும் மாற்றிடவேண்டியுள்ளது. அச் சமயத்தில் அவை எரிந்தாலும் எரியாவிட்டாலும் பரவாயில்லை. மேலும் விளக்குகளை எவ்வெப்பொழுது எரிந்துபோகிறதோ அவ்வப்போதும் மாற்றீடு செய்தல் வேண்டும் என்றால் எல்லா விளக்குகளையும் எந்த இடைவெளியில் மாற்றீடு செய்யவேண்டும்?

தீர்வு :

ஒரு மின் விளக்கு அடுத்தடுத்த வாரங்களில் அழிவுறும் நிகழ்தகவு எண் என்பதைக் கணக்கிடுவோம்.

(பொதுவான பதில் மாற்றீட்டுத் தத்துவத்தை நாம் இங்குச் செயல்முறைப் படுத்தவில்லை).

புதிதாகப் பொருத்தப்பட்ட ஒரு மின் விளக்கு தன் ஆயுளின் 1ஆவது வாரத்தின் போது அழிவுறுவதற்கான நிகழ்தகவை (probability) p_1 எனக் குறிக்கிறோம். 1ஆவது வார ஆரம்பத்தில் எரிந்து கொண்டிருக்கும் மின் விளக்குகளின் விகிதத்திற்கும், 1ஆவது வார இறுதியில் எரிந்து கொண்டிருக்கும் மின் விளக்குகளின் விகிதத்திற்கும் இடையே உள்ள மீதமே இந்த நிகழ் தகவு ஆகும்.

பின்வருமாறு ஓர் அட்டவணையைத் தயாரிப்போம்.

(அட்டவணையை அடுத்த பக்கம் பார்க்க)

அட்டவணை மூலம் பொருத்தப்பட்ட எந்த ஒருமின்விளக்கும் 5 வாரங்களுக்கு மேல் எரிவதில்லை; அணைந்து போகிறது என்று அறிகிறோம்.

வாரம் i	ஆரம்பத்தில் புதிதாக கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மின் விளக்கு i-வது வாரத்தின் போது அழிவுறும் நிகழ் தகவு $c\ (p_i)$
1	0.10
2	0.15
3	0.25
4	0.30
5	0.20
மொத்தம்	1.00

எனவே, 4 வாரங்கள் வரை எரிந்து வந்த ஒரு மின்விளக்கு 5 ஆவது வாரத்தில்நிச்சயமாக அணைந்துவிடும். இருந்தபோதிலும் ஆரம்பத்தில்புதிதாகப்பொருத்தப்பட்ட ஓர் மின்விளக்கு 5 ஆவது வாரத்தின் போது அணைந்துவிடுவதற்கான நிபந்தனையற்ற நிகழ் தகவு $p_5 = 0{\cdot}20$ ஆகும். இப்போது பொதுவான பதிலமர்த்தீடு அற்ற முறையில் கீழேதரப்பட்ட இரு அனுமானங்களுடன் அடுத் தடுத்த வாரங்களில் அணைந்து விடுவதால் (அல்லது) அழிவினால் ஏற்படும் பதிலமர்த்தீட்டுகளின் எண்ணிக்கையைக் கணிப்போம்

1. ஒரு வாரத்தின்போது அணைந்து விடும் மின்விளக்குகளை அவ்வார இறுதிக்குள் மாற்றீடு செய்துவிடுவதாகக் கொள்வோம்.

2. ஒரே ஆயுளுடன் கூடிய மின்விளக்குகளின் தொகுப் பிற்குக் குறிப்பிட்ட வாரத்தில் ஏற்படும் உண்மையான அழிவு சதவீதம் அதே தொகுப்பிற்குச் சமயத்தில் ஏற்படும், எதிர் பார்க்கும், அழிவு சதவிகிதத்துக்குச் சமமாக இருக்கும். i ஆவது வார இறுதியில் செய்யப்படும் மாற்றீடுகளின் எண்ணிக்கையை n_i எனக் குறிப்பிட்டால், ஒரு 1000 மின் விளக்குகளைப் புதிதாகப் பொருத்தப்பட்டால்,

$$n_0 = n_0 = 1000$$

$$n_1 = n_0\, p_1 = 1000 \times 0{\cdot}10 = 100$$

$$n_2 = n_0\, p_2 + n_1\, p_1 = 1000 \times 0{\cdot}15 + 100 \times 0{\cdot}10$$
$$= 150 + 10 = 160$$

$$n_3 = n_0 p_3 + n_1 p_2 + n_2 p_1 = 250 + 15 + 16 = 281$$

$$n_4 = n_0 p_4 + n_1 p_3 + n_2 p_2 + n_3 p_1 = 377$$

$$n_5 = n_0 p_5 + .. + n_4 p_1 = 350$$

$$n_6 = n_0 p_6 + ... + n_5 p_1 = 230$$

$$n_7 = n_0 p_7 + ... + n_6 p_1 = 286$$

எனவே அணைந்துவிடும் மின் விளக்குகள் 4-ம் வாரம்வரை வாராவாரம் அதிகமாகின்றன. அதற்குப்பின் குறைகின்றன. பிறகு அதிகரிக்கின்றன. ஓர் ஆதார நிலைக்கு வரும்வரை இந்த எண் ஊசலாடிக் கொண்டிருக்கின்றது. ஒவ்வொரு வாரமும் அணைந்துவிடும் மின் விளக்குகளின் பரிமாணம் (proportion) அவ் விளக்குகளின் சராசரி ஆயுளின் (தலைகீழ்) சினை மாற்றுன (reciprocal) மதிப்புக்குச் சமமாகும் வரை ஊசலாடிக்கொண்டிருக்கும்.

சராசரி ஆயுள் : $E(X) = \Sigma p_i \times i$

$$= 1 \times 0{\cdot}10 + 2 \times 0{\cdot}15 + 3 \times 0{\cdot}25 + 4 \times 0{\cdot}30 + 5 \times 0{\cdot}20 = 3{\cdot}35$$

ஓர் ஆதார நிலையில் ஒவ்வொரு வாரமும் ஏற்படும் அழிவின் எண் $= \dfrac{1000}{3{\cdot}35} = 299$

அத்தகைய ஒவ்வொரு மாற்றீட்டின் விலையும் 1ரூ. என்பதால் அழிவுக்குப் பின்னரே மின்விளக்குகளை மாற்றீடு செய்யும் முறையினுல் வாரத்துக்கு 299 ரூ. செலவாகும்.

தொகுதி மாற்றீட்டுக் கொள்கை (Group Replacement Theory)

இப்போது முதல் வாரக் கடைசியில் எல்லா மின்விளக்குகளையும் மாற்றீடு செய்வதாயிருப்பின் ஆகும் செலவானது 250+ அவ்வாரத்தின்போது அணைந்தவற்றுக்கும் மாற்றீடு செய்வதன் செலவு = 250+100=350 ரூ. ஆகும்,

எல்லா மின் விளக்குகளை 2 வாரங்களுக்கு ஒரு முறை மாற்றீடு செய்வதனுல், இரு வாரங்களில் ஏற்படும் செலவு = 250+100+160=510 ரூ. எனவே, வாரம் ஒன்றுக்குச் சராசரி செலவு = $\dfrac{510}{2}$ = 255 ரூ. ஆகும். மூன்று வாரங்களில் ஏற்படும் செலவு = 250+100+160+281=791 ரூ. இது வாரம் ஒன்றுக்கு 264 ரூ. சராசரி செலவுக்குச் சமம் ஆகும்.

எனவே, எல்லா மின்விளக்குகளையும் 2 வாரங்களுக்கொருமுறை மாற்றீடு செய்தலே மிகவும் மலிவானதாகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்ட விபரங்களுக்கு ஒரு பெரிதும் உகந்ததொரு பதிலமர்த்தீட்டு முறையைக் கண்டுபிடி. வாங்கிய விலை ரூ. 5000.

ஆண்டு	1	2	3	4	5	6	7	8
ஓட்டச் செலவு	1500	1600	1800	2100	2500	2900	3400	4000
மறுவிற்பனை மதிப்பு	3500	2500	1700	1200	800	500	500	500

2. முதல் பயிற்சிக்கணக்கில் வட்டி வீதம் ஆண்டொன்றுக்கு 10 சதவிகிதம் என்றும் மேலும் செலவுகளை ஒவ்வோர் ஆண்டின் இறுதியில் கணக்கெடுக்கப்படுகிறது. என்றும் கொண்டால், பதிலமர்த்தீடு (கொள்கை) முறையில் மாற்றம் ஏதேனும் உண்டா? விவரிக்கவும்.

3. ஒரு பாரமேற்றும் ஊர்தி (truck or lorry) புதிதாக வாங்கும் போது விலை 30,000 ரூபாய். ஒவ்வோர் ஆண்டின் இறுதி

ஆண்டின் இறுதி	மறு விற்பனை மதிப்பு	ஓட்டச் செலவு
1	2000	600
2	1333	700
3	1000	800
4	750	900
5	500	1000
6	300	1200
7	3600	1500

யிலும் அதன் மறு விற்பனை விலைகளும் ஓட்டச் செலவுகளும் மதிப்பீடு செய்யப்பட்டுத் தரப்பட்டுள்ளன. (பெட்ரோல், வரிகள், இன்ஷ்யூரன்ஸ்) பாதுகாப்பு, பராமரிப்பு ரிப்பேர் முதலியவற்றால் ஆகும் செலவுகளே ஓட்டச் செலவு எனப்படும்.) இந்த ஊர்தியை எந்த ஆண்டு இறுதியில் மாற்றீடு செய்ய வேண்டும்?

4. *A* இயந்திரம் 9,000 விலையாகிறது. வருடாந்திர இயக்கச் செலவு (ஓட்டச் செலவு) முதல் ஆண்டில் 200 ரூபாயும் பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டும் 2,000 ரூபாயும் கூடிக் காணப்படுகிறது. (அதாவது 5ஆவது ஆண்டில் இயக்கச் செலவு ரூ. 8,200). இயந்திரத்தை மாற்றீடு செய்யப் பெரிதும் உகந்தப் பதிலமர்த்தீட்டை நாம் மேற்கொண்டால், அந்த இயந்திரத்தை நாமே சொந்தமாக்கியும் இயக்கியுமாகும் வருடாந்திர சராசரி செலவு என்னவாக இருக்கும்? (இங்கு இயந்திரத்திற்கு மறு விற்பனை விலை இல்லை என்றும் எதிர் கால விலையைத் தள்ளுபடி செய்வதில்லை.) (Finite costs are not discounted) என்றும் கொள்க.

5. *B* இயந்திரம் 10,000 ரூ. விலையாகிறது. வருடாந்திர ஓட்டச் செலவு முதலாண்டில் 400 ரூபாயும், பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டும் 800 ரூபாய் கூடுகிறது எனவும் கொள்வோம். பயிற்சிக் கணக்கு 3-ல் தரப்பட்ட மாதிரியானஓர் ஆண்டு உபயோகமான *A* இயந்திரம் உன்னிடம் இப்போது இருக்கிறது. *A*-க்கு பதில் *B*ஐப் பதிலமர்த்தலாமா? அப்படியானால் எச் சமயத்தில் செய்வது?

6. ஒரு பொருள் n வயது முடிவுறும் தருணத்தில் செயல் ஒழிவுறும் நிகழ்தகவு P_n மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. தனித்த தடுப்புப் பதிலமர்த்தீட்டுச் செலவு ஓர் உறுப்புக்கு 1·25 ரூபாய். பொது தடுப்புப் பதிலமர்த்தீடு முறையைக் கண்டுபிடி.

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_n=$	0·01	0·03	0·05	0·07	0.10	0·15	0·20	0·15

9	10	11
0·12	0·08	0·11

7. ஒரு குறிப்பிட்ட விதமான விளக்குகளுக்கு கீழ்க்கண்ட செயலொழிவு சதவீதம் பின்வருமாறு:

வாரக் கடைசி	1	2	3	4	5	6	7	8
வார இறுதியில் செயலொழிவுக்கான நிகழ்தகவு	0·05	0·13	0·25	0·43	0·68	0·88	0·96	1·00

ஒரு தனிப்பட்ட செயலொழிவுற்ற (அணைந்துபோன) மின் விளக்கை மாற்றீடு செய்யும் செலவு 1·25 ரூ. எல்லா மின் விளக்குகளையும் ஒரு நிலையான இடைவெளிகளில் (fixed intervals) ஒரே சமயத்தில் மாற்றீடு செய்வதாயும், தனிப்பட்ட மின் விளக்குகள் அவை எரிந்துகொண்டிருக்கும்போது அணைந்து போனால் மாற்றீடு செய்வதாயும் விதிமுறை முடிவு செய்யப்பட்டுள்ளது, பொது தடுப்பு பதில் மாற்றீடு முறையில் ஒரு மின் விளக்கை மாற்றீடு செய்யும் செலவு 30 பைசா என்றால் பொது பதில்மாற்றீட்டுகளிடையே எந்த இடைவெளி சிறந்ததெனக் கண்டுபிடி?

8. 60 புது பாட்டரிகளின் (battery) ஆயுள் விபரம் சேர்க்கப்பட்டு ஒவ்வோர் இரண்டு மாத இறுதியிலும் இன்னும் இயங்கி வரக்கூடிய பாட்டரிகளின் எண்ணிக்கைகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது: (அட்டவணை அடுத்த பக்கம் பார்க்க).

இறப்பு எதிர்பார்ப்பு வளைகோட்டை வரைக. (mortality curve). செயலொழிவுக்கான வளைகோடு. பாட்டரிகளின் செயலொழிவு ஏற்படும் விதத்தைப் பற்றி விளக்குக (comment).

மாத இறுதி	மாத இறுதிகளின் இன்னும் இயங்கும் பாட்டரிகளின் எண்ணிக்கை
0	60
2	53
4	47
6	42
8	34
10	23
12	14
14	8
16	4
18	1
20	1

7. முறைவரிசை உருப்படிவங்கள்

அல்லது

முறைவரிசைத் தத்துவம்

(Queueing Models)

அறிமுகம்

வரிசை முறை ஒழுங்கு நியதிகள் வாசகருக்கு ஒன்றும் புதியதல்ல. அவர் தனது தினசரி நடவடிக்கைகளில் நிறைய விதமான முறை வரிசைகளில் காத்திருக்க வேண்டிய கட்டாயம் ஏற்படுகின்றது. போக்குவரத்து வசதிக்காக, உணவின் பொருட்டு, மருத்துவருக்காக அவர் காத்திருக்கின்ருர். வாகன ஊர்தியில் செல்லும் நிமித்தம், திரை அரங்குக் கட்டடத்தில், மற்றும் பல இடங்களில் காத்திருக்கின்ருர். நீண்ட நேரம் ஒரு வரிசை முறையில் (queue) காத்து நிற்பது எவ்வளவு இன்னுதது (வெறுப்பு விளைவிப்பது) என்பது ஒவ்வொருவருக்கும் நன்கு விளங்கும்.

பொறுத்துக் கொள்ளக்கூடிய அளவில் காத்திருக்கக் கூடிய நுகர்வோரின் (consumers) தேவையான சேவைகளைச் செவ்வனே செய்து தரும் அளவில் ஒரு நிறுவனத்தைச் செம்மைப் படுத்தவும், கண்டு அறியப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து ஏறியிறங்குகிற தேவைகளை முன் கூட்டி அறிவதற்குமான ஒரு முயற்சியில் இந்த முறை வரிசைத் தத்துவம் (Queueing Theory) தோற்றுவிக்கப்பட்டது.

இந்த முறை வரிசைத் தத்துவத்தை முதன் முதலில் ஊக்குவித்த பெருமை A. K. எர்லாங்கு என்பவரையே சாரும். இவர் 1908ஆம் ஆண்டிலேயே தொலைபேசித் தொடர்புப் பிரச்சினைகளில் தமது ஆராய்ச்சியை மேற்கொண்டு இந்த தத்துவத்தை விரிவாகத் தோற்றுவித்தார். தொலைபேசி இணைப்பாகங்களின் சரிசமமான நடக்கைகளை (equilibrium behaviour) எர்லாங்கு முதலில் ஆராய்ந்து இப் பிரச்சினைகளுக்குச் சில சரிசம வடிவங்களைக் கண்டுபிடித்தார். இதையே இப்போது, எண்ணற்ற நிலைகளில் 'மார்க்காங்' பாங்குகளுக்கான (Mark off Processes), 'கோல்மோ கிராப்வ்' (Kolmogrov equations) சமன்பாடுகளின் சரி சம வடிவு என்று நாம் வழங்குகின்ருேம்.

இந்த முறை வரிசைத் தத்துவம் பலவிதமான பிரச்சினை களுக்குப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஏராண்டம் முறையில் நிகழும் தேவைகளுக்கான சேவைகளைச் செய்வதற்கு அதிகமான அளவு (ஒழுங்கு) அமைப்புகள் இத் தத்துவத்தில் இருப்பதும் ஒரு காரண மாகும். இம்முறை வரிசைத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி கீழ்க் கண்ட பிரச்சினைகளுக்குத்தீர்வு காணப்பட்டுள்ளது. (1) தொலை பேசித் தொடர்பு (2) விமானங்கள் தரையில் இறங்குதல் (3) கப்பல்களில் சரக்குகளை ஏற்றுமதி, இறக்குமதி செய்தல். (4) இயந்திரங்கள் பழுதடைதலும் அவற்றைச் சீர் செய்தலும் (5) மருந்தகத்தில் நோயாளிகளை வரிசைக்கிரமமாகக்கவனித்தல் (6) போக்குவரவுத் தொடர்பு மின் விளக்குகள் எரிந்து அணைந்து எரியும் நேரங்கள் (7) சிற்றுண்டிச் சாலைகளில் சேவைகள். (8) பெரிய அங்காடிகளில் சரிபார்க்குமிடங்களை அமைத்தல். (9) சரக்குகளில் தேக்கக் கட்டுப்பாடுகள் (10) அணைகள் கட்டும் முறைகள் ஆவனவற்றில் இத் தத்துவம் பயன்படுகிறது.

இத் தத்துவம் சிறந்த கட்டுப்பாடுகளை ஏற்படுத்தி, வரிசை முறை நிலைகளை விளக்கமாகப் புரிந்துகொள்ள உதவுகிறது. காத்திருக்கும் நேரங்கள், ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் காத்திருக் கையின் எண்ணிக்கை, ஒரு சுறுசுறுப்பான காலப் பகுதியின் அளவு மற்றும் பலவற்றைப் பற்றிய முன்மதிப்பீடுகளை (predic-tions) இத் தத்துவத்தின்மூலம் அறிகிறோம். நெருக்கடியைத் (congestion) தவிர்த்து எளிதாக்கத் தேவையான நடவடிக்கை களை எடுப்பதற்கும் நிலைகளை முன்கூட்டி அறிவதற்கும் நிறுவன நிர்வாகிக்கு இம் மதிப்பீடுகள் மிகவும் உதவுகின்றன.

சேவைக்காக வரும் அலகுகள் (ஆள்கள் இயந்திரங்கள், பொருள்கள் முதலியன) அல்லது சேவை செய்யக் காத்திருக்கும் வாய்ப்பு நலங்கள் (facilities) செயலாற்றுமல் இருக்கும்போது ஒரு 'முறை வரிசைப் பிரச்சினை' அல்லது ஒரு 'காத்திருக்கை நேரப் பிரச்சினை' (waiting time problem) ஏற்படுகிறது. உதா ரணமாக ஒரு மளிகைக்கடையில் நுகர்வோர் வாங்கிய பொருள் களைச் சரிபார்க்குமிடம் ஒரு வாய்ப்பு நலம் என்போம். இங்கு முறை வரிசை மிக நீளமாக இருப்பின், நுகர்வோர் யாவரும் மிகவும் பொறுமையிழந்து முறை வரிசையைவிட்டு நீங்கிக் கடையைவிட்டு வெளியேறுவார்கள். கடையின் இலாபம் இதனால் குறையும். எனவே, கடை முதலாளி, இன்னொரு சரி பார்க்குமிடத்தை (check-out counter) அமைக்கலாமா, அதற் காகச் செலவழிப்பது உகந்ததா, அப்படி அமைப்பதால் ஏற்படும் செலவை, பொறுமையிழந்து வெளியேறும் நுகர்வோர் மூலமாகக்

கிடைக்கும் (நிகர) இலாபத்தால் சரிக்கட்ட முடியுமா என்று பலவிதங்களில் தீர்மானித்துப் பெரிதும் உகந்ததோர் முடிவை அவர் எடுக்கவேண்டும். எனவே, இந்த முறை வரிசைத் தத்துவத்திலும் பெரிதும் உகந்த தன்மை புகுவதைக் காணலாம்.

முறை வரிசையினைப் புரிந்துகொண்டு முன்கூட்டி அறிவதற்கு ஒழுங்கு வரிசையினை ஏற்படுத்துபவர் (queuer) காத்திருக்கும் வரிசையில் மேலும் சேரும் முறைவரிசை இவை இரண்டுக்குமான தேவையினை வலியுறுத்தவேண்டிய அவசியம் இல்லை. பெரும்பாலும் வாய்ப்பு நலங்களைப் பயன்படுத்துபவர்கள் மனிதர்களேயானதால், மனிதத்தன்மைக்குரிய காரணிகள் இந்தவரிசை முறைப்பிரச்சினைகளில் அதிகமாகக் காணப்படுகின்றன. உதாரணமாக ஒரு சினிமா தியேட்டர் முன்னால் ஒரு நீண்ட பெரிய ஒழுங்கு வரிசை (முறை வரிசை) காணப்பட்டால் அந்தக் காட்சி பார்க்க உகந்த தொன்றாக அந்த ஒழுகு வரிசையே நமக்குப் புலப்படுத்துகிறது.

உதாரணம்: ஒரு சிறிய அஞ்சல்அகம், தபால்தலை, அஞ்சல் அட்டை இவற்றை விற்பனை செய்வதற்கு ஒரே ஒரு சேவை செய்யும் இடத்தை (servicing centre) (பணியகத்தை) கொண்டுள்ளது. இவ்விடத்தில் சேரும் முறை வரிசையை அறிவதற்கு விபரங்கள் பின்வரும் அட்டவணைமூலம் சேகரிக்கப்பட்டது.

ஒரு சரியான செயல்முறையின் புள்ளியல் முறைப்படியான நேர் தகவுடைய ஆய்விற்கு பெரிய மாதிரி (கூறு) தேவைப்படும். ஆனால், விளக்கத்திற்காகச் சிலமுக்கிய விவரங்கள் இங்குக்கண்டு பிடிக்கப்படுகின்றன. பட்டியலின் மூன்றாவது நிரை, வாங்குபவரின் வருகைகளுக்கிடையேயான நேரங்களைக் காட்டுகிறது. அதாவது, ஒருவருக்கு, அவருக்கும் அவருக்கு முன்வந்தவருக்குமான இடைவெளி நேரத்தைக் காட்டுகிறது.

(அட்டவணை அடுத்தப் பக்கம் பார்க்க)

$$\left\{\begin{array}{c} n\text{ஆவது வாடிக்கையாளர்} \\ \text{(வருபவர்) காத்திருக்கும்} \\ \text{நேரம்} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (n-1)\text{ஆவது வாடிக்கையா} \\ \text{ளரின் காத்திருக்கும் நேரம்} \\ + \text{ சேவைக்கான நேரம்} \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} n\text{ஆவது வாடிக்கையாள} \\ \text{ரின் வருகை—இடைவெளி} \\ \text{நேரம் (between - arrival} \\ \text{time} \end{array}\right\}$$

மேற்படி சமன்பாடுகளில் வலதுபக்க மதிப்பு < 0 என்றால், nஆவது வாடிக்கையாளரின் காத்திருக்கை நேரம் $= 0$ என்று அர்த்தம்.

முறை வரிசை விபரங்கள்—பட்டியல்

வாங்கு பவர்	அவரது வருகை நேரம்	வருகை இடை வெளி நேரங்கள்	சேவைக்கான நேரம்	காத்திருக்கும் நேரம்
1	0	0	5	0
2	2	2	7	3
3	6	4	1	6
4	11	5	9	2
5	12	1	2	10
6	19	7	4	5
7	22	3	4	6
8	26	4	3	6
9	36	10	1	0
10	38	2	2	0
11	45	7	5	0
12	47	2	4	3
13	49	2	1	5
14	52	3	2	3
15	61	9	1	0

நமது உதாரணத்தில் உள்ள வாடிக்கையாளர்களில் 10 பேர் காத்திருக்கின்றனர். காத்திருப்பவர்களில், சராசரி காத்திருக்கை நேரம் $\frac{49}{10}$ என்றும் ஒவ்வொருவருக்கான சராசரி காத்திருக்கை நேரம் $\frac{49}{15}$ என்றும் அறிகிறோம்.

"n ஆவது வாடிக்கையாளரின் வருகை — இடைவெளி நேரங்கள்" $(n-1)$ ஆவது வாடிக்கையாளரின் காத்திருக்கை

நேரம் சேவை நேரம் இவற்றின் கூட்டலை விட அதிகமானுல், பணியகம் (servicing centre) (சேவை செய்யாமல்) செயலற்று, nஆவது வாடிக்கையாளருக்கு பணிபுரிவதற்குக் காத்திருக்கிறது.

இந்தச் செயலற்ற நேரத்தை I_n என்று குறித்தால்,

I_n = (nஆவது வாடிக்கையாளரின் வருகை—இடைவெளி நேரம்)

— { $(n-1)$ ஆவது வாடிக்கையாளரின் (காத்திருக்கை + சேவை நேரம் }

என்று எழுதலாம்.

பணியகத்தின் மொத்த செயலற்ற நேரம் (Total Idle Time) $\Big\} = \sum_{n=1}^{15} I_n$

இங்கு $I_n > 0$ ஆக உள்ள I_n ஐயே நாம் எடுத்துக் கொள்கிறேம். நமது உதாரணத்தில், $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ இந்த இடங்களில் $I_n = 0$ ஆகும்.

எனவே, $I_9 = 1$, $I_{10} = 1$, $I_{11} = 5$, $I_{15} = 4$.

∴ பணியகத்தின் மொத்த செயலற்ற நேரம்

$$= I_9 + I_{10} + I_{11} + I_{15} = 11.$$

பணியகம் செயலற்ற நேரத்தின் பின்னம் $\Big\} = \dfrac{\text{பணியகத்தின் மொத்த செயலற்றநேரம்}}{\text{செயல்முறைக்கான மொத்த நேரம்}}$

$$= \frac{11}{62}$$

கூறு பெரிதாக இருந்தால் ஒரு தனி அலகு காத்திருக்கும் அலைவெண், இரண்டு அலகுகள் காத்திருக்கும் அலைவெண் முதலியன கண்டுபிடிக்கப்பட்டு, ஒரு குறிப்பிட்ட சமயத்தில், ஒரு தரப்பட்ட எண் அலகுகள் காத்திருக்கையின் நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம், கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் மிகவும் விரிவானவையாக இருந்தால், வருகை நேரங்களுக்கும், சேவை நேரங்களுக்குமான (நிகழ் தகவுப்) பரவல்கள் கண்டுபிடிக்கலாம் என்று அறியவும்.

முறை வரிசைகளில் பல விதங்கள்

முறை வரிசைப்பிரச்சினைகளைப்பற்றி அனுமானங்கள் நிலைமைகளுக்குத் தக்கபடி மாறுகின்றன. பல விதமான முறை வரிசை

நிகழ்வுகளை கீழே பொதுவாக விளக்குகிகிறும். கீழே குறிப்பிட்ட சாத்தியக் கூறுகள் பலவற்றிலும், முறை வரிசைப் பிரச்சினை இன்னும் தீர்வு காண முடியாமல் உள்ளன; அல்லது ஆராச்சி நிலையில் உள்ளன. எனவே சில எளிதான பிரச்சினைகளையே நாம் கவனிப்போம்.

1. வருகை, சேவை நேர பரவல்களின் விதங்கள்
(Types of Arrival and Service-time Distribution)

முறை வரிசைக்குள் நுழையும் வருகைகள் ஓர் அலைவெண் பரவலைச் சார்ந்து அமைகின்றன. அதேபோல வருகைகளுக்கிடையேயான இடைவெளிகளும் அப்படியே அமைகின்றன. சேவையைப் பொறுத்தும் இது உண்மையாகிறது.

2. ஆரம்ப உட்பாடு மாறுபாடுகள் (Intial-input variations)

ஒரு செயல்முறை ஆரம்பிக்கும்போது, ஒழுங்கு முறையில் (system) உள்ள ஆரம்ப எண்ணிக்கை ஒரு பரவலில் அமைகிறது. ஒரு வரிசை முறைக்கான உட்பாடுகள் ஓர் எல்லைக்குட்பட்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அல்லது எல்லைக்குட்படாத ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து ஏற்படுகின்றன. அந்த முழுமைத் தொகுதி பலவகையான வாடிக்கையாளர்கள், ஒவ்வொருவரும் எந்த ஒரு மாறுபட்ட பரவலைச் சார்ந்து வருகிறுர்கள், தனியாக வருகிறுர்களா, கும்பலாக வருகிறுர்களா, ஒரு குறிப்பிட்ட வழி முறையில் முறை வரிசைப் படுகிறுர்களா என்பதைக் கொண்டு அமைகிறது.

3. வாடிக்கையாளர்களின் நடக்கை (Customer's behaviour)

(a) பின்வாங்குதல் (Balking): வருகின்ற வாடிக்கையாளர் பின்வாங்கலாம் (அதாவது முறை வரிசையில் சேராது போகலாம்), ஏனெனில் இருக்கும் முறை வரிசை மிகவும் நீளமாக இருக்கலாம்.

(b) முழுமையற்ற செய்தி விபரங்களின் பலன் (Influence of incomplete information) : ஒரு பலவித-முறை வரிசைச் செயல் முறையில் (multiple queue operation) சிலவற்றுக்கு மட்டுமே விபரங்கள் தெரிந்திருக்கையில், ஒரு புது வருகைக்கு முறை வரிசையைத் தேர்ந்தெடுப்பது பிரச்சினையாகிறது.

(c) முறை வரிசை நிபந்தனைகளுக்கேற்ப வாடிக்கையாளரின் (வேறுபடும் தன்மை) தழுவல் (adaptation) அனு

பவத்தின் பேரில், வாடிக்கையாளர், காத்திருப்பதைத் தவிர்ப்ப தற்கு வழிகளைத் தெரிந்து கொள்ளுகிறார்.

(d) இரகசிய உடன்படிக்கை (collusion) : பல வாடிக்கை யாளர்கள் இரகசிய உடன்படிக்கையின்படி ஒருவரை முறை வரிசையில் காத்திருக்க வைத்து விட்டு, மற்றவர்கள் வெளியே மற்ற வேலைகளைக் கவனிக்க உலவுவார்கள். சிலர் ஒருவர் மாற்றி மற்றொருவராக முறை வரிசையில் காத்திருப்பதற்கு முன்னேற் பாடு செய்வார்கள்.

(e) தாவுதல் (Jockeying) : வாடிக்கையாளர்கள் ஒரு முறை வரிசையினின்றும் மற்றொரு வரிசை முறைக்குத் தாவுவார்கள்.

(f) பாதியில் விலகல் (Reneging): வாடிக்கையாளர் ஒழுங்கு வரிசையில் சில நேரம் காத்திருந்து விட்டுப் பிறகு சேவைக்கு முன்னரே (அதாவது பாதியில்) பொறுமையிழந்து ஒழுங்கு வரிசையை விட்டு விலகுவார்.

4. முறை வரிசை, செல்லும் வழிகளில் மாறுபாடுகள் : (Queue and channel variations) :

(a) முழுமையான அல்லது அளவான கிடைக்கும் தன்மை (Full or limited availability) :

சேவைக்கான செல்லும் வழிகள் ஒழுங்கு அமைப்பில் காத் திருக்கும் எந்த ஓர் அலகுக்கும் கிடைக்கலாம்; அல்லது சில காத்திருக்கை அலகுகளுக்கு மட்டுமே கிடைக்கலாம்.

(b) சேவை முறைகள் அல்லது நியதிகள் : (Service Procedures or Disciplines)

சேவையானது, "முதல் வருகைக்கு முதல் சேவை" (first come first served) அல்லது "கடைசி வருகைக்கு முதல் சேவை" (last come first scrved) அல்லது ராண்டம் முறையில் முந்துரிமை களுடன் (with priorities) என்ற அடிப்படைகளில் அமையலாம்.

(c) தொடர்ச்சியான—இணையான வாய்ப்பு நலன்கள் (Series —parallel facilities) :

ஒரு சேவை வாய்ப்பு நலமானது பலவித செல்லும் வழிகளைக் கொண்டிருக்கலாம். இவற்றில் சில செல்லும் வழிகள் மற்ற செல்லும் வழிகளுடன் தொடர் வரிசையிலும் இருக்கலாம். தொடர்ச்சியில் செல்லும் வழிகள் வகையில்,(Channels in series)

ஒவ்வொரு செல்லும் வழிக்கும் முன்னுல் (before each channel) ஒரு வரிசை முறை அமைக்க முடியும்; (a queue may or may not be permitted) அல்லது அமைக்க முடியாமலும் இருக்கும்.

5. ஒரு முறை வரிசையின் (வெளிப்பாடு) ஆக்க அளவு : (Out put of a Queue)

முதல் முறை வரிசையானது மற்ருெரு முறை வரிசையுடன் தொடர்ச்சியில் அமைத்து, அந்த, மற்ற முறை வரிசைக்கு, முதல் முறை வரிசையின் ஆக்க அளவானது (out put), ஓர் உட்பாடாக (in put) அமைந்தால், அந்த ஆக்க அளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும். வருகை சேவைப்பரவல்கள் ஒன்றையொன்று சார்ந்திருக்கும் போது இது முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகக் கருதப்படுகிறது.

"நியதிவாதத்திற்கான முறை வரிசை உருப்படிவங்கள்"

(Deterministic Queueing Models)

ஓர் ஒழுங்கான 'a' அளவு காலஇடைவெளிகளில், ஒருதனிப்பட்ட வழியில் (பாதையில்) (channel) வாடிக்கையாளர்கள் வருகின்றனர் என்று கொள்வோம். (வருகை வீதம் $\frac{1}{a}$ ஆகும்) அவர்கள் ஓர் ஒழுங்கான 'b' அளவு கால இடைவெளி களில் சேவை செய்யப்படுகின்றனர். (இங்கு சேவை வீதம் $\frac{1}{b}$ ஆகும்) என்றும் கொள்வோம். சேவைப்பாங்கு அல்லது முறையானது; முதல் வருகைக்கு முதல் சேவை (first come, first served) என்றவாறும் அமைகிறது என்றும் கொள்வோம்.

சேவைச் செயல் முறையானது காலியான முறை வரிசையில் ஆரம்பிக்கிறது என்று கொண்டால்,

(i) $b < a$; அதாவது, $\frac{b}{a} < 1$ என்ருல், யாவரும் முறை வரிசையில் காத்திருக்கவில்லையென்று அர்த்தமாகிறது.

(i) $\frac{b}{a} > 1$ என்ருல் காத்திருக்கும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை எல்லையற்றவாறு கூடுகிறது என்று அர்த்தம்.

(iii) $\frac{b}{a} = 1$ என்ருல், யாரும் முறை வரிசையில் காத்திருக்கவில்லையென்று அர்த்தமாகும்.

ஆரம்பக் கட்டத்தில் i எண்ணிக்கையான வாடிக்கையாளர்கள் சேவைச் செயல்முறையானது ஆரம்பிக்கும்போது காத்திருக்கிறார்கள் எனக் கொள்வோம். $i > 2$ என்றும் கொள்வோம். இப்போது,

(i) $\frac{b}{a} > 1$ என்றால், காத்திருக்கும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை எல்லையற்றவாறு அதிகரிக்கும் (indefinitely will increase)

(ii) $\frac{b}{a} = 1$ என்றால், முறை வரிசை மாறாத (நிலையான) அளவு நீளம் 'i' அளவைக் கொண்டிருக்கும் என்று அர்த்தம்.

(iii) $\frac{b}{a} < 1$, என்றால், ib என்ற கால இடைவெளி அளவின் முடிவில் எல்லா ஆரம்ப 'i' வாடிக்கையாளர்களும் சேவை செய்யப்பட்டுவிடுவார்கள் என்று அர்த்தம்.

இதற்குள், $\left[\frac{ib}{a}\right]$ அளவு புதிய வாடிக்கையாளர்கள் வருகை தந்து காத்திருக்கவேண்டி இருக்கும். இந்தப் புது வாடிக்கையாளர்களின் மொத்த சேவை நேரம் மட்டுமே $b\left[\frac{ib}{a}\right]$ ஆகும்.

இந்த $b\left[\frac{ib}{a}\right]$ என்ற சேவை நேரத்தின்போது,

$\left[\frac{b\left[\frac{ib}{a}\right]}{a}\right] + 1$ எண்ணுடைய மேலும், புதிய வாடிக்கையாளர்கள் முறை வரிசையில் சேர்ந்து, சேவைக்காகக் காத்தும் இருப்பார்கள். இங்கு $b < a$ என்பதாலும், மற்ற விவரங்களாலும்.

$$\left[\frac{b\left[\frac{i\,b}{a}\right]}{a} + 1\right] < \left[\frac{i\,b}{a}\right]$$ என்று கவனிக்க,

எனவே, வருகை தரும் வாடிக்கையாளர் காத்திருக்க வேண்டாத ஒரு கட்டம் வரலாம். இதைப் பின்வரும் உதாரணத்தின்மூலம் விளக்குகிறோம்.

$b = 1$ நிமிடம்

$a = 3$ நிமிடங்கள்

$i = 50$ என்று கொள்வோம்.

முதல் 50 வாடிக்கையாளரின் சேவை நேரம்=50 நிமிடங்கள்

இந்த நேரத்தில் வருகைதரும் புதிய வாடிக்கையாளர்கள் எண்ணிக்கை $\Big\} = \frac{50}{3} = 16$

புதிய 16 வாடிக்கையாளர்களின் சேவை நேரம் = 16 நிமிடங்கள்.

இந்த 16 புது வாடிக்கையாளர்களின் சேவை நேரத்தின்போது, மேலும் புதிதாக வரும் வாடிக்கையாளர்கள் என்ணிக்கை $\Big\} = \frac{16}{3} + 1 = 6$

மேலே கண்ட 6 புது வாடிக்கையாளர் சேவை நேரத்தின்போது, மேலும் வருகைதரும் மூன்றுவது தொகுப்பான வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை $\Big\} = \frac{6}{3} = 2$

இந்த இரண்டு வாடிக்கையாளர்களில் இரண்டாமவரின் சேவையை முடிக்கும் தருணத்தில் ஒருவர் வருகை தந்தால் அவர் சேவைக்காகக் காத்து நிற்க வேண்டாம். இச் சமயத்தி லிருந்து வரும் வாடிக்கையாளர் எவரும் இனி காத்திருக்க வேண்டியது இல்லை.

சேவைக்குக் காத்திருக்கும் வாடிக்கையாளர்களின் மொத்த என்ணிக்கை $\Big\} = 50+16+6+2=74$

இதே (iii) வகையில், காத்திருக்கும் எல்லா உறுப்புக்களையும் சேவை செய்யத் தேவையான கால அளவை நாம் இப்போது கணிப்போம். முறைவரிசையில் A புது வருகைகள் இப்போது காத்திருக்கட்டும் என்று கொள்வோம். எனவே $(i+A)$ வாடிக் கையாளர்களின் சேவை நேரத்துக்குப் பிறகு, $(A+1)$ ஆவது வருகை நிகழ்கிறது.

$$\therefore\ (i + A)\ b < a\ (A + 1)$$

அல்லது $ib-a < A\ (a - b)$; இங்கு A என்பது அத்தகைய ஒரு மிகச் சிறிய முழு எண்.

$$\therefore \quad A = \left[\frac{ib - a}{a - b}\right] + 1$$

∴ காத்திருக்கும் எல்லா உறுப்புகளையும் சேவை செய்ய ஆகும்

$$\text{நேர அளவு} = b\left(i + \left[\frac{ib - a}{a - b}\right] + 1\right)$$

$$= b\left[\frac{ia - b}{a - b}\right]$$

இந்த நியதிவாதத்துக்கான முறை வரிசை உருப் படிவத்தில் ஓர் எளிதான பிரச்சினையை நாம் கவனித்தோம். இப் பிரச்சினையை மாற்றியமைக்கப்பட்ட முறை வரிசை சாத்தியக் கூறுகளின்மூலம் அணுகலாம். ஆனால், அவை உண்மைப் பிரச்சினைகளில் அதிகமாகப் பயன்படாததால் அவற்றை நாம் இங்கு விளக்கவில்லை.

நிகழ் தகவுக்கான முறை வரிசை உருப் படிவங்கள் (Probabilistic Queueing Models)

உண்மைப்பிரச்சினைகளில் பல பொதுவான முறை வரிசைப் பிரச்சினைகள் நியதி விதிக்கானவையல்ல. உதாரணமாக, ஒரு வாடிக்கையாளரின் சேவை நேரத்தை ஒரு முறை வரிசைப் பிரச்சினையில், எடுத்துக்கொள்வோம். முழுதும் ஒத்த நிலைகளில் வாடிக்கையாளருக்குச் சேவை செய்யப்பட்ட போதிலும் அவரது பழக்க வழக்கங்களைப் பொறுத்தும் தேவையைப் பொறுத்தும் சேவைக்கான நேரம் மாறுபடும். இந்த இயல்பான மாறுபாடு (inherent variations) களால், சேவை நேரத்தை நிகழ்தகவுமூலமாகக் குறிக்க வேண்டியுள்ளது. வாடிக்கையாளர் வருகை வீதத்துக்கும் இது பொருந்தும்.

எனவே, இனிமேல் வருகை வீதமும் சேவை வீதமும் சில புள்ளியியல் நிகழ்தகவுப் பரவல்களை ஒட்டியமைவதான முறை வரிசை (பிரச்சினைகளை) உருப்படிவங்களை நாம் கவனிப்போம். முறை வரிசையினை விளக்கும் இந்த நிகழ்தகவுப் பரவல்கள், நேரத்தை (காலத்தை)ச் சார்ந்திருக்கும். உண்மையான முறை வரிசைப் பிரச்சினைகளில் (real life queueing problems) முறை வரிசையின் ஆரம்ப நிலையானது நேரம் செல்லச் செல்ல ஒழுங்கமைப்பில், தனது செயல் விளைவைக் குறைத்துக்கொள்கிறது: அதாவது, ஒழுங்கமைப்பானது ஆரம்ப நிலையைச் சாராது, வேறு வடிவங்களில் அமையும். ஆரம்ப விளைவு பயனிழந்து போகையில் எந்த நேரத்துக்கும் பொருந்தக்கூடிய நிகழ்தகவுகளின் ஒரே மாதிரியான பொது வடிவம் கொண்ட ஓர்

ஒழுங்கமைப்பை நாம் கண்டறிய வேண்டும். இந்தக்கட்டத்தில் கால நேரத்தை ஒட்டி வடிவம் மாறுபடாமல் இருக்கிறது; எனவே நிகழ்தகவுகளும் ஒரு சமநிலையையோ (equilibrium) அல்லது ஒரே சீரான நிலை வடிவத்தையோ (steady state form) அடைகின்றன. ஒரே சீரான நிலையில், முறை வரிசையானது ஏறியிறங்கு முகத்தான் உள்ளது; ஆனால், அதை விவரிக்கும் நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் நேரத்தைச் சாராமல் உள்ளன.

சில சமயங்களில் இப்படியும் நிகழ்வதுண்டு; அதாவது முறை வரிசையானது ஒரே சீரான நிலையை அடையாமலும் போகலாம்; ஆரம்ப நிலையின் செயல் விளைவினால் உறுதியற்ற நிலையில் (Transient state) இருந்துகொண்டே இருக்கலாம்.

ஒருமுறை வரிசைப் பிரச்சினையின் போக்குவரவு நடமாட்ட உச்ச அளவு (traffic intensity) அல்லது நெருக்கடியை (congestion) கீழ்க்கண்டவாறு P மூலம் வரையறுக்கிறோம்.

$$P = \frac{\text{சராசரி வருகை வீதம்}}{\text{சராசரி சேவை வீதம்}} = \frac{\text{சராசரி சேவை நேரம்}}{\text{சராசரி இடைவருகை நேரம்}}$$

(mean inter-arrival time)

வாடிக்கையாளர் சேவைக்காகக் காத்திருந்தாலோ, அல்லது சேவை செய்யப்பட்டாலோ அவர் அமைப்பில் (system) இருப்பதாக அர்த்தம் எனக் கொள்வோம். அவர் சேவைக்காக இன்னும் காத்திருந்தால், அவர் முறை வரிசையில் காத்திருக்கிறார் என்று கூறுவோம். எனவே, ஒரு வாடிக்கையாளரது காத்திருக்கை நேரம், சேவை செய்யப்படுவதற்கு முன்னால் அவர் முறை வரிசையில் நின்று கழியும் நேரத்தைக் குறிக்கிறது. ஓர் அமைப்பில் வாடிக்கையாளரால் கழியும் நேரம் அவரது காத்திருக்கை நேரம் + அவரது சேவைக்கான நேரம் ஆகும். அமைப்பில் உள்ள வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையானது, முறை வரிசையில் உள்ள வாடிக்கையாளர் எண்ணிக்கை + சேவை செய்யப்படும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

எந்த ஒரு முறை வரிசைப் பிரச்சினையிலும், முதலில், ஒரே சீரான நிலை காணப்படுகிறதா என்று நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். பிறகு கீழ்க்கண்ட விபரங்களைத் தெரிந்து கொள்ள முயல வேண்டும்.

முறைவரிசையின் நீளம்(The Queue Length): அமைப்பிலுள்ள வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை, முறை வரிசையில் உள்ள

வர்களின் எண்ணிக்கை இவற்றுக்கான பரவல் சராசரி முறை வரிசை—நீளம், அமைப்பில் உள்ள வாடிக்கையாளர்களின் சராசரி எண்ணிக்கை.

2. காத்திருக்கை நேரம் (The waiting time)

காத்திருக்கை நேரப் பரவல் (waiting time distribution), சராசரி காத்திருக்கை நேரம், காத்திருப்பவர்களுக்கான சராசரி காத்திருக்கை நேரம்.

3. சுறுசுறுப்பான காலப் பகுதி (Busy period)

ஒரு செயலற்ற பாதையில் (செல்லும் வழி, channel) ஒரு வாடிக்கையாளர் வருகை தரும் நேரத்திலிருந்து, அடுத்தாற் போல அந்தப் பாதை செயலற்றுப்போகும் நேரம் வரையான காலப்பகுதியைச் சுறுசுறுப்பான காலப்பகுதி என்று கூறுகிறோம். இதேபோல செயலற்ற காலப்பகுதியையும் வரையறுக்கலாம். இந்தச் சுறுசுறுப்பான காலப்பகுதியின் (நீள) அளவுக்கான பரவல்.

சேவைக்கான வழி (பாதை)கள் சுறுசுறுப்பான காலப் பகுதியையும் செயலற்ற காலப்பகுதியையும் மாறிமாறிக் கொண்டிருக்கும் என்று நாம் விளக்கமாக அறிகிறோம். எனவே, செயலற்ற காலப் பகுதியின் அளவிற்கான பரவல், சுறுசுறுப்பான காலப் பகுதியில் அளவிற்கான சேவைகளின் எண்ணிக்கைக்கான பரவல், பாதை சுறுசுறுப்பாக இருக்கும் நேரத்தின் விகிதம், சேவைப் பாதைசெயலற்று இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு இவற்றைக் கண்டுபிடிக்க நாம் முற்படுகிறோம்.

$M/M/1$ முறை வரிசை (The Queueing Model M/M/1)

இடைவருகையானது, மார்க்காவ் செயற்பாங்கில் (Markovian process) பாய்சான் பரவலைப்பெற்றிருப்பதை முதல் M குறிக்கிறது. சேவை நேரமானது மார்க்காவ் செயற்பாங்கில் எதிர்மறை அடுக்குக்குறிப் பரவலைப்பெற்றிருப்பதை, இரண்டாவது M குறிக்கிறது. மேலேகாணப்படும் உருப்படிவத்தில் மூன்றுவதாகப் பணியாள்களின் எண்ணிக்கை 'S' ஐக் குறிக்கிறது. இங்கு $S = 1$ ஆகும்.

$M/M/1$ படிவம்

அதாவது, ஒரு முறை வரிசைப்பிரச்சினைக்குக் கீழ்க்கண்டவற்றை, மேற்படி குறிமானம் (notation) குறிக்கின்றது.

1. வாடிக்கையாளர்கள் பாய்சான் முறைப்படி. λ வீதத்தில் வருகை தரும் பிரச்சினையில் 'முதல் வருகைக்கு முதல் சேவை' என்ற அடிப்படையில் ஒரே ஒரு பணியாள் மூலமாகச் சேவைகள் செய்யப்படுகின்றன.

2. வாடிக்கையாளரின் சேவைநேரமானது μ சுட்டுறுப்புடன் $0<v<\infty$ என்றவாறு, $\mu e^{-\mu v}dv$ என்னும் ஓர் எதிர்மறை அடுக்குக் குறிப்பரவலைக் (negative exponential distribution) கொண்டுள்ளது.

இதைத்தவிர எல்லா முறைவரிசைப் பிரச்சினைகளுக்கும் பொருந்துகிற மேலும் இரண்டு அடிப்படை அனுமானங்கள் இருக்கின்றன. இவற்றை இப்போது விளக்கிவிட்டால் பின்பு ஒவ்வொரு (தடவையும்) உருப்படிவத்திற்கும் இதைத் திரும்பத் திரும்பச் சொல்லவேண்டாம்.

அனுமானம் 1.

தொடர்ச்சியான வாடிக்கையாளர்களின் வருகை இடைவெளி நேரங்களை $u_1, u_2, u_3, \ldots \ldots$ என்று குறிப்போம். இந்த $u_1, u_2, u_3, \ldots$ மாறிகள் ஒன்றுக்கொன்று தற்காப்பு அற்ற ராண்டம் மாறிகளாகும். இவை ஒரே பரவற் சார்பலனைக் கொண்டவையாகும். வருகை வீதம் பாய்சான் பாங்காக இருக்கும் இச்சமயத்தில் அதற்கேற்ற இடைவருகை நேரங்கள் (அடுத்தடுத்த வருகைகளுக் கிடையேயான நேரம்) ஓர் எதிர்மறை அடுக்குக் குறிப்பரவலை கீழ்க்கண்டவாறு பெற்றிருக்கும். λ என்பது சுட்டுறுப்பானால், $0 \leqslant T < \infty$ என்றால், $\lambda e^{-\lambda T} dT$ என்பது அப் பரவலைக் குறிக்கும்.

அனுமானம் 2.

சேவை நேரங்கள் $v_1, v_2 \ldots\ldots$ என்பன, ஒன்றுக்கொன்று தற்சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகளாகவும், ஒரே பரவற் சார்பலனைக் கொண்டதாகவும், $u_1, u_2, \ldots\ldots$ மாறிகளினின்றும் சார்பு அற்றதாகவும் உள்ளதாகக் கொள்வோம். அந்தப் பரவற் சார்பலன் முன் குறிப்பிட்டதுபோல, $\mu e^{-\mu v} dv, (0<v<\infty)$ ஆகும். $(0,t)$ இடைவெளியில் வருகைகளின் எண்ணிக்கை $A(t)$ என இருக்கட்டும். இப்போது $A(t)$-ன் நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$P_r \{A(t)=n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \ (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

$\therefore$ சராசரி வருகை வீதம் $= \lambda$

இடை வருகை நேரம் T-க்கான நிகழ்தகவுப் பரவலானது

$$\lambda e^{-\lambda T} dT, 0 < T < \infty$$

எனவே, சராசரி இடை வருகை நேரம்

$$= \int_0^\infty \lambda . e^{-\lambda T} T.dT = \frac{1}{\lambda}$$ என்று கவனிக்கவும்.

மேலும் சராசரி வருகை வீதத்துக்கும், சராசரி இடை-வருகை நேரத்துக்கும் இடையிலுள்ள தலைகீழ்த் தொடர்பானது வருகைகளின் பாய்சான் அனுமானத்துக்கு மட்டுமே பொருந்தும். மற்ற வருகைப் பரவல்களுக்கு இது பொருந்தாது. தேவைக்கும் இத்தகைய தொடர்பு மேற்கூறியவாறு பொருந்தும்.

$(0,t)$ இடைவெளியில் வாடிக்கையாளர்களின் தேவை பூர்த்தியாகி அமைப்பை விட்டு நீங்கும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையை $D(t)$ என்று குறிப்பிட்டால், சேவை நேரம் எதிர்மறை அடுக்குக்குறிப் பரவலைக் கொண்டது என்பதால்,

$$P_r [D(t) = n] = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

என்றவாறு, $D(t)$யும் ஒரு பாய்சான் செயற்பாங்காகவும் (Poisson process) இருக்கும்.

சராசரி சேவை வீதம் $= \mu$; மேலும் சேவை நேரப் பரவலிலிருந்து,

சராசரி சேவை நேரம் $$= \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu v} \cdot v \cdot dv = \frac{1}{\mu}$$ ஆகும்.

போக்குவரவு நடமாட்ட உச்ச அளவு அல்லது நெருக்கடியானது $P = \frac{\lambda}{\mu}$ ஆகும் என்பதைக் கவனிக்க.

ஒரே சீரான நிலை நிகழ்தகவுகள் (Steady State Probabilities)

$t > 0$ என்ற நேரத்தில், அமைப்பில் உள்ள வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையை $Q(t)$ என்று குறிப்போம். இடைக் காலத்திற்குரிய நிகழ்தகவுகளை (transition probabilities)

$P_{ij}(t) = P_r[Q(t) = j/Q(0) = i]$, $t > 0$ என்று குறிப்போம்.

இங்கு $P_{ij}(0) = \delta_{ij} = 1, \quad i = j$ என்றால்
$= 0, \quad i \not> j$ என்றால்

$Q(t)$ ஆனது 0, 1, 2, ... என்றவாறு மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்வதால், i-யோ, j-யோ அல்லது இரண்டுமோ எதிர் மறையாகும்போது $P_{ij} = 0$ என்று குறிப்போம். இப்போது $(t, t+\Delta t)$ என்ற ஒரு மிக நுண்ணிய கால இடைவெளியைக் கவனிப்போம்.

இந்த இடைவெளியில் ஒரு வருகைக்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{(\lambda \Delta t)}{1!} e^{-\lambda \Delta t}$$

$$= (\lambda \Delta t)\left[1 - \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2!} + \dots\dots\dots\right]$$

$$= \lambda \Delta t + O(\Delta t)$$

$n > 1$ எனும்போது, இந்த இடைவெளியில் n வருகைகளுக்கான நிகழ்தகவு $= O(\Delta t)$ ஆகும்.

$\therefore$ இந்த இடைவெளியில் பூஜ்ய வருகைகளுக்கான நிகழ்தகவு $= 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t)$.

இதேபோல இந்த இடைவெளியில் ஓர் ஆளுக்குச் சேவை செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = \mu \Delta t + 0(\Delta t)$

$n>1$ எனும்போது, n ஆள்களுக்கு இந்த இடைவெளியில் சேவை செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = 0(\Delta t)$

எனவே இந்த இடைவெளியில் பூஜ்ய சேவைக்கான நிகழ்தகவு $\Big\} = 1-\mu \Delta t + 0(\Delta t)$

ஆகையால், மேற்படி குறிமானத்தில்,

$$P_{i,i+1}(\Delta t) = [\lambda \Delta t + 0(\Delta t)]\,[1-\mu \Delta t + 0(\Delta t) + 0(\Delta t)]$$
$$= \lambda \Delta t + 0(\Delta t)$$

$$P_{i,i-1}(\Delta t) = [1-\lambda \Delta t + 0(\Delta t)]\,[\mu \Delta t + 0(\Delta t)] + 0(\Delta t)$$
$$= \mu \Delta t + 0(\Delta t)$$

$$P_{i,i}(t) = [1-\lambda \Delta t + 0(\Delta t)]\,[1-\mu \Delta t + 0(\Delta t)] + 0(\Delta)$$
$$= 1-(\lambda+\mu)\,\Delta t + 0(\Delta t)$$

மற்ற எல்லா i, j சேர்க்கைகளுக்கும் $P_{ij}(\Delta t) = O(\Delta t)$.

Δt-ன் அளவு மிகச் சிறியதானதால் $O(\Delta t)$-ன் மதிப்பு மிக மிகச் சிறயதானதாகவும், தள்ளுபடி செய்துவிடக் கூடியதாகவும் இருக்கும்.

எனவே, $O(\Delta t) = 0$ ஆகும்.

நேரம் t-ல் எல்லா i, j மதிப்புகளுக்குமான P_{ij} மதிப்புகளை நாம் அறிந்ததாகக் கொள்வோம். இப்போது $t+\Delta t$ நேரத்தின் போது இந்த மேற்படி அமைப்பில் என்ன நிகழ்கிறது என்று பார்ப்போம்.

$$P_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t).\ P_{kj}(\Delta t),\ (i, j, > 0) \text{ என்றால்,}$$

என்ற சமன்பாட்டுத் தொடர்பினைக்கொண்டு, நாம் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைக் காண்கிறோம்.

$$P'_j(t+\Delta t) = P_{ij}(t)[1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t] + P_{ij-1}(t)\lambda\Delta t + P_{i,\ j+1}(t)\mu\Delta t,\ (j>0 \text{ என்ற மதிப்புகளுக்கு})$$

$$P_{i_0}(t+\Delta t) = P_{i_0}(t)[1-\lambda\Delta t] + P_{i1}(t)\mu\Delta t.$$

$j>0$ என்ற மதிப்புகளுக்கு,

$$\frac{P_{ij}(t+\Delta t) - P_{ij}(t)}{\Delta t}$$

$$= -(\lambda+\mu)P_{ij}(t) + \lambda P_{i,j-1}(t) + \mu\cdot P_{i,j+1}(t)$$

இப்போது, $\Delta t \rightarrow 0$ என்றால்,

$$j > 0\text{-க்கு, } \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t+\Delta t - P_{ij}(t)}{\Delta t}$$

$$\left.\begin{aligned} &= -(\lambda+\mu)P_{ij}(t)+\lambda P_{i,j-1}(t)+\mu P_{i,j+1}(t) \\ &j=0\text{-க்கு, } \frac{dP_{i_0}(t)}{dt} = -P_{i_0}(t)\lambda+\mu P_i(_1 t) \end{aligned}\right\} \quad ...(1)$$

எனவே, $P<1$ என்று நாம் கொள்வோம்.

ஒரே சீரான நிலை நிகழ்தகவுகள் P_{ij}-க்களாகும். இந்த P_{ij}-க்கள்

$$P_{ij} = \lim_{t\rightarrow\infty} P_{ij}(t) \text{ என்றவாறு இருக்கும்.}$$

மேற்கண்ட (1) சமன்பாடுகளில் வகைக்கெழு (derivative) வைப் பூஜ்யத்துக்குச் சமமாக்கி நேரத்தை நீக்கிவிட்டால், நமக்கு ஒரே சீரான நிலைச் சமன்பாடுகள் (steady state equations) கிடைக்கும்.

அவையாவன: $(\lambda+\mu)P_{ij}=\lambda P_{i\cdot j-1}+\mu P_{i,j+1}$, $j>0$ என்றால்
மேலும், $\lambda\ P_{i0} = \mu\ P_{i1}$ ஆகும்.

சுலபமான இவற்றை எழுதுவதற்கு P_{ij}-லிருந்து i என்ற கீழ்க் குறியை (suffix) நீக்கி விட்டு P_j என்று எழுதலாம். இப்போது P_j என்பது எந்தஒரு நேர,அளவிலும், அமைப்பில் j எண்ணிக்கை யுடைய வாடிக்கையாளர்கள் இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு ஆகும். இந்தச் சீர்நிலை அமைப்பு (steady state system), நேர அளவைச் சாராமல் உள்ளதென்பதை நாம் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும். அதனால்தான் சீர்நிலைச் சமன்பாடுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அடைய வகைக்கெழுவைப் பூஜ்யத்துக்குச் சமமாக்குகிறோம்.

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)\ P_j=\lambda P_{j-1}+\mu P_{j+1},\ j>0 \text{ என்றால்} \\ \text{மேலும்,}\quad \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ஆகும்.}\end{array}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

எனவே, $P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho.\ P_0$ ஆகிறது.

இப்போது $j = 1$ என்றால்,

$$(1 + \rho)\ P_1 = \rho\ P_0 + P_2$$

இப்போது P_1-ன் மதிப்பை எழுதினால்,

$$(1 + \rho)\ \rho\ P_0 = \rho P_0 + P_2$$

$$\therefore\quad P_2 = \rho^2\ P_0$$

இப்படியே திரும்பத் திரும்பக் கண்டு பிடித்தால் $P_j=\rho^j\ P^0$ என்று ஆகிறது.

அமைப்பில் ஒருவரும் இல்லை, ஒருவர் உள்ளார், இருவர் இருக்கிறார்கள் முதலிய பல நிகழ்ச்சிகளில் குறைந்த பட்சம் ஒன்றாவது நிச்சயமாக நிகழ்வதால்,

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1.$$

அதாவது $$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j\ P_0 = 1$$

$\therefore\quad \rho_0\ (1 - \rho)^{-1} = 1;$ (இங்கு $\rho < 1$ என்பதாகும்)

எனவே, $P_0 = 1 - \rho$

$$P_1 = \rho\, P_0 = \rho\,(1 - \rho)$$

$$P_2 = \rho_2\,(1 - \rho)$$

$$P_h = \rho^n\,(1 - \rho)$$ ·ஆகிறது.

இது ஒரு ஜியோமிதிப்பரவல் என்றழைக்கப்படும் ஒரு நிகழ் தகவுப் பரவலின் வகையாகும்.

முக்கியப் பண்புகள்

சீர் நிலை நிகழ்தகவுகளுக்கான சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கண்ட பின்னர், அமைப்பின் முக்கிய விபரங்களைக் காண முற் படுவோம். எந்த ஒரு கால வரம்பிலும், சீர் நிலைச் சமயங்களில், அமைப்பில் உள்ள வாடிக்கையாளர்களின் எதிர்பார்க்கும் எண் $=L$ என்க. சராசரி முறை வரிசை நீளம் $= L_q$. இங்கு சேவை செய்யப்படுபவரின் எண்ணிக்கை இதில் சேராது.

W_q = ஒரு வாடிக்கையாளரின் சராசரி காத்திருக்கை நேரம்(அவரது சேவைக்கான நேரம் இதில் சேராது.)

W = அமைப்பில் கழிந்த (செலவான) எதிர்பார்க்கும் நேரம்.

= சராசரி காத்திருக்கை நேரம் + சராசரி சேவைக் கான நேரம்.

L_{Nq} = காலி இல்லாத முறை வரிசைகளின் (non-empty queues) சராசரி நீளம் (சேவை செய்யப்படுபவர்களை இதில் சேர்க்கவில்லை).

W_{Nq} = ஒருவர் வருகை தந்து காத்திருந்பின், சராசரி காத்திருக்கை நேரம் (அவரது சேவை நேரத்தைச் சேர்க்கவில்லை).

அமைப்பில் உள்ள சராசரி எண்ணிக்கை: (Average number in the system)

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^n\,(1 - \rho)$$

$$= (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^{n-1}$$

$$= (1-\rho)\, \rho\, (1 + 2\rho + 3\rho^2 + 4\rho^3 + \ldots\ldots)$$

$$= (1-\rho)\, \rho\, \frac{1}{(1-\rho)^2}\,;$$ ஏனெனில் $\rho < 1$ ஆகும்.

$$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad \ldots \qquad \ldots (3)$$

சராசரி முறை வரிசை நீளம் (Average Queue Length)

முறை வரிசையில் n ஆள்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

= அமைப்பில் $(n+1)$ ஆள்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$= P_{n+1}$.

முறை வரிசையில் ஒரு ஆள் கூட இல்லாத நிகழ்தகவு

= அமைப்பில் ஒருவர் இருப்பதற்கானதும், ஒருவரும் இல்லாதற்கானதுமான நிகழ்தகவு.

$= P_0 + P_1$

$$\therefore \quad L_q = \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n+1}(1-\rho)$$

$$= \rho^2(1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} n\, \rho^{n-1}$$

$$= \rho^2(1-\rho)\, [1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots]$$

$$= \rho^2(1-\rho)\, \frac{1}{(1-\rho)^2}\,;$$ ஏனெனில் $\rho < 1$ ஆகும்.

$$= \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda^2}{\mu^2}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda-\mu)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

$W_q =$ {அமைப்பில் உள்ள வாடிக்கையாளர்களின் சராசரி எண்ணிக்கை } × { சராசரி சேவை நேரம்}

$$= \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} \quad \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu(\lambda-\mu)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

இப்போது,

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

காலியாயில்லாத முறை வரிசையின் நீளம்
(Length of Non-empty queue)

ஒரு ராண்டமாறி X-ன் அடர்த்திச் சார்பலன் $f(X)$ என்று கொள்வோம்.

இப்போது $X > X_0$ என்று தரப்பட்டபோது, X-ன் நிபந்தனைப் பரவலைப்பற்றிக் கவனிப்போம்.

$$P_r[X_1 < X < X_2 \,/\, X > X_0] = \frac{Prob\,[X_1 < X < X_2]}{Prob\,[X > X_0]}$$

$$= \frac{\int_{X_1}^{X_2} f(X)\,dX}{\int_{X_0}^{\infty} f(X)\,dX} \quad \ldots \quad (7)$$

(7)-ன் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்திக் கொண்டு

$$\left.\begin{array}{l}\text{எப்போதும் ஒருநபர் முறை வரிசையில்}\\ \text{இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்}\\ \text{டால் } n \text{ நபர்கள் முறை வரிசையில்}\\ \text{இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.}\end{array}\right\} = \begin{array}{l}\text{அமைப்பில் 2 நபர்கள்}\\ \text{எப்போதும் இருப்பதா}\\ \text{கக் எடுத்துக் கொள்}\\ \text{ளப்பட்டால் அமைப்}\\ \text{பில் } (n+1) \text{ நபர்கள்}\\ \text{இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு.}\end{array}$$

$$= \frac{P_{n+1}}{1-P_0-P_1}$$

எனவே,

$$L_{Nq} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{P_{n+1}}{1-P_0-P_1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho^{n+1}(1-\rho)}{1-(1-\rho)^2-(1-\rho)\rho}$$

$$= \rho^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} n\, \rho^{n-1} \right] \frac{(1-\rho)}{\rho^2}$$

$$= \rho^2 \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{1-\rho}{\rho^2} = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\mu}{\mu-\lambda} \quad \dots (8)$$

ஒரு நபரின் சராசரி காத்திருக்கை நேரமானது வேறு விதமாகவும் கிடைக்கின்றது. ஒரு நபர் தனக்குச்சேவை கிடைப்பதற்கு முன்னர் தனக்குப்பின் L_q நபர்கள் வந்துசேரும்வரை, காத்திருக்க வேண்டும். சராசரி முறைவரிசை நீளம் L_q ஐ ஒரே நிலையில் வைத்திருக்க இப்படிச்செய்யப்படுகிறது. வருகைவீதம் 1 அலகு நேரத்துக்கு λ என்று நாம் அறிகிறோம்.

எனவே W_q= ஒரு நபருக்குப்பின் L_q நபர்கள் வருவதற்கான நேரம் $\Big\} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

III rly $\quad W_{Nq} = \frac{L_{Nq}}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda(\mu-\lambda)} \quad \dots(9)$

காத்திருக்கை நேரப் பரவல் (Waiting time Distribution)

ஒரு வகையானது, சேவைக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்படும் முன்னதாக, காத்திருக்கை நேரம் W என்று கொள்க.

$(W < \omega < W+dW)$ எண்வாறு $\psi(W)\, dW$ என்பது நிகழ்ச்சி ஒன்றிற்கான நிகழ் தகவு என்றால்,

W-ன் பரவலானது

$P(W=O) = 1-\rho$

$$P_r[W < \omega < W+dw] = \lambda P_0\, e^{-(\mu-\lambda)W} dw$$

$$= (1-\rho)e^{-(\mu-\lambda)w} dw,$$

$w > 0$ எனில்

$$= \psi(W)\, dw \quad \dots (10)$$

இங்கு W-ன் பரவலின் ஒரு பகுதி தொடர்ச்சியற்றது ($\omega = 0$-ல்), மீதிப்பகுதி ($\omega > 0$) தொடர்ச்சியானது என்று அறியவும்.

மேலும் ($\omega>0$) என்பது ஒரு நிச்சயமான நிகழ்ச்சியல்லாததால், $\int_0^\infty \psi(\omega)\, dw = \rho$ என்றும் கவனிக்கவும்.

ஒரு நபர் காத்திருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனையின்படி காத்திருக்கை நேரத்துக்கான நிபந்தனைப் பரவலானது.

$$= \psi(w/w>0)dw$$

$$= \frac{\rho\,(\mu-\lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)w}\, dw}{\int_0^\infty \psi(w)dw} = \frac{\rho(\mu-\lambda)_e{}^{-(\lambda-\mu)w}\, dw}{\rho}$$

$$= (\mu-\lambda)\ {}_e{}^{-(\mu-\lambda)w}\, dw \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (11)$$

இங்கு $\int_0^\infty \psi(w/w > 0)dw = 1$ என்று கவனிக்கவும்.

எந்த ஒரு நபரும் அமைப்பில் இருக்கும் மொத்த நேரத்தை ν என்று குறிப்போம். அதன் பரவலை, கீழ்க்கண்ட ஓர் அடர்த்திச் சார்பலன் மூலமாக எழுதலாம்.

$$\theta\,(V)\, dv = \text{Prob}\,[V \geqslant v \geqslant V + dv]$$

$$= (\mu-\lambda)_e{}^{-(\mu-\lambda)V}{}_{dv} \qquad \ldots \quad (12)$$

மாதிரி : ஓர் அஞ்சலகத்திலுள்ள பொதுத் தொலை பேசிச் சாவடியில் (telephone booth) வருகை பாய்சான் முறையில் சராசரி இடைவருகை நேரம் 10 நிமிடங்கள் என்றவாறு உள்ளன ஒரு தொலைபேசி அழைப்பின் (call) நேரம் சராசரி 3 நிமிடங்களுடன் எதிர்மறை அடுக்குக் குறிப்பரவலில் அமைந்து இருப்பதாகக் கொள்வோம்; என்றால்

(a) புதிதாக வருபவர் தொலைபேசிக்காகக் காத்திருக்க வேண்டாது நிகழ் தகவு யாது ?

இடைவருகை நேரத்துக்கும், வருகைவிதத்துக்கும் இடையே யுள்ள தலை கீழ்த் தொடர்பைக் கவனிக்கவும்.

எனவே $\lambda = \frac{1}{10}$ நிமிடம் ஒன்றுக்கு $= 0.1$ நிமிடம் ஒன்றுக்கு.
இதேபோல, $\mu = \frac{1}{3} = 0.33$ நிமிடம் ஒன்றுக்கு.

புதிதாக வருபவர் காத்திருக்க வேண்டாத நிகழ் தகவு } = அமைப்பில் ஒருவரும் இல்லை என்ற தற்கான நிகழ் தகவு.

$$= P_0 = 1 - \rho$$
$$= 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0.10}{0.33}$$
$$= 0{\cdot}7$$

எனவே, மொத்த வருகைகளில் 70% சதவிதத்தினர் காத்திருக்காமலேயே தொலைபேசியை உபயோகிக்க முடியும்.

(b) சராசரி முறை வரிசைக்கான நீளம் என்ன ?

சராசரி முறை வரிசைக்கான

$$\text{நீளம்} = L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$
$$= \frac{(0{\cdot}1)^2}{0{\cdot}33\,(0{\cdot}33-0{\cdot}1)}$$
$$= 0{\cdot}16$$

(c) ஒவ்வொரு நேரத்திலும் உண்டாகும் முறை வரிசைகளின் நீளம் என்ன?

ஒவ்வொரு நேரத்திலும் உண்டாகும் சராசரி முறை வரிசையின் நீளம் = காலியாயில்லாத முறை வரிசையின் சராசரி முறை வரிசை நீளம் $= L_{nq} = \frac{\mu}{\mu-\lambda} = \frac{0{\cdot}33-0{\cdot}1}{0{\cdot}33} = 1{\cdot}43.$

(d) ஒரு வருகை குறைந்த பட்சம் 3 நிமிடங்களாவது காத்திருக்க வேண்டும் என்று எதிர்பார்க்கப்படும் பொழுது இந்த தொலைபேசி, இணைப்பகம் இரண்டாவது சாவடியை நிறுவுகிறது. (ஏற்படுத்துகிறது). இரண்டாவது சாவடியின் அவசியத்தை வலியுறுத்துவதற்கு, வருகைகளின் தொடர் ஓட்டம் (flow of arrivals) எந்த அளவில் அதிகரிக்கவேண்டும்?

தற்போதைய காத்திருக்கை நேரம்

$$= W\theta = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{0.1}{00.33\,(0.33-.1)}$$

$$= 1\cdot3 \text{ நிமிடங்கள்}$$

இதேபோல $\mu = 0.33$, க்கு, $W_q = 3$ என்று கிடைக்கக் கூடிய λ மதிப்பைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து கணிக்க முடியும்.

$$3 = \frac{\overline{\lambda}}{0.33\ (0\cdot33 - \lambda)}$$

இதிலிருந்து $\lambda = 0.16$ வருகைகள் நிமிடம் ஒன்றுக்கு என்று தெரியவருகின்றது. எனவே இரண்டாவது சாவடி அமைப்பதற்கு நிமிடம் ஒன்றுக்கு $0\cdot16$ என்ற மிகச்சிறிய வருகையாவது இருக்க வேண்டும்.

(e) தொலைபேசி ஒரு சேவைக்கு தயாராவதற்கு முன்னர் ஒரு வருகை 10 நிமிடங்களுக்கு மேல் காத்திருக்க வேண்டியதன், நிகழ் தகவு என்ன ?

$$P_n \text{ [காத்திருக்கை நேரம் } > 10] \int_{10}^{\infty} \lambda(1-\rho)\ e^{-(\mu-\lambda)w} dw$$

$$= 0.07 \int_{10}^{\infty} e^{-0.23\,w} dw = 0.03.$$

அதாவது சராசரியாக வருகைகளில் சுமார் 3 சதவீத வருகைகள், தொலைபேசியை உபயோகிப்பதற்கு முன்னர் 10 நிமிடங்களோ, அல்லது அதற்கும் மேலோ காத்திருக்க வேண்டும்.

(f) ஒரு நபர் தொலைபேசிக்காக காத்திருப்பதற்கும் பேசி முடிக்கும் வரைக்குமான மொத்த நேரம் 10 நிமிடங்களுக்கு மேல் இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு என்ன ?

P_n [அமைப்பில் மொத்த நேரம் > 10]

$$= \int_{10}^{\infty} (\mu-\lambda)\ e^{-(\mu-\lambda)v} dv$$

$$= e^{10\,(\lambda-\mu)}$$

$$= e^{-2\cdot3} = 0\cdot10.$$

எனவே, சராசரியாக மொத்த நபர்களில் 10 சதவீதத்தினர் அமைப்பில் காத்திருப்பதற்கோ அல்லது தொலைபேசியிலோ 10 நிமிடங்களுக்குமேல் செலவழிக்கின்றனர்.

(g) தொலைபேசி உபயோகத்தில் இருக்கின்ற ஒரு நாளின் பின்னத்தை மதிப்பீடு செய்?

தொலைபேசி சுறுசுறுப்பாய் இயங்குவதற்கான நிகழ்தகவு } = அமைப்பில் குறைந்தது ஒருவராவது இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 1 - P_0 = 1 - (1 - \rho)$$

$$= \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{\cdot}8.$$

எனவே, தொலைபேசி இயங்கும் ஒரு நாளை பின்னம்

$$= 0{\cdot}8 \text{ ஆகும்.}$$

M/M/C முறை வரிசை உருப்படிவம் (M/M/C Queueing model)

வாடிக்கையாளர்கள் λ வீதத்தில் பாய்சான் முறையில் ஒரு தனி முறை வரிசையில் (single queue) வருகை தந்து "முதல் வருகைக்கு முதல் சேவை" என்ற அடிப்படையில் சேவை செய்யப்படுகின்றனர்; பணியகங்கள் C எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டதாய், ஒவ்வொரு பணியகமும் μ வீதத்தில் அதே பாய்சான் முறையில் சேவையினைச் செய்து வருகின்றதான ஒரு முறை வரிசை உருப்படிவத்தை M/M/C உருப்படிவம் என்று கூறலாம்.

முன்னர் குறிப்பிட்ட இரண்டு அனுமானங்களும் இங்குப் பொருந்தும். இந்த அமைப்பில்,

சராசரி வருகை வீதம் $= \lambda$

சராசரி சேவை வீதம் $= C\mu$

இங்குப் போக்குவரவு நடமாட்ட உச்ச அளவு அல்லது நெருக்கடி $= \rho = \dfrac{\lambda}{C\mu}$ ஆகும்.

இதை "அமைப்பின் பயன்பாடு காரணி" (utilisation factor) என்றும் வழங்கலாம்.

$\rho > 1$ என்றுருக்கும்போது, முறை வரிசை செயலிழந்து விடுகிறது. அதாவது கட்டுக்கடங்காமல் குலைந்துவிடுகிறது.

ஆதலால், $\rho < 1$ என்னும்போது சீர் நிலையான தருணங்களைக் கவனிப்போம்.

சீர்நிலையான நிகழ் தகவுகள் (Steady State Probabilities)

$t > 0$ என்ற நேரத்தில் அமைப்பில் காணப்படும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையை $Q(t)$ எனக் குறிப்போம். இடைக்காலத்திற்குரிய நிகழ் தகவுகளை $P_{ij}(t)$ எனக் குறித்தால்,

$P_{ij}(t) = \text{Prob}\,[Q(t) = j/Q(0) = i],\ t > 0$ ஆகும்.

இங்கு c பணியகங்கள் இருக்கின்றன.

$\therefore$ அமைப்பில் i நபர்கள் இருப்பின், சேவை வீதமானது

$= i\mu,\ 0 \leqslant i \leqslant c$ என்ற நிலையில்

$= c\mu,\ i > c$ என்ற நிலையில்

என்று ஆகும்.

அமைப்பில் i நபர்கள் இருக்கும்போது சேவை வீதம் $= \mu_i$ என்று எழுதுகிறோம்.

எனவே, $\mu_i = i\mu,\ \ 0 < i < c$ என்றால்,

$= c\mu,\ \ i > c$ என்றால்.

இப்போது $(t, t+\Delta t)$ என்பது ஒரு சிறிய கால இடைவெளியாக இருக்கட்டும். $O(\Delta t)$-ன் மதிப்பு பூஜ்யமாகும் அளவில் Δt-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாக இருக்கும் $M/M/1$ படிவத்தில் கண்டது போலவே, இங்கும்

$P_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda\,\Delta t,$

$P_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_1\,\Delta t$

$P_{i,i}(\Delta t) = 1 - (\lambda + \mu_i)\,\Delta t$ எனவும்,

மற்ற எல்லா (i,j) சேர்க்கைகளும் $P_{ij}\ (\Delta t) = 0$ என்றும் காண்கிறோம்.

$$\therefore\ P_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)\,P_{kj}(\Delta t),\quad (i,j > 0)$$ என்ற

தொடர்பைப் பயன்படுத்தி, நாம் கீழ்கண்டவற்றை அடைகிறோம் அதாவது, $j=0$ எனும்போது

$$P_{i_0}(t+\Delta t) = P_{i_0}(t)[1-\lambda\Delta t] + P_{i1}(t)\mu\Delta t$$

$j>0$ என்ருல் $P_{ij}(t+\Delta t)=P_{ij}(t)\,[1-\lambda\Delta t-\mu_j\Delta t] + P_{i,j-1}(t)\,\lambda\Delta t+P_{ij+1}(t)\,\mu_{j+1}\Delta t$

அல்லது,

$$\frac{P_{i_0}(t+\Delta t)-P_{i_0}(t)}{\Delta t} = -\lambda P_{i_0}(t)+\mu P_{ij}(t),\ j=0 \text{ என்ருல்.}$$

மேலும்,

$$\frac{P_{ij}(t+\Delta t)-P_{ij}(t)}{\Delta t} = -(\lambda+\mu_j)P_{ij}(t)+\lambda P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t),\ j>0 \text{ என்ருல்}$$

இப்போது $\Delta t \to 0$ என்ருல்,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP_{i_0}(t)}{dt} = -\lambda P_{i_0}(t)+\mu P_{i1}(t)\ j=0 \text{ என்ருல்} \\ &j>0 \text{ என்ருல்,} \\ &\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda+\mu_i)P_{ij}(t)+\lambda P_{i,j-1}(t) \\ &\qquad + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

இதையே இன்னும் விளக்கமாக எழுதினுல், கீழ்க்கண்டவாறு கிடைக்கிறது:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP_{i_0}(t)}{dt} = -\lambda P_{i_0}(t)\,\mu P_{i1}(t) \\ &0<j<c-1 \text{ என்ருல்,} \\ &\frac{dP_{ij}(t)}{b^x} = -(\lambda+j\mu)P_{ij}(t)+\lambda P_{i,j-1}(t) \\ &\qquad + (j+1)\mu.\,P_{i,j+1}(t) \\ &j>c \text{ என்ருல்,} \\ &\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda+c\mu)P_{ij}(t)+P_{i,j-1}(t) \\ &\qquad + c\mu.P_{i,j+1}(t) \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

சீர்நிலை நிகழ் தகவுகளை, $j \geqslant 0$ என்ற மதிப்புகளுக்கு $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ij}(t) = u_j$ என்று கண்டறிகிருேம்.

இங்கு முறை வரிசையின் ஆரம்ப நிலையைச் சேர்ந்த i கீழ்க் குறியை நீக்கிவிட்டு நிகழ் தகவுகளை u_j என்று குறிக்கின்ருேம். இந்த u_j-க்கள் முறை வரிசையின் ஆரம்ப நிலையினின்றும்

தற்சார்பற்றவை என்ற அனுமானத்தில் எழுதப்படுகின்றன. எனவே, எந்த ஒரு கால வரம்பிலும், அமைப்பில் j நபர்கள் இருப்பதற்கான நிகழ் தகவை u_j குறிக்கிறது. சீர்நிலை நிகழ் தகவுகள், நேரத்தைச் சாராமல் இருக்கவேண்டுமாதலால், (2)சமன்பாடுகளில் வகைக்கெழுவைப் பூஜ்யமாக்கி P_{ij}ஐ u_jஆல் குறிப்பிட்டு, கீழ்க்கண்ட அமைப்புச் சமன்பாடுகளை, சீர்நிலை நிகழ் தகவுகளில், அடைகின்றோம்.

$$\left.\begin{array}{l} \mu u_1 = \lambda u_0 \\ 0 < j < e-1 \text{ எனில்,} \\ (j+1)\,\mu.u_{j+1} - (\lambda + j\mu)\,u_j + \lambda\, u_{j-1} = 0 \\ j > 0 \text{ என்றால்,} \\ c\mu.\,u_{j+1} - (\lambda + c\mu)\,u_j + \lambda u_{j-1} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

இப்போது (3)ஆவது அமைப்புச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காண்போம்.

$$u_1 = \frac{\lambda}{\mu}\, u_0 .$$

$j = 1$-க்கு $2\,\mu u_2 - (\lambda + \mu) u_1 + \lambda u_0 = 0$

u_1ஐ u_0 மூலம் எழுதி, u_2-க்குத் தீர்வு கண்டால்

$$u_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 u_0 \text{ என்று காண்கிறோம்.}$$

$j = 2$ என்றால், $3\mu.u_3 - (\lambda + 2\mu)\,u_2 + \lambda u_1 = 0$

மறுபடியும் u_2, u_1ஐ u_0 மூலம் எழுதி u_3-க்குத் தீர்வு கண்டால்

$$u_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 u_0 \text{ என்று காண்கிறோம்.}$$

இதேபோல (3) சமன்பாடுகளில் $j = c - 1$ வரையான மதிப்புகளுக்கு u_j-க்களின் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

$$u_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j u_0; \quad (j < c \text{ மதிப்புகளுக்கு})$$

$j = c$-க்கும் (3) சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தினால் கிடைப்பது,

$$c\,\mu\, u_{c+1} - (\lambda + c\mu) + \lambda\, u_{c-1} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இப்போது $u_c, u_{c-1}, \ldots$ மதிப்புகளை u_0 மூலமாக எழுதினால்

$$c\mu\, u_{c+1} = (\lambda + c\mu)\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c u_0 - \lambda\frac{1}{(c-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}_{u_0}$$

$$\therefore\ u_{c+1} = \left(\frac{\lambda}{c\mu} + 1\right)\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c u_0$$

$$- \frac{\lambda}{c\mu}\frac{1}{(c-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1} u_0$$

$$= \frac{1}{c.c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} u_0 + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c u_0$$

$$- \frac{1}{c(c-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c u_0$$

$$= \frac{1}{c.c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} u_0$$

இதே முறையில் சென்று $j \geq c + 1$-க்கு (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$u_j = \frac{1}{c^{j-c}.c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j u_0, \quad j \geq c + 2\text{-க்கு}$$

எனவே, எல்லா u_j-க்களுக்கும் u_0 மூலமாகக் கீழ்க்கண்டவாறு சமன்பாடு காண்போம் :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq j \leq c \text{ என்றால் } u_j = \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j u_0 \\[2ex] j \geq c + 1 \text{ என்றால் } u_j = \dfrac{1}{c^{j-c}\, c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j u_0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

எனவே, u_0ஐத் தீர்மானித்த கையுடன் (3) அமைப்புச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டுவிடலாம்.

அமைப்பில் ஒருவரும் இல்லை, அமைப்பில் ஒரு நபர் இருக்கிறார், அமைப்பில் 2 பேர் இருக்கின்றனர் ...... என்ற நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதேனும் ஒன்று நிச்சயமாக நிகழ்கிறது என்று நாம் அறிவதால்,

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j = 1 \text{ என்றாகிறது.}$$

$$\therefore \quad \sum_{j=0}^{c-1} \frac{1}{j\,!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j u_0 + \sum_{j=c}^{\infty} \frac{1}{c^{j-c}c\,!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j u_0 = 1 \ldots \quad (5)$$

ஆனால்,

$$\sum_{j=c}^{\infty} \frac{1}{c^{j-c}.\, c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j u_0 = u_0 \frac{c^c}{c!} \sum_{j=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j$$

$$= u_0 \frac{c^c}{c!} \sum_{j=c}^{\infty} \rho^j$$

$$= u_0 \frac{c^c}{c!} \rho^c \sum_{j=c}^{\infty} \rho^{j-c}$$

$$= u_0 \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^c \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j$$

$$= u_0 \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1-\rho)^{-1}$$

எனவே, (5)-லிருந்து நாம் அடைவது:

$$u_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1-\rho)^{-1}\right] \ldots \quad (5a)$$

ஆகும்.

முக்கியப் பண்புகள் (Important Properties)

அமைப்பில் உள்ள சராசரி எண்ணிக்கை

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, u_n.$$

$$\sum_{n=0}^{c} n\, \frac{u_0}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sum_{n=c+1}^{\infty} \frac{u_0}{c!\, c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} u_0 \sum_{n=0}^{c} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} + \frac{u_0}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c$$

$$\sum_{n=c+1}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c}$$

$$= c\rho\, u_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{u_0}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{n=1}^{\infty} (c+n).\, \rho^n$$

$$= c\rho\, u_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{u_0}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c$$

$$\left[\frac{c\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\right]$$

$$= c\rho\, u_0 \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1-\rho)^{-1}\right]$$

$$+ \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \frac{u_0}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c$$

$$= c\rho + \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\, uc \qquad \ldots (6)$$

சராசரி முறை வரிசை நீளம் (Average Queue Length)

$n \geqslant 0$ என்றால், முறை வரிசையில் u நபர்களுக்கான நிகழ்தகவை V_n என்று குறித்தால்,

$$V_0 = P_r\{L_q = 0\} = P_r[L < c]$$

$$= u_0 \sum_{n=0}^{c} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$n > 1$ என்றால், $V_n = P_r[L_q = n] = P_r[L = n + c]$

$$= \frac{u_0}{c^n c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+n}$$

இவ்வாறு முறைவரிசை நீளத்தின் பரவலை நாம் கண்டோம்

இப்போது $L_q = \sum_{n=0}^{\infty} n V_n$

$$= \frac{u_0}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n$$

$$= \frac{\rho}{(1-\rho)^2} u_c \quad \text{இங்கு } \rho = \frac{\lambda}{c\mu} \quad \ldots \quad (7)$$

$M/M/1$ உருவப்படிவத்தை விளக்குகையில், $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$ என்று கண்டோம். எனவே

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{u_c}{c\mu\,(1-\rho)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

$$\therefore \quad W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{U_c}{c\mu\,(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu} \quad \ldots \quad (9)$$

காத்திருக்கை நேரப் பரவல் (Waiting time Distribution)

முறைவரிசையில் காத்திருக்கை நேரப் பரவல், மூலத்தில் (at origin) ஒரு தொடர்ச்சியற்ற நிகழ் தகவையும், $0 < W < \infty$ என்ற வீச்சில் (range) ஒரு தொடர்ச்சியான அடர்த்திச் சார் பலனையும் கொண்டிருக்கிறது.

$$P_r\{W = 0\} = P_r\{L < c\}$$

$$= 1 - P_r\{L \geq c\}$$

$$= 1 - u_0 \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \cdot (1+\rho)^{-1}$$

$$\psi(W)\,dW = P_r\{W < W < W + dW\}$$

$$= c\mu \,.\, u_c\, e^{-W(c\mu-\lambda)}\, dW, \quad \ldots \quad (10)$$

$$(0 < W < \infty)$$

ஒரு வருகை காத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P_r\,[L \geq C]$$

$$= u_0 \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1-\rho)^{-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

என்று இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

மாதிரி

ஓர் எண்ணெய்க் கம்பெனி, ஒரு நெடுஞ்சாலையில் (பணியகம்) சேவை நிலையம் ஒன்றை நிறுவுகிறது. போக்குவரவு நடமாட்ட ஆய்வின் மூலம் வாடிக்கையாளர் வருகையானது நாள் பூராவும், தோராயமாகப் பாய்சான் பரவலைச் சார்ந்தவாறு, மணி ஒன்றுக்கு சராசரி 30 (தான் இயங்கி) வாகனங்கள், அல்லது ஊர்திகள் வருகையைக் கொண்டதாக இருக்கிறது. சேவை நேரமானது தோராயமாக ஓர் எதிர் மறை அடுக்குக் குறிப்பரவலைச் சார்ந்த வாறு, ஓர் எண்ணெக் குழாய் மணி ஒன்றுக்குச் சராசரியாக 10 ஊர்திகளைச் சேவை செய்கிறது என்று முந்தைய விபரம் தெரிவிக்கிறது.

(a) 4 எண்ணெக் குழாய்களை நிறுவினால், ஒரு வருகையானது முறை வரிசையில் காத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

இங்கு $\lambda = 30;\quad \mu = 10;\quad c = 4.$

எனவே $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{30}{4\times 10} = \frac{3}{4}$

எனவே (5a)-லிருந்து,

$$u_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1-\rho)^{-1}\right]^{-1}$$

$$= 0\left[\sum_{j=0}^{3} \frac{1}{j!}(3)^j + \frac{1}{4!}(3)^4\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$= 0{\cdot}0377.$$

(11)-லிருந்து, ஒரு வருகை, காத்திருக்க வேண்டியதன் நிகழ்தகவு

$$= u_0 \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1-\rho)^{-1}$$

$$= 0{\cdot}0377 \times \frac{1}{4!}(3)^4\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$$= 0{\cdot}50895.$$

எனவே, வருகைகளில் 51% சேவைக்காகக் காத்திருக்க வேண்டியுள்ளனர். அதாவது, தோராயமாக 49% வருகைகள் காத்திருக்க வேண்டிய அவசியமில்லாமல் சேவை செய்யப் படுகின்றனர்.

(b) 4 குழாய்கள் நிறுவப்பட்டால், *சராசரி காத்திருக்கை நேரம், அமைப்பில் கழித்த சராசரி நேரம், அமைப்பில் உள்ள ஊர்திகளின் சராசரி எண்ணிக்கை இவற்றைக் கண்டுபிடி.

சராசரி காத்திருக்கை நேரம் $= W_q$

$$= \frac{1}{c\,!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c u_0 \; \frac{1}{c\mu(1-\rho)_2}$$

$= 0{\cdot}0509$ மணிகள்

$= 3{\cdot}05$ நிமிடங்கள்

அமைப்பில் கழித்த சராசரி நேரம்

$$= W = W_q + \frac{1}{\lambda}$$

$= 3{\cdot}05 + 6 = 9{\cdot}05$ நிமுடங்கள்

[இங்கு $\mu = 10$ மணி ஒன்றுக்கு

$= 1$ ஒவ்வொரு $\frac{1}{10}$ மணிக்கும்

$= 1$ ஒவ்வொரு $0{\cdot}1$ மணிக்கும் $= 6$ நிமிடங்கள்]

அமைப்பில் உள்ள ஊர்திகளின் சராசரி எண்ணிக்கை

$$= L = c\rho + \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\,\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \cdot u_0$$

$= 4{\cdot}53$ ஊர்திகள்

(c) $c = 4$ என்னும்போது, ஓர் எண்ணெய்க் குழாய்

சராசரியாக எத்தனை சதவீத நேரத்துக்குச் செயலற்று இருக்கும்?

செயலற்ற குழாய்களின் எண்ணிக்கை: 4 3 2 1 0

அதற்கு ஏற்ற நிகழ்தகவு : $u_0 = 0{\cdot}0377$ $u_1 = 0{\cdot}1131$ $u_2 = 0{\cdot}1697$ $u_3 = 0{\cdot}1697$ $u_4 = 0{\cdot}1272$

∴ எந்தக் கால வரம்பிலும் (at any instant of time) செயலற்ற குழாய்களின் சராசரி எண்ணிக்கை

$$= 4u_0 + 3u_1 + 2u_2 + 1u_3 + 0u_4$$
$$= 0{\cdot}9992$$

எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஏதாவது ஒரு குழாய் செயலாற்றுமல் இருப்பதன் நிகழ்தகவு $= \frac{0{\cdot}9992}{4}$

$$= 0{\cdot}2498$$

மொத்த நேரத்தில் 24·98 சதவீதம் சராசரியாக ஏதாவது எண்ணெய்க் குழாய் செயலாற்றுமல் இருக்கும்.

மாதிரி

தொழிற்படும் பொருளைக் கொண்டு செல்லும் கருவியானது ஒவ்வொரு முறை மாற்றத்திற்கும் (shift), 3 தடவைகள் விகமாய் பெரிதும் பழுதடைகிறது. பழுதைச் சரிபார்க்கும் எண்ணிக்கை ஒவ்வொரு முறை மாற்றத்துக்கும் 2 வீதம் ஆகும். பழுது பார்க்கும் பணியாள்கள் இருவர் அங்கு உள்ளனர் என்றால்,

(i) அக் கருவி பழுதடைந்த சமயத்தில், பணியாள்களுக்காகக் காத்திருக்க வேண்டாததற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ii) பழுதடைந்து சரிபார்ப்பதற்காக முறை வரிசையில் காத்திருக்கும் நிலைகுலைவுகளின் (breakdown) சராசரி எண்ணிக்கை என்ன?

(iii) அமைப்பில் காணப்படும் நிலைகுலைவுகளின் சராசரி எண்ணைக் காண்க.

(iv) ஒரு நிலைகுலைவுக்கான சராசரி காத்திருக்கை நேரங்களைக் கணக்கிடு?

(v) ஒரு நிலைகுலைவால் அமைப்பில் செலவான சராசரி நேரம் என்ன ?

தீர்வு :

இங்கு $\lambda = 3;\quad \mu = 2;\quad c = 2.\quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{3}{4}$

$$\text{(i)} \quad u_0 = \left[\frac{1}{0!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)' + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 (1-\rho)^{-1} \right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{9}{4}\ 4 \right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{2+3+9}{2} \right]^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{7}\right) = 0{\cdot}1429.$$

இந்த u_0-ஐக் கொண்டு பணியாள்களுக்காகக் காத்திருக்க வேண்டிய நிகழ்தகவு $= u_0 \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1-\rho)^{-1}$

$$= 0{\cdot}1429 \times \frac{1}{2}\frac{9}{4}4 = \mathbf{0{\cdot}6435}.$$

எனவே, பணியாள்களுக்குகாகக் காத்திருக்க வேண்டாத நிகழ்தகவு $=$ **0·3565** ஆகும். ... ... (i)

(ii) முறை வரிசையில் காத்திருக்கும் நிலைகுலைவுகளின் சராசரி எண்

$$= L_q = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} u_c$$

$$= \frac{R}{(1-\rho)^2} \frac{1}{c\,!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c u_0$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 0{\cdot}1429$$

$$= \frac{3}{4}\,16\,\frac{1}{2}\,\frac{9}{4} \times 0{\cdot}1429$$

$$= 1{\cdot}92915 \simeq 1{\cdot}93 \qquad \text{... (ii)}$$

அதாவது, முறை வரிசையில் சராசரியாக $1{\cdot}93$ நிலைகுலைவுகள் இருக்கும்.

(iii) அமைப்பில் உள்ள (காத்துள்ள) நிலைகுலைவுகளின் சராசரி எண்

$$= L = L^q + c.\rho.$$

$$= 1{\cdot}92915 + 2.\ \frac{3}{4}$$

$$= 3{\cdot}42915 \approx 3{\cdot}43 \qquad \ldots \text{(iii)}$$

∴ சராசரியாக 3·43 நிலைகுலைவுகள் அமைப்பில் உள்ளன.

(iv) ஒரு நிலைகுலைவுக்கான சராசரி காத்திருக்கை நேரங்கள் $= W_q$.

$$W_q = \frac{1}{c\,\mu\,(1-\rho)^2}\, u_c \text{ முறை மாற்றம்}$$

$$= \frac{1}{c\,\mu\,(1-\rho)^2}\,\frac{1}{c\,!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c u_0$$

$$= \frac{1}{4}\,(16)\,\frac{1}{2!}\,\left(\frac{8}{2}\right)^2 \times 0{\cdot}1429 \text{ முறை மாற்றங்கள்.}$$

$$= 0{\cdot}6435 \text{ முறை மாற்றங்கள்.}$$

ஒரு முறை மாற்றம் = 8 மணிகளானதால்,

$$W_q = 0{\cdot}6435 \times 8 = 5{\cdot}1480 \text{ மணிகள்} \qquad \ldots \text{(iv)}$$

(v) ஓர் அமைப்பில் நிலைகுலைவால் செலவான சராசரி நேரம்

$$= W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

μ = ஒவ்வொரு மாற்றத்துக்கும் 2 என்பதால்,

μ = 1 ஒவ்வொரு 4 மணிகளுக்கும்

$= \frac{1}{4}$ ஒவ்வொரு மணிக்கும்

$$\therefore \quad \frac{1}{\mu} = 4 \text{ ஒவ்வொரு மணிக்கும் வருகின்றது.} \quad \ldots \quad (v)$$

எனவே, $W = 5 \cdot 1480 + 4 \cdot 0000 = 9 \cdot 1480$ மணிகள் ஆகின்றன.

∴ ஒரு நிலைகுலைவால் அமைப்பில் சராசரியாக 9.148 மணிகள் செலவாகின்றன.

எர்லாங்கின் சேவை நேரப் பரவல்
(Enlangian Service time distribution)

M/Ek/1 உருப் படிவம்

இந்த முறைவரிசை அமைப்பிலும், வாடிக்கையாளர்கள் λ வீதத்தில் பாய்சான் முறையில் வருகின்றனர். அவர்கள் ஒரு தனி முறைவரிசையில் வருகின்றனர்; 'முதல்வருகைக்கு முதல் சேவை'' என்ற அடிப்படையில் சேவை செய்யப்படுகின்றனர், ஆனால் சேவை நேரப்பரவல். E_k என்று குறிக்கப்பட்டவாறு, ஓர் எர்லாங்கின் பரவலைத் தழுவுகிறது.

இதன் அடர்த்திச் சார்பலன்

$$g\,(t,k)\,dt = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!}\,t^{k-1} \quad e^{-k\mu t}\,dt, \; 0<t<\infty\text{-க்கு}$$

எனவே, சராசரி மொத்த சேவை நேரம் $= \dfrac{1}{\mu}$

இங்கு ஒரே ஒரு சேவை நிலையம் உள்ளது. முன்னர் குறித்த இரு அனுமானங்களும் இத்தருணத்துக்கும் பொருந்தும்.

இந்த அமைப்பில் சேவையைப் பொறுத்த வரை, வருகை தரும் ஒவ்வொரு வாடிக்கையாளரும் சேவை நிலையத்தில் சேவையின் k அடுத்தடுத்த படிநிலைகளை விரும்பி ஏற்கும் ஒருநபராகக் கருதப்படுகின்றனர். [அதாவது ஒரே சேவை நிலையத்தில் ஒரே நபருக்கு k சேவைகள் பூர்த்தி செய்யப்படுகின்றன]. இந்த k சேவை நிலைகளுக்கான நேரங்கள் ஒன்றுக்கொன்று தற் சார்பற்றவையான ராண்டம் மாறிகள்; அவை கீழே குறிப்பிட்ட எதிர் மறை அடுக்குக்குறிப்பரவலில் அமைகின்றன.

$$k\mu .\, e^{-k\mu t}\,dt, \; (0<t<\infty).$$

எந்த ஒரு சேவை நிலைக்குமான சராசரி சேவை நேரம்

$$= \frac{1}{k\mu} \text{ ஆகும்.}$$

$$\because \; E\,(t) = \frac{\Gamma\,(2)}{(k\;\mu)^2}\;(k\mu) = \frac{1}{k\mu}$$

ஒரு நபரின் k ஆவது சேவை நிலை பூர்த்தியாகும்போது அவரது சேவை பூர்த்தியாகிறது.

இங்கு $k\mu$ சுட்டுறுப்புடன் அடுக்குக்குறிப் பரவலைச் சார்ந்து (exponential distribution) அமையும் சார்பற்ற, ஒத்தவாறுள k ராண்டம் மாறிகளின் கூட்டலுக்கான அடர்த்திச் சார்பலன் (அதாவது E_k, என்ற எர்லாங்கியன் பரவலின் அடர்த்திச்சார்பலன் $g(t,k)$ என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

சீர்நிலை நிகழ்தகவுகள் (Steady State Probabilities)

$t>0$ என்றால், அமைப்பில் உள்ள நபர்களின் எண் $Q(t)$ என்று கொள்வோம்.

$t>0$ எனும்போது, அமைப்பில் உள்ள சேவை நிலைகளின் (படிநிலைகளின்) எண்ணை $Q_1(t)$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$[X]$ என்பது Xஐவிடக் குறைவான, மிகப்பெரிய எண் எனக் கொள்வோம் (denote $[X]$ as the greatest integer that is less than X); என்றால்,

$$Q(t) = \left[\frac{\{ Q_1(t)+(k-1) \}}{k} \right] \text{ என்று}$$

$Q(t)$-க்கும் $Q_1(t)$-க்குமான தொடர்பை எழுதுவோம்.

இப்போது $Q_1(t)$ஐப்பற்றி விளக்கமாகப் படிப்போம்.

இடைக்காலத்துக்குரிய நிகழ்தகவுகளாவன:

$t<0$ என்றால், $P_{ij}(t) = P_r\{ Q_1(t) = j \mid Q_1(0) = i \}$

$(t, t+\Delta t)$ என்ற மிகச் சிறிய இடைவெளியினை எடுத்துக் கொள்வோம். $O(\Delta t)$ பூஜ்யமாகும்படியான மிகச் சிறிய அளவாக Δt இருக்கட்டும்.

$M/M/1$ உருப்படிவத்தில் கண்டறிந்ததுபோல, இங்கும் எழுதினால், நமக்குக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்கும் (ஒவ்வொரு வருகையும் நிகழும்போது, k சேவை நிலைகள் வேண்டப்படுகின்றன என்பதை ஞாபகத்தில் வைத்துக்கொள்ளவும்).

$i>0$ என்றால், $P_{i,\,i+k}(\Delta t) = \lambda\Delta t$

$i>1$ என்றால், $P_{i,\,i-1}(\Delta t) = k\mu.\Delta t$

$$P_{00}(\Delta t) = 1\lambda\Delta t$$

$i>1$ என்றால், $P_{i,i}(\Delta t) = 1-(\lambda+k\mu)\Delta t$

$$P_{ij}(\Delta t) = 0$$

மேலே குறிப்பிட்டது அல்லாத மற்ற எல்லா (i, j) சேர்க்கைகளுக்கு.

இப்போது,

$$P_{ij}(t+\triangle t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)\, P_{kj}(\triangle t),$$

$(i, j > 0)$ என்ற தொடர்பினைப் பயன்படுத்தி, நாம் கீழ்க்கண்ட வாறு சமன்பாடுகளை அடைகிறோம்:

$$P_{i_0}(t+\triangle t) = P_{i_0}(t)(1\ \lambda\triangle t) + P_{i1}(t)\cdot k\mu\triangle t$$

$1 < j > k$ என்றால்,

$$P_{ij}(t+\triangle t) = P_{ij}(t)(1-\lambda\triangle t - k\lambda\triangle t) + P_{ij+1}(t)\, k\cdot\mu\triangle t$$

$j > k$ என்றால்,

$$P_{ij}(t+\triangle t) = P_{ij}(t)(1-\lambda\triangle t) + P_{j,\,j-k}(t)\,\lambda\triangle t$$

அல்லது $+ P_{i,j+1}(t)\, k\cdot\mu\triangle t$

$$\frac{P_{i_0}(t+\triangle t) - P_{i_0}(t)}{\triangle t} = -\lambda P_{i_0}(t) + k\mu P_{i1}(t)$$

$1 < j < k$ என்றால்,

$$\frac{P_{ij}(t+\triangle t) - P_{ij}(t)}{\triangle t} = -(\lambda + k\mu) P_{ij}(t) + k\mu P_{i,\,j+1}(t)$$

$j > k$ என்றால்,

$$\frac{P_{ij}(t+\triangle t) - P_{ij}(t)}{\triangle t} = -(\lambda + k\mu) P_{ij}(t)\ \lambda P_{i,\,j-k}(t) + k\mu P_{i,\,j+1}(t)$$

இப்போது $\triangle t \to 0$ என்றால்,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d P_{i_0}(t)}{dt} = -\lambda P_{i_0}(t) + k\mu P_{i1}(t)\\
&1<j<k \text{ என்றால், } \frac{d P_{ij}(t)}{dt} = (\lambda + k\mu) P_{ij}(t)\, k\mu\, P_{ji+1}(t)\\
&j>k \text{ என்றால், } \frac{d P_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) P_{i,\,j-k}(t) + k\mu P_{ij+1}(t)
\end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

எனவே,

$j \geqslant 0$ என்றால், $\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = u_j$ என்றவாறு சீர்நிலை நிகழ்தகவுகளைப் பெறுகின்றோம்.

இந்த நிகழ்தகவுகள் u_j ஆனது ஆரம்ப நிலையிலிருந்து சார்பற்று உள்ளன என்ற அனுமானத்தின்படி, முறை வரிசையின் ஆரம்ப நிலையைக் குறிக்கும் கீழ்க்குறி iஐ இங்கு நீக்கி விடுகிறோம் என்று அறியவும்.

எந்தக் கால வரம்பிலும், (at any point of time) ஒழுங்கு அமைப்பில் j சேவை நிலைகள் இருக்கின்றன என்பதற்கான நிகழ்தகவை u_j குறிக்கிறது. சீர் நிலை நிகழ்தகவுகள் நேரத்தைச் சாராமல் இருக்க வேண்டுமாதலால், (1) சமன்பாடுகளில் வகைக்கெழுக்களைப் பூஜ்யமாக்கியும், $P_{ij}(t)$ஐ u_j என்று மாற்றி எழுதியும் கீழ்க்கண்ட அமைப்புச் சமன்பாடுகளை சீர்நிலை நிகழ்தகவுகள் மூலமாக அடையலாம்.

$$\left.\begin{aligned} k\mu\, u_1 &= \lambda u_0 \\ 1 < j < k;\; k\mu\, u_{j+1} &= (\lambda + k\mu)\, u_j \\ j \geqslant k;\; k\mu . u_{j+1} &= (\lambda + k\mu)\, u_j - \lambda u_{j-k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

இந்த (2) அமைப்புச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்பதை இங்கு விளக்கப்படவில்லை. எனினும், இந்த ஓர் ஒழுங்கு அமைப்பு முறை வரிசைக்கான முக்கிய குணப்பண்புகளை மட்டும் கீழே காணபோம்.

சேவை நிலைகளுக்கான (phases) போக்குவரவு நடமாட்டச்ச அளவு அல்லது நெருக்கடி $= \rho = \dfrac{\lambda}{k\mu}$

$$\left.\begin{matrix}\text{அமைப்பில் ஒரு நபரும் இல்லாதற்கான} \\ \text{சீர்நிலை நிகழ்தகவு}\end{matrix}\right\} = u_0 = 1 - k\rho$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad \ldots \quad (3)$$

அமைப்பில் உள்ள சேவை நிலைகளின் சராசரி எண்ணிக்கை

$$= L \text{ நிலைகள்} = \frac{k\rho\,(k+1)}{2\,(1 - k\rho)} \quad \ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{matrix}\text{முறை வரிசையில் ஒரு சேவை நிலைக்கான} \\ \text{சராசரி காத்திருக்கை நேரம்}\end{matrix}\right\} = W_q \text{ (நிலைகள்)}$$

$$= \frac{k\rho\,(k+1)}{2\mu(1 - k\rho)} \ldots (5)$$

அமைப்பில் உள்ள நபர்களின் சராசரி எண்ணிக்கை

$$= L = \frac{p\,(K+1)}{2\,(1-Kp)} \quad \ldots \quad (6)$$

சராசரி முறை வரிசை நீளம் $= L_q = \dfrac{(k+1)\,\lambda^2}{2k\mu\,(\mu-\lambda)}$ ... (7)

ஒரு நபரின் சராசரி காத்திருக்கை நேரம்

$$= W_q = \frac{(k+1)\,\lambda}{2k\,\mu\,(\mu-\lambda)} \quad \ldots \quad (8)$$

அமைப்பில் ஒரு வாடிக்கையாளரால் செலவிடப்படும் சராசரி நேரம் $\Big\} = W$

$$= \frac{1}{\mu} + W_q$$

$$= \frac{1}{\mu} + \frac{(k+1)\,\lambda}{2k\,\mu\,(\mu-\lambda} \quad \ldots \quad (9)$$

மாதிரி

ஒரு நாவிதன், (சவரத் தொழிலாளி) சொந்தமாக ஒரு சிகை அழகு நிலையத்தைவைத்து நடத்துகிருர். ஒரு முடிவெட்டலுக்குச் சரியாக 25 நிமிடங்கள் அவருக்கு வேலை ஆகிறது. வாடிக்கையாளர்கள் ஒவ்வொருவரும், பாய்சான் முறைமூல், 35 நிமிடங்கள் சராசரி வீதத்தில் வருகின்றனர்.

(a) நாவிதன் எத்தனை சதவீத நேரம் செயலாற்ருமல் இருப்பார் ?

(b) ஒரு வாடிக்கையாளரின் சராசரி காத்திருக்கை நேரம் யாது ?

தீர்வு

(a) இங்கு $\lambda = \dfrac{60}{35} = 1.7$ ஒவ்வொரு மணிக்கும்

(λ வருகை வீதத்தைக்குறிக்கிறது)

சேவை வீதம் $\mu = \dfrac{60}{25} = 2.4$ ஒவ்வொரு மணிக்கும்

$\therefore\ \dfrac{\lambda}{\mu} = 0{\cdot}71$ ஆகிறது.

சிகை அழகு நிலையத்தில் சேவை செயலற்றுப் போகும் (சீர் நிலையான) நேரம் சதவிதத்தில் காண்பதற்கு u_0 ஐக் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

$$u_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0{\cdot}71 = 0{\cdot}29.$$

எனவே. 29% சதவித நேரங்கள் செயலாற்றுமல் நாவிதன் இருக்கிறர்.

(b) இங்குச் சேவை நேரம் மாறிலியாக உள்ளது என்பதால், $k = \infty$ என்றவாறு, அது எர்லாங்கியன் பரவலில்அமைகிறது.

மேலே குறிப்பிட்ட பண்புகளிலிருந்து (8) ஐக் கொண்டு நாம் W_qஐக் காணலாம்,

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{(k+1)\lambda}{2k\mu(\mu-\lambda)} \\ &= \frac{k\lambda}{2k\mu(\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{2k\mu\,(\mu-\lambda)} \\ &= \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)},\ k \to \infty \text{ என்றுல்}, \\ &= \frac{1{\cdot}7}{2\times 2{\cdot}4(2.4-1{\cdot}7)} \\ &= 0{\cdot}51 \text{ மணிகள்.} \\ &= 31 \text{ நிமிடங்கள்.} \end{aligned}$$

இப்போது கீழ்காணும் முறைவரிசைப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாண முனேவோம்.

பிரச்சினை 1.

ஒரு கப்பல் கம்பெனிக்கு ஒரே ஒரு பாரமிறக்கும் தளம் உள்ளது. கப்பல்கள் தினம் ஒன்றுக்குச் சராசரி 3 விதம் பாய்சான் முறையில் வருகின்றன. பாரம் இறக்கும் n பணியாளர்கள் ஒரு கப்பலுக்குப் பாரமிறக்கும் நேரப்பரவலானது, பாரமிறக்கும் நேரம் $\frac{1}{2n}$ மணிகளைக் கொண்ட ஓர் அடுக்குக்குறிப் பரவலில் அமைந்துள்ளது. நிறைய அளவு கூலியாட்கள் அக் கம்பெனியில் உள்ளனர். அவர்களில் முடிந்த அளவு ஆட்களை ஒவ்வொரு கப்பலுக்கும் சுமை இறக்கும் பணிக்காகக் கம்பெனி அமர்த்துகின்றது. இவர்கள் பணிக்காக நீண்ட நேரம் காத்திருக்காமல் இருப்பதற்காக இவ்வாறு செய்கிறது.

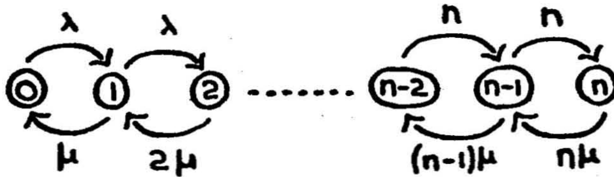
(அ) இந்த நிபந்தனைகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் வேலை செய்யும் சுமை இறக்கும் பணியாள்களின் சராசரி எண்ணிக்கை யாது?

(ஆ) 4 பணியாள்களுக்குமேல் தேவைப்படுகின்ற நிகழ் தகவு என்ன?

தீர்வு

இஃது ஒரு $M/M/1$ பிரச்சினையாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அமைப்பில் (காத்திருப்பவர்களோ அல்லது சுமை இறக்குபவர்களோ) இருக்கும் நபர்கள் n ஆக இருக்கட்டும். கம்பெனியின் நியதியானது, அமைப்பில் n கப்பல்கள் இருந்தால், n கூலியாள்களை நியமிக்க வேண்டியதாகும். அமைப்பில் n கப்பல்கள் இருக்கும்போது, ஒரு கப்பல் சேவைக்குத் தயாராகும் சமயத்தில் சராசரி சேவைக்கான நேரம் தினம் ஒன்றுக்கு $2n$ கப்பல்கள் ஆகும். இச்சராசரி சேவை நேரம் மாறிலியாக இல்லாததால் கீழ்க்கண்ட சீர்நிலைச் சமன்பாடுகளைச் சரியீட்டுப் படம் (balance diagram) மூலம் காண்போம்.

நிலை



$$\lambda P_0 = \mu P_1 \quad \text{அல்லது} \quad P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \qquad \cdots (1)$$

$$(\lambda + \mu) P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$$

(1)-ன் மூலம் $\lambda P_0 = \mu P_1$ என்பதால்,

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0 \qquad \cdots (2)$$

பொதுவாக, $(n-2)$, $(n-1)$, n நிலைகளுக்கு,

$$[\lambda + (n-1)\mu] P_{n-1} = \lambda P_{n-2} + n \cdot \mu \cdot P_n$$

அல்லது $P_n = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n-1}$ ஆகும்.

தொகுத்தறி முறையில் (induction)

$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$ எனக் காணலாம்.

$\because \; P_0 + P_1 + \ldots + P_n = 1$ (அமைப்பு ஏதாவது ஒரு நிலையில் இருக்க வேண்டியதால்),

$$P_0\left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \ldots\right] = 1$$

அதாவது $P_0 \cdot e^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = 1$

$\therefore \; P_0 = e^{-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$

எனவே $n > 0$ எனும்போது, $P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$

(அ) ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், வேலை செய்யும் பணியாட்களின் சராசரி எண் $= E(n)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum n \cdot \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} e^{-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} \sum \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}$$

$= \frac{\lambda}{\mu} = 1{\cdot}5$ ஆட்கள்.

(இங்கு $\lambda = 3$ கப்பல்கள் தினம் ஒன்றுக்கு; $\mu =$ ஒரு பணியாளுடன் ஆன சராசரி சேவை வீதம் $= 2$ கப்பல்கள் தினம் ஒன்றுக்கு)

(ஆ) 4 பணியாட்களுக்கு மேல் தேவையாயிருக்கக்கூடிய நிகழ்தகவு $= P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + \ldots = 1 - \sum_{i=0}^{4} P_i$

$= 0{\cdot}019$ ஆகும்.

ஏனெனில் $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ ஆகும்.

பிரச்சினை 2.

ஒரு வங்கியில் பணம் செலுத்துவதற்கான நுழைவகம் ஒன்றும், பணம் திரும்பப் பெறுவதற்கான நுழைவகமொன்றுமாக இரண்டு நுழைவகங்கள் (counters) உள்ளன. செலுத்தல், பெறுதல் இவை இரண்டிற்குமான சேவை நேரப் பரவல்கள், ஒவ்வொரு வாடிக்கையாளருக்கும் 3 நிமிடங்கள் என்ற சராசரிச் சேவை நேரத்துடன் ஓர் எதிர்மறை அடுக்குக்குறிப் பரவலைக் கொண்டிருக்கின்றன. செலுத்துபவர்கள் நாள் பூராவும், மணிக்கு 16 நபர்கள் வீதம் பாய்சான் முறையில் வருகின்றனர். பணம் திரும்பப் பெறுபவர்களும், பாய்சான் முறையில், மணி ஒன்றுக்கு 14 பேர் வீதம் சராசரி வருகை வீதத்தில் வருகின்றார்கள் என்றால்,

(அ) பணம் செலுத்துபவர்கள், திரும்பப் பெறுபவர்கள் இவர்களின் சராசரி காத்திருக்கை நேரங்களைக் கண்டுபிடி.

(ஆ) ஒவ்வொரு நுழைவகமும் செலுத்துதல், பெறுதல் ஆகிய இரண்டு வேலைகளையும் செய்தால், அதன் விளைவு சாரசரிக் காத்திருக்கை நேரத்தில் எவ்வாறு இருக்கும்?

(இ) சராசரிச் சேவை நேரத்தை 3·5 நிமிடங்களுக்கு (ஆ)-ல் அதிகரித்தால் அதன் விளைவு எப்படி இருக்கும்?

தீர்வு

சராசரிச் சேவை நேரம் 3 நிமிடங்கள் என்றால் மணி ஒன்றுக்கு 20 சேவைகள் என்று அர்த்தமாகிறது.

(அ) பணம் செலுத்துபவர்களுக்கு $\lambda = 16$ / மணிக்கு; $\mu = 20$/மணிக்கு.

பணம் திரும்பப் பெறுபவர்களுக்கு, $\lambda = 14$/மணிக்கு; $\mu = 20$/மணிக்கு.

இங்கு இரண்டு $M/M/1$ முறைவரிசைகள் உள்ளன.

ஒரு $M/M/1$ முறைவரிசைக்கு $E(W) = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.

எனவே, செலுத்துபவர்களுக்கான முறைவரிசைக்கு,

$$E(W) = \frac{16}{20(20-16)} = \frac{1}{5} \text{ மணிகள்} = 12 \text{ நிமிடங்கள்,}$$

செலுத்துபவர்களுக்கு.

பணம் திரும்பப் பெறுபவர்களுக்கான முறைவரிசைக்கு,

$$E(W) = \frac{14}{2(20-14)} = \frac{7}{60} \text{ மணிகள்} = 7 \text{ நிமிடங்கள்,}$$

பெறுபவர்களுக்கு.

(ஆ) செலுத்துபவர், பெறுபவர் இருவர்களுக்கும் ஒரே ஒரு முறைவரிசை, சராசரி வருகை வீதம் $16 + 14 = 30$ மணி ஒன்றுக்கு, என்றவாறு உள்ளது. இங்கு, $\mu = 20$ மணி ஒன்றுக்கு; $C=2$ ஆகிறது.

$\therefore$ இஃது ஒரு $M/M/C$ உருப்படிவத்தில் அமைந்த பிரச்சினையாகும்.

எனவே, $E(W) = \dfrac{E(m)}{\lambda}$.

$$E(m) = \frac{P_0 \lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{[(c-1)!(c\mu-\lambda)^2]}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \cdot \frac{c\mu}{(c\mu-\lambda)}\right]^{-1}$$

என்றவாறு $E(W)$ வரையறுக்கப்படுறது.

இப்போது,

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \cdot \frac{2\mu}{(2\mu-\lambda)}\right]^{-1}$$

$$\lambda = 30, \ \mu = 20, \ \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2}$$

$$= \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{40}{40-30}\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{7}$$

$$E(m) = \frac{\frac{1}{7} \cdot 30 \cdot 20 \left(\frac{3}{2}\right)^2}{[1!\ 10^2]} = \frac{600 \times 9}{4 \times 7 \times 100} = \frac{27}{14}$$

எனவே,

$$E(W) = \frac{27}{14 \times 30} = \frac{9}{140} \text{ மணிகள்} = 3 \cdot 86 \text{ நிமிடங்கள்}$$

ஆகையால் இந்த மாற்றம் செலுத்துபவர்கள், பெறுபவர்கள் இருவர்களின் சராசரிக் காத்திருக்கை நேரத்தை வெகுவாகக் குறைக்கிறது.

(இ) இங்கு $\lambda = 30$ மணிக்கு

$$\mu = \frac{60}{3\frac{1}{2}} = \frac{120}{7} \text{ மணி ஒன்றுக்கு.}$$

மேலும் $c = 2$.

மேற்படி சமன்பாடுகளில் இந்த மதிப்புகளைப் போட்டால், $E(W) = 11 \cdot 4$ நிமிடங்கள் ஆகிறது.

பிரச்சினை 3.

ஒரு காப்புறுதிக் கம்பெனி (Insurance Company) தனது கிளையகத்தில் மூன்று உரிமைப் பங்கினைச் சரிபார்ப்பவர்களைக் (claims adjusters) கொண்டுள்ளது. கம்பெனியின் மேல் உரிமைப் பங்குகளைக் கோருபவர்கள் (claimants) பாய்சான் முறையில், 8 மணி-நாள் ஒன்றுக்கு 20 வீதம் சராசரியாக வருகை தருகின்றனர். உரிமைப் பங்கினைக் கோருபவர்களிடம் சரிபார்ப்பவர் செலவிடும் நேரமானது, சராசரிச் சேவை நேரம் 40 நிமிடங்கள் வீதம் ஓர் எதிர்மறை அடுக்குக்குறிப் பரவலில் அமைகிறது. உரிமைப் பங்குகளைக் கோருபவர்கள் அவர்களின் முறை வரிசைப்படி கவனிக்கப்படுகின்றனர்.

(அ) சரிபார்ப்பவர் (adjuster) உரிமைப் பங்கு கோருபவர்களிடம் ஒரு வாரத்துக்கு எத்தனை மணி நேரம் செலவிட எதிர்பார்க்கவேண்டியுள்ளது?

(ஆ) உரிமைப் பங்கு கோருபவர் கிளையகத்தில் சராசரியாக எவ்வளவு நேரம் செலழிக்கவேண்டியுள்ளது?

தீர்வு

இங்கு, $\lambda = \frac{20}{8} = \frac{2}{5}$ வருகைகள் மணி ஒன்றுக்கு.

$$\mu = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} \text{ சேவைகள் மணி ஒன்றுக்கு.}$$

இது ஒரு $M|M|C$ முறை வரிசைப் படிவமாகும்.

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{c\mu}{(c\mu-\lambda)}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{5}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{3}\right)^3 \frac{\frac{9}{2}}{\frac{4}{2}}\right]^{-1} = \frac{24}{139}.$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{139} = \frac{40}{139}.$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{9} \cdot \frac{24}{139} = \frac{100}{3 \times 139}$$

∴ எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்திலும் செயலாற்றுமலிருக்கும் சரிபார்ப்பவர்களின் எதிர்பார்க்கும் எண்ணிக்கையானது

$$= 3\, P_0 + 2\, P_1 + 1\, P_2 + 0 \cdot P_3$$

$$= 3\left(\frac{24}{139}\right) + 2\left(\frac{40}{139}\right) + 1\left(\frac{100}{3 \times 139}\right)$$

$= \frac{4}{3}$ சரிபார்ப்பவர்கள்.

எனவே, ஏதாவது ஒரு சரிபார்ப்பவர் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் செயலாற்றுமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{\frac{4}{3}}{3} = \frac{4}{9}.$$

(ஏனென்றால், $E(X) = np$; $p = \frac{E(X)}{n}$; இங்கு $n = 3$ ஆகும்.)

∴ சரிபார்ப்பவர் எப்பொழுதும் செயலாற்றுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{9}$ ஆகிறது. $\left(1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}\right)$

5 நாள்கள், தினசரி 8 மணி நேரக் கணக்கில் ஒரு வாரம் 40 மணி நேரங்களைக் கொண்டதாகும்.

எனவே, ஒரு சரிபார்ப்பவர் உரிமைப் பங்கினைக் கோருபவரிடம் செலவிடும் எதிர்பார்க்கும் வாராந்தர நேரம்

$$= \frac{5}{9} \times 40$$

$$= 22 \cdot 2 \text{ மணிகள் ஆகும்.}$$

பிரச்சினை 4.

ஒரு மருத்துவ மனையில் பொதுப் பரிசோதனைக்கு வரும் ஒவ்வொரு நோயாளியையும் சோதனை செய்வதற்கு ஒரு டாக்டர் இருக்கின்றார். பரிசோதனையின் ஒவ்வொரு நிலை (கட்டம்) சோதனைக்குமான நேரம் தோராயமாக அடுக்குக் குறிப் பரவலில் அமைந்த போதிலும், அந்த டாக்டர் ஒவ்வொரு நிலைச் சோதனைக்குமாகச் சராசரி 4 நிமிடங்கள் எடுத்துக் கொள்கின்றார். ஒவ்வொரு நோயாளியும் 4 நிலைகளில் (கட்டங்களில்) பரிசோதிக்கப்படுகிறார் என்றால், டாக்டரின் மருத்துவமனைக்கு நோயாளிகளின் வருகைகள் பாய்சான் பரவலில், மணிக்கு 3 பேர் என்ற சராசரி வீதத்தில் இருந்தால், டாக்டரின் அறையில் காத்திருக்கும் ஒரு நோயாளி செலவிடும் சராசரி நேரம் யாது? பரிசோதனைக்காகச் செலவான சராசரி நேரம் எவ்வளவு?

தீர்வு

சேவை நிலைகள் $\gamma = 4$ என்பதால் இஃது ஓர் எர்லாங்கியன் வகையான பிரச்சினையாகிறது.

இங்கு $\frac{1}{\gamma\mu} = 4. \quad \therefore \quad \mu = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$

காத்திருக்கையில் செலவான சராசரி நேரம்

$$= E(w) = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

இங்கு $\gamma = 4; \quad \mu = \frac{1}{16}; \quad \lambda = \frac{1}{20}$

$$\therefore E(w) = \frac{5}{2 \times 4} \cdot \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{16}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{20}\right)}$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{18 \times 16 \times 20}{4 \times 20} = 40 \text{ நிமிடங்கள்.}$$

$\mu = \frac{1}{16}$ என்பதால்,

பரிசோதனையில் செலவான சராசரி நேரம்

= 16 நிமிடங்கள் ஆகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. மணி ஒன்றுக்குச் சராசரி 3 விதம், நிலைகுலைவு ஏற்படும் இயந்திரங்களைப் பழுதுபார்க்க ஒரு பழுதுபார்ப்பவர் தேவைப்படுகிறார். நிலைகுலைவுகள் பாய்சான் முறையில் நிகழ்கின்றன. எந்த ஓர் இயந்திரத்திலும் உற்பத்தியற்ற நேரத்தால் கம்பெனிக்கு மணிக்கு 5 ரூபாய் நஷ்டம் ஏற்படுகிறது. இந்தக் கம்பெனி, கிடைக்கக்கூடிய இரண்டு பழுது பார்ப்பவர்களுள் ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுக்க விரும்புகின்றது. ஒரு நபர் குறைந்த கூலியில் மெதுவாகப் பழுதுபார்ப்பவர். மற்றவர் வேகமாக வேலை செய்பவர்; அதிகக் கூலி கேட்பவர். மெதுவாகச் செய்யும் குறைந்த கூலிக்காரர் மணி ஒன்றுக்கு 3 ரூபாய் கேட்கின்றார். இந்தக் கூலிக்காக அவர் செய்யும் பணியானது, அடுக்குக் குறிப் பரவலுடன் அமைந்து மணி ஒன்றுக்குச் சராசரி 4 விதம் பழுது பார்ப்பார். வேகமான அதிகக் கூலிக்காரர் மணி ஒன்றுக்கு 5 ரூபாய் கேட்கின்றார். அவரது பணியும் அடுக்குக்குறிப் பரவலில் அமைந்து, மணி ஒன்றுக்கு சராசரி 6 விதம் பழுதுபார்ப்பார். இந்த விவரங்களிலிருந்து எந்தப் பழுது பார்ப்பவரைக் கம்பெனி தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும் என்று கண்டுபிடி.

2. ஒரு தர்மல் ஸ்டேஷனுக்கு (வெப்பஞ் சார்ந்த நிலையத்துக்கு) அருகில் அமைந்த ஒரு பெட்ரோல் அடைப்பிடத்தில் (petrol bunk), ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில், 3 ஜீப்புகளுக்கான இடைவெளி மட்டுமே இருக்கிறது. பெட்ரோல் நிரப்புவதற்கு ஒரே ஒரு குழாய் மட்டுமே உள்ளது. ஜீப்புகளின் வருகை விதம் மணி ஒன்றுக்கு 6 என்ற விதத்தில், பாய்சான் பரவலாக உள்ளது. ஒரு ஜீப்புக்குப் பெட்ரோல் அளிக்கப்படும் சராசரி நேரம் 5 நிமிடங்கள் என்றால்,

(அ) ஒரு ஜீப் அடைப்பிடத்திற்கு வரும்போது, நிலையம் முழுமையாக நிரம்பியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கணக்கிடு.

(ஆ) அமைப்பில் உள்ள ஜீப்புகளின் சராசரி எண்ணிக்கையையும் ஒரு ஜீப்பிற்கான சராசரி காத்திருக்கை நேரத்தையும் தீர்மானிக்கவும்.

3. ஒரு பெரிய தொழிற்பட்டறையில் இயந்திரக் கருவிகள் (tools) ஒரு தனி இடத்தில் (cribb) குவித்து வைக்கப்பட்டுள்ளன. கம்மியர்கள் (mechanics) அங்கு வந்து அவற்றை எடுத்துச் சென்று பிறகு வேலை முடிந்தபின் அவற்றை அங்கே கொண்டு வந்து வைத்துவிடுகின்றனர். கம்மியர்கள் அங்கு வரும் இடைவெளி நேரங்கள் சராசரியாக (கம்மியர்களின் சராசரி வருகை-இடைவெளி நேரம்) 32 செகண்டுகள் என அறிகின்றோம். ஒரு பொருளகப் பணியாளர் (clerk at the cribb) ஒரு கம்மியருக்குக் கருவியை (பொருளை) எடுத்துக் கொடுக்க, அல்லது வாங்கிவைக்க) சராசரியாக 50 செகண்டுகள் வீதம் பணியாற்றுகிறார். பொருளகப் பணியாளரின் கூலி மணி ஒன்றுக்கு 1 ரூபாய் என்றும், ஒரு கம்மியருக்கு ரூ. 2-50 என்றும் இருந்தால், கம்மியர்களின் காத்திருக்கை நேரம் + பொருளகப் பணியாளரின் செயலாற்றுத நேரம் இவற்றுக்கான மொத்தச் செலவினை மீச்சிறுமமாக்குவதற்கு அந்தக் கருவிகளுக்கான தனி அறையில் எத்தனை பொருளகப் பணியாளர்களை நியமிக்க வேண்டும்?

(முறை மாற்றத்தின் நேரம் $7\frac{1}{2}$ மணி என்று கொள்க)

4. ஓர் உருவாக்கும் செயல்முறையில் ஒரு கம்பெனி இரண்டு இயந்திரங்களை உபயோகிக்கிறது. ஒவ்வோர் இயந்திரமும் பழுதடைந்த நேரம் தவிர, மற்ற எல்லா நேரங்களிலும் ஓடிக்கொண்டுள்ளது. t என்ற நேரத்தில் அது இயங்குவதாகத் தரப்பட்டால், $(t, t+\triangle t)$ இடைவெளி காலத்தில் அது பழுது அடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\lambda \triangle t$ என்று கொள்வோம். இங்கு மணி ஒன்றுக்கு ஆன செயல் ஒழிவுகளின் (failures) மூலம் λ ஐக் குறிக்கிறோம். இயந்திரம் பழுதாகும் எந்த நேரத்திலும், உடனடியாக அதை ஒரு பழுது சரிபார்ப்பவரிடம் ஒப்படைக்கிறோம். (குறைந்தபட்சம் இரண்டு பழுது சரிபார்ப்பவர்கள் எப்போதும் இருப்பதாகக் கொள்வோம்). ஒவ்வோர் இயந்திரத்திற்கும் பழுது சரிபார்க்கும் நேரம் சராசரி $\frac{1}{\mu}$ மணிகள் என்றவாறு ஓர் எதிர்மறை அடுக்குக்குறிப் பரவலில் உள்ளது.

இப்போது குறிப்பிட்ட ஒரு நேரத்தில், 'n' எண்ணிக்கையுடைய இயந்திரங்கள் பழுது அடைந்து சரிபார்ப்பதற்காக உள்ளன. $n = 0, 1, 2, 3$ என்று கொள்க.

(அ) $n = 0, 1, 2, \ldots$க்கான சீர்நிலை நிகழ்தகவுகளை (steady state probablities) கண்டுபிடி.

(ஆ) ஓர் இயந்திரத்தின் சராசரிச் செயலாற்ருத நேரம் எவ்வளவு?

(இ) $\lambda = \frac{1}{2}$ என்க. ஒவ்வொரு செயலாற்ருத மணி நேரத்துக்குர் கம்டெனிக்கு அதனுல் ஏற்படும் செலவு (downtime cost) ரூ. 100/- என்ற தெரிகிறது. அதைச் செயலாற்றுவதற்காக மணி ஒன்றுக்கு ரூ. 25μ/- செலவு பிடிக்கிறது என்ருல், பெரிதும் உகந்த சேவை வீதம் μ_0 ஐக் (அதே அளவில் பராமரிப்பதற்கு) கணக்கிடு.

5. ஒரு குறிப்பிட்ட தரமான இயந்திரத்தை, அது பழுதடையும் போது (நிலைகுலைவு ஏற்படும்போது) பழுது பார்ப்பதற்கு வரிசை முறைப்படி ஐந்து நிலைகளில் செய்தாக வேண்டும். ஐந்து நிலைகள் ஒவ்வொன்றினையும் செய்து முடிக்க ஆகும் நேரமானது சராசரி 5 நிமிடங்களைக் கொண்டவாறு ஓர் அடுக்குக் குறிச் சார்பலனில் அமைந்து, மற்ற நிலைகளைச் சாராமல் உள்ளது. இந்த இயந்திரங்கள் பாய்சான் பரவலை ஒட்டி மணிக்கு 2 என்ற சராசரி வீதத்தில் நிலைகுலைந்தால். அங்கு ஒரே ஒரு பழுது சரி பார்ப்பவர் இருந்தால், நிலைகுலைவு ஏற்படும் ஒவ்வோர் இயந்திரத்துக்குமான சராசரி செயலாற்ருத நேரம் எவ்வளவு என்று கண்டுபிடி.

[குறிப்பு : இஃது ஒரு $M/EK/1$ முறைவரிசைக் கணக்காகும்.]

6. காற்றெழி வெற்றிடக் குழாய்க்குள் (vacuum tube) சில பொருள் பகுதிகளைப் பொருத்தும் முன்னர் எண்ணெய்ப் பசைக்கான கருவியினுல் அவற்றைச் (வழவழப்பாக்க) சுத்தமாக்க வேண்டும் பொருள்களின் கூறுகள் ராண்டம் (பாய்சான்) முறையில் மணி ஒன்றுக்கு λ கூறுகள் என்ற சராசரி வீதத்தில் கொண்டு வரப்படுகின்றன. அவை மணி ஒன்றுக்கு λ கூறுகள் சராசரி வீதத்தில் சுத்தமாக்கப்படுகின்றன. பொருத்துவதற்காகக் காத்திருக்கைச் செலவு ஒரு மணிக்கு ஒரு கூறுக்கு C_1 ரூபாய்; எண்ணெய்ப் பசைக்கான கருவியைச் சொந்தமாக வைத்து உபயோகிக்கும் செலவு, அது μ சராசரி வீதத்தில் வேலை செய்தால், மணி ஒன்றுக்கு $C\mu$ ரூபாய் என்ருல், μ எவ்வளவு அளவில் இருக்க வேண்டும்?

7. (அ) $M/M/1$ முறை வரிசைப் படிவத்தில், அமைப்பிலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கைக்கான சீரான நிலை நிகழ்தகவினைக் கண்டுபிடி.

(ஆ) (i) சராசரிக் காலியற்ற முறைவரிசை நீளத்திற்கும்,

(ii) நிச்சயமாகக் காத்திருக்கும் ஒரு நபரின் சராசரிக் காத்திருக்கை நேரத்துக்குமான எண்ணுருக் கோவைகளைக் (expressions) கண்டறிந்து விளக்கிடுக.

8. (அ) ஒரு முறைவரிசையின் சீரான நிலையை விளக்குக.

(ஆ) எப்போது ஒரு வரிசைமுறை கட்டுக்கு அடங்காமல் போகின்றது ?

(இ) சேவை வீதத்துக்கும், சேவை நேரத்துக்குமான வேறுபாட்டினை விளக்குக.

8. சரக்குப் பட்டியல் கட்டுப்பாடு

(Inventory Control)

பயன்படுத்தத் தக்க ஆனால் பயன்படுத்தப்படாத சாதனங்களைக் கொண்டதே ஒரு சரக்குப்பட்டியலாகும். ஆள்கள், பொருள்கள், இயந்திரங்கள், பணம் போன்றவைகளை வாய்ப்பு வளங்கள் எனலாம். சம்பந்தப்பட்ட வாய்ப்பு வளங்களானவை முடிக்கப்பெறும் ஏதேனுமொரு தறுவாயிலிருக்கும்போது அவ் வாய்ப்பு வளமானது 'கையிருப்பு' என வழங்கப்படும்.

வாய்ப்புவளங்களின் அளவானது, சரக்குப்பட்டியல் அதிகரிக்க அதிகரிக்க ஏதேனும் ஒரு கட்டுப்பாட்டுக்குட்படும் போது, குறைந்த அளவில் ஏதேனும் ஒரு (வாய்ப்புவளத்தின்) விலையானது குறையுமானால் அத்தகைய பிரச்சினையை ஒரு சரக்குப்பட்டியல் பிரச்சினை என்கிறோம். சாதாரணமாக, மொத்த விலையைக் (உண்மையான அல்லது எதிர்பார்க்கும்) கூடிய அளவு மீச்சிறுமப்படுத்துவதே நமது இலட்சியம் (குறிக்கோள்) ஆகும். ஆனால், சரக்குப்பட்டியலானது, பயன்படுத்துபவர்களால் கோரப்படும் தேவையின் அளவைப் பாதிக்கும்போது இலட்சியமானது இலாபத்தை (உண்மையான அல்லது எதிர்பார்ப்பு) கூடிய அளவு மீப்பெருமமாக்குவதாக மாறி அமையும்.

சரக்குப்பட்டியல் கோட்பாடானது, எதிர்காலத் தேவைக்கேற்பப் பொருள்களைக் கையிருப்புச் செய்வதற்காகப் பின்பற்றும் பெரிதும் உகந்த நடைமுறைகளைப் பற்றிய விவாதமாகும். எவ்வகையானதுமான, பயன்படுத்தப்படாத ஆனால் பொருளாதார முறையில் மதிப்புடைய வாய்ப்புவளமே சரக்குப்பட்டியல் என வரையறுக்கலாம். எவ்விதமான இயற்பியல் (physical) சார்ந்த பொருள்களின் சரக்குப்பட்டியலைக் கட்டுப்பாட்டில் அமைக்கும் போதும், இரண்டு முக்கியமான அடிப்படையான கேள்விகளுக்கு விடை அளிக்கவேண்டுவது அவசியமாகும்.

1. எச் சமயத்தில் சரக்குப்பட்டியலை மறுபடியும் நிறைவாக்குதல் வேண்டும்?

2. எந்த அளவு நிறைவாக்குதல் வேண்டும்? என்பவையே அவ்விரண்டு கேள்விகளாகும்.

சரக்குப்பட்டியல் உருப்படிவங்களின் அமைப்பு

சரக்குப் பட்டியல் கோட்பாட்டு வெளியின் இயற்கையான பிரிவுகளை முதலில் ஆராய்வோம். இத்தகைய பிரிவுகள் பொருள்களைக் கொள்முதல் செய்யும் முறைகளின்போது ஏற்படும் மாறுபாட்டின் காரணமாகவும், எதிர்காலத் தேவைகள் காரணமாகவும் உண்டாகின்றன. எதிர்காலத் தேவையைப் பற்றிய உய்த்துணர்வானது (knowledge) மூன்று வகைகளில் சுருக்கமாக வரையப்படலாம். முதலாவதாக, எதிர்காலத் தேவை எவ்வளவாக அமையும் என்பதைத் துல்லியமாக நாம் அறிந்திருக்கலாம். இதை, 'நிச்சயமான சரக்குப்பட்டியல் கணக்கு' (Inventory problem under certainty) என்கிறோம். இரண்டாவதாக, கடந்தகாலத் தேவையினைப் பற்றிய விவரங்களைக் கருத்தில் கொண்டு எதிர்காலத் தேவையின் நிகழ்தகவுப் பரவலின் தன்மையைக் கவனிக்கலாம். இதைச் 'சோதனைக்குட்பட்ட சரக்குப்பட்டியல் கணக்கு' (Inventoy problem under risk) என்கிறோம். மூன்றாவதாக, எதிர்காலத் தேவையின் பல்வேறு நிலைகளின் தன்மையைப் பற்றிய நிகழ்வியல்பு (likelyhood) ஒரு சிறிதும் அற்றவராக நாம் இருக்கலாம். இதை 'நிச்சயமற்ற சரக்குப்பட்டியல் கணக்கு' (Inventory problem under uncertainty) என்கிறோம்.

கொள்முதல் முறையானது இரண்டு வகையான வித்தியாசங்களை எடுத்துக்காட்டுகிறது. ஒரு சரக்குக் கொள்முதலில், ஒரு தேவைக்கு உத்தரவு பிறப்பித்ததற்கும், அந்த உத்தரவு செயலாக்கப்பட்டு அந்தப் பொருளானது கிடங்கில் பெற்றுக் கொள்ளப்படுவதற்கும் இடையே ஏற்படும் காலக் கழிவு (time lag) முதல் வகையான வித்தியாசத்தை ஏற்படுத்துகிறது. ஒரு சில நிலைகளில், இத்தகைய காலக்கழிவு ஒரு மாறிலி போன்றோ அல்லது மாறிலியாகவோ அமையும். சில நிலைகளில், இத்தகைய காலக்கழிவு ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவுப் பரவலைப் பெற்று விளங்கும். ஒரு சரக்குக் கொள்முதலில், ஒருசில பொருள்கள் வெளியே இருந்து பெறத்தக்க வகையில் அமையும்; மற்றச் சில, அந்தந்தத் தொழிலகங்களிலேயே உற்பத்தி செய்யத் தக்கவாறு இரண்டாவது வித்தியாசமாக அமையும். இத்தகைய இருவிதப்பட்ட உண்மைகள், சரக்குமுதல் கணக்குகளை ஆராயும் போது, முக்கியமான தொடர் விளைவுகளைப் (consequences) பெற்றிருக்கும். தேவையைச் சுயமாகவே பூர்த்திசெய்து கொள்ளும்

ஒரு குழுமத்தின் சரக்குப்பட்டியல் பிரச்சினையானது தனது தேவைகளை வெளியேயிருந்து பெறும் ஒரு குழுமத்தில் சரக்குப் பட்டியல் கணக்கைவிட அதிகச் சிக்கலானது. ஒருசில சரக்குப் பட்டியல் சார்ந்த முடிவுகள் ஒரே முறையில் எடுக்கப்பட்ட நிச்சயமானதாக அமையும். ஆனால், அதே சமயத்தில் வேறு சில சரக்குப்பட்டியல் முடிவுகள், அதேபோன்ற பல்வேறு தொடர் சரக்குப்பட்டியல் முடிவுகளின் படியாக அமையும். இதை மூன்றுவது வித்தியாசம் என்கிறோம்.

ஆய்வுத்தன்மை

கையிருப்புப் பொருள்களின் அளவைச் சார்ந்தும் பிறப் பிக்கப்படும் உத்தரவுகளின் எண்ணிக்கையைச் சார்ந்தும் இருவிதமான விலைகள் அமைகின்றன. இத்தகைய விலைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிரானவையாகும். ஏனெனில், ஒன்றின் மதிப்புக் குறைக்கப்படும்போது, மற்றதன் மதிப்பு உயர்கிறது. எனவே, இத்தகைய விலைகள் முதலில் தீர்மானிக்கப்பட்டு அவை பெறப்படவேண்டும். ஒரு சரக்கு முதல் பிரச்சினை சரிசம நிலைமையிலமைக்கும் வண்ணம் இத்தகைய விலைகள் அமைக்கப் படுகின்றன. வழக்கமாக நாம் முன் கூறியவாறு, ஒரு சரக்கு முதல் கணக்கில் சம்பந்தப்பட்ட மொத்த விலைகளை மீச்சிறும மாக்குதலே நமது நோக்கமாகும். மொத்த விலைகளானவை, சம்பந்தப்பட்டுள்ள எல்லா ஒன்றுக்கொன்று எதிரான விலை களையும் தன்னடக்கியிருக்கும். சோதனைக்குட்பட்ட சரக்குப் பட்டியல் கணக்குகளில் எதிர்பார்க்கும் மொத்த விலையை மிகச் சிறுமமாக்கும் முறை எதுவோ, அதனையே நாம் பின்பற்றுகிறோம். ஆய்வுக்குட்பட்டுள்ள சரக்குப்பட்டியல் கணக்கானது, நிச்சய மற்ற சரக்குப்பட்டியல் கணக்காக அமையின், பொதுவாகப் பின்பற்றத்தக்க வழிமுறையென்று ஒன்றும் இல்லை. ஆனால், புரிந்துகொள்ளத்தக்க நியாயமான வழிமுறைகள் உள்ளன. பல செயல்முறை நிலைகளில் பிரச்சினையின் சிக்கலின் காரண மாக, 'கூடிய வகையில் எதிர்பார்க்கும் மொத்த விலைகளை மீச்சிறுமமாக்குதல்' என்ற நமது குறிக்கோளானது அடைய முடியாததாக அமையலாம். இத்தகைய சூழ்நிலைகளில் கொடுக் கப்பட்ட சரக்குப்பட்டியல் கணக்கிற்குக் கூடிய விரைவில் நெருக்க முள்ள பெரிதுமுகந்த தீர்வுகளை அடைவதே நமது இலக்காகும்.

சரக்குப்பட்டியல் கணக்கில் விலைக்காரணிகளின் பங்கு: சரக்குப்பட்டியல் கணக்குகளில் நாம் எப்போதும் மாறத்தக்க விலைகளையே கருத்தில் கொள்கிறோம். இத்தகைய விலைகள் பின்வருமாறு அமையும்:

(i) அனுப்பு ஆணை அல்லது நிறுவன அமைப்புச் செலவு (Ordering or set-up costs

இப் பிரிவின் கீழ்ப்படும் விலைகள் தலையாய வகையின் பாற்பட்ட விலைகளாகும். இத்தகைய விலைகள் இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படலாம்.

1. கொள்முதல் செய்யப்படும் பொருள்களின் விலை.

2. பொருள்களைக் கையாளுகையில் ஏற்படும் விலைகள்.

பொருள்களை ஆய்வு செய்வதால் ஏற்படும் விலைகள் போக்குவரத்தினால் ஏற்படும் விலைகள், பொருள்களைப் பெறும்போது பெறும் விலைகள், தபால் சம்பந்தப்பட்ட விலைகள் போன்றவைகளை உள்ளடக்கிய பொருள் செய்முறை விலைகள்; மேற் குறிப்பிடப்பட்ட விலைகளை இரண்டு வகைகளாகப் பாகுபாடு செய்யலாம். அவையாவன :

(அ) உத்தரவு பிறப்பிக்கப்பட்ட பொருள்களின் அளவையைச் சார்ந்து நிற்கும் விலைகள்.

(ஆ) உத்தரவு பிறப்பிக்கப்பட்டுள்ள பொருள்களின் அளவையைச் சாராத விலைகள்.

ஒரு தொழிலகத்திற்கு ஏற்படும் ஒரு பொருளின் தேவையானது, அத் தொழிலகத்தாலேயே பூர்த்தி செய்யப்படும் போது ஏற்படும் விலையானது (set up cost) அமைப்புச் செலவு ஆகும். இத்தகைய விலைகள் ஒரு தொழிலிலிருந்து மற்றொரு தொழிலுக்கு மாறுவதால் ஏற்படுவதோடுமட்டுமன்றி மாற்று விலைகள், எழுத்தரைச் சார்ந்த விலைகள் போன்றவற்றையும் உள்ளடக்கும். அமைப்புச் செலவு, பிறப்பிக்கப்படும் உத்தரவுகளுக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும் என்பதை நாம் இங்கு முன்பாகவே தீர்மானித்துக் கொள்கிறோம். இவை 'ஓர் உத்தரவுக்கு இவ்வளவு விலை' எனக் குறிக்கப்படுகின்றன.

(ii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு (Inventory carrying costs)

இவை (அ) காப்பு உறுதி விலைகள், வரிகள், (ஆ) பொருள்களின் நாசத்தாலும் பழைமைத் தன்மையாலும் ஏற்படும் அழிவு விலைகள், (இ) கிடங்குகளின் வாடகை மற்றும் கிடங்குக்குத் தேவையான விளக்கு, எரிபொருள், காவலாள் போன்ற விலைகள் உள்ளடக்கிய பொருட்பாதுகாப்பு விலைகள், (ஈ) சரக்குப் பட்டியலில் முடங்கியிருக்கும் பண மதிப்பின் விலை போன்றவற்றை உள்ளடக்கி அமையும்.

சரக்குப் பட்டியலில் முடங்கியிருக்கும் முதலினை வேறு ஓர் இடத்தில் முதலீடாகச் செய்திருத்தலால் கிடைக்கக்கூடிய தொகை மதிப்பைச் 'சந்தர்ப்ப விலை' என்று குறிக்கிறோம்.

இத்தகைய சந்தர்ப்ப விலையானது சரக்குப் பட்டியலில் முடக்கப் பட்டிருக்கும் முதலினை வேறு எந்த ஒரு மாற்று முதலீடாகவோ மாற்றியிருந்தால் கிடைக்கக்கூடிய அதிகமான திருப்புத் தொகை மதிப்புக்கு (Inventory carrying costs) ஒப்பானதாகும். சரக்குத் தேக்கச் செலவு ஆனது சரக்கு முதலில் முதலீடு செய்யப்படும் தொகைக்கு நேர்விகிதத்தில் அமையும் என்பதை எல்லாச் செயல் முறை சம்பந்தப்பட்ட நிலைகளிலும் எடுத்துக் கொள்கிறோம். இதனை ஒரு பொருளுக்குச் சரக்குப் பட்டியலில் முதலீடு செய்யப் படும் ஒரு பண அளவைக்கான விலை எனக் குறிக்கின்றோம்.

(iii) அதிகக் கையிருப்பு விலைகள் (Over-stock costs)

ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கான தேவையின் அளவு தீர்ந்த பிறகு கையிருப்பாக அமையும் பொருளளவினால் இத்தகைய விலைகள் ஏற்படுகின்றன. இவை நிலையான சரக்குப்பட்டியல் கணக்குகளால் ஏற்படுகின்றன. உதாரணமாக, கிறிஸ்துமஸ் மர விற்பனையாளரைக் கருத்தில் கொண்டால், தேவையானது ஒரு குறிப்பிட்ட காலமல்லாத மற்ற நாள்களில் மிகவும் குறைவு; அல்லது இல்லவே இல்லை. எனவே, ஒருவர் மிகவும் அதிகமாகக் கொள்முதல் உடையவராயிருந்தால் அவர் தேவைக் கதிகமான ஒவ்வொரு மரத்திற்கும் அடையும் நஷ்டத்திற்கு ஈடாக ஒரு விலையைப் பெற்றிருப்பார். இத்தகைய விலைகள் இக் குறிப்பிட்ட உதாரணத்தில் 'அதிகக் கொள்முதல் விலையாகும்.'

(iv) கையிருப்புத் தீர்ந்த நிலையின் செலவு (Stock-out cost)

சரக்குப் பட்டியல் அமைப்பில் கொள்முதல் செய்யப்படும் ஒரு பொருளானது தீர்ந்துபோன பின்னரும் ஏற்படும் தேவை யின் அளவினால் இத்தகைய விலைகள் ஏற்படுகின்றன (This is the cost of not carrying inventory). இத்தகைய விலைகளில் இரண்டு விதமான மாறிலிகளைக் காணலாம்.

(அ) சரக்குப் பட்டியல் அமைப்பில் கொள்முதல் அளவுக்கு மேல், தேவை ஏற்படுவதால் இத்தகைய விலையானது பின்னால் பூர்த்தி செய்யப்படுவதற்காக முடியா நிலையிலிருக்கிறது. இத் தகையதொரு நிலை 'பின் உத்தரவு' (back-order) ஆகும். இத் தகைய சூழ்நிலைகளில் இந்த வியாபாரம் இழக்கப்பட்ட ஒன்று இல்லையெனினும், ஒரு சில நாள்கள் தாமதம் ஏற்படும்.

(ஆ) இரண்டாவதாக ஒரு தேவையானது கொள்முதல் அள விற்குமேல் அமைவதால் பூர்த்தி செய்யப்படவில்லை என்னும் நிலையில் அத் தேவைக்குரியவர் வேறு ஓர் இடத்தை நாடும் ஒரு நிலையைக் கருத்தில் கொள்க. இத்தகைய நிலை 'இழப்பு விற்பனை நிலை' (Lost sales case) எனப்படும்.

சரக்குப் பட்டியலமைப்பின் அடிப்படைத் தன்மைகள்

சாக்குப்பட்டியலின் இரண்டு முக்கியத்துவம் வாய்ந்த அமைப்புகளை அவற்றின் பெரிதுமுவந்த தன்மையை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஒப்பிடுவோம், இந்த இரண்டு அமைப்புகளும் சாதகமான முறையிலே கட்டுப்படுத்தத்தக்க மாறியல் மதிப்புருக்கள் ன் மூலம் வேறுபடுத்தப்படலாம். உத்தரவிடப்படும் எண்ணிக்கைகள், உத்தரவிடப்படும் பொருள்களின் அளவு எனப்படும் இவ்விரண்டு மாறியில் மதிப்புகள், சரக்குப் பட்டியல் தீர்மானிப்பவரில் கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்டதாகும். ஆய்வுக்குட்பட்ட தேவையானது நிச்சயமானதாக அமையின் இவ்விரண்டு மாறியின் மதிப்புகளும் ஒன்றேயாக அமையும். ஆனால், தேவையானது தீர்மானிப்பவரின் முடிவுக்குட் பட்டிருக்கும்போது உத்தரவு படப்படும் எண்ணிக்கைகளை அத் தேவையின் அளவின்மூலம் அடையலாம் அல்லது உத்தரவிடப்படும் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு தேவையின் அளவைத் தீர்மானிக்கலாம்.

ஆனால், தேவையானது நிச்சயமற்றதாயின், அந் நிச்சயமற்ற தேவையின் மாறுபாடுகளைத் தீர்மானிப்பவரின் விருப்பம் நீக்குகிறது. தீர்மானிப்பவர் ஒன்று உத்தரவின் எண்ணிக்கையை மாற்றலாம் அல்லது உத்தரவிடப்படும் அளவை மாற்றியமைக்கலாம். இத்தகைய இருவித வாய்ப்புகள் கீழ்க்கண்ட இருவிதமான அமைப்புகளுக்கு நிலைக்களனாக விளங்குகின்றன:

(i) '<u>மறு உத்தரவு அளவு அமைப்பு</u>' எனப்படும் இவ்வகை அடிப்படை மாதிரியானது வில்ஸன் ஹாரிஸ் அமைப்பு ஆகும். இவ்விடத்தில் சரக்கு மறு உத்தரவு அளவு (ROQ) (Re-Order Quantity) நிலையானதாக அமையும். ஆனால் உத்தரவு எண்ணிக்கைகள் மாறுபடும். எனவே, இம் மாறும் உத்தரவு எண்ணிக்கைகள் தேவையின் மாறுபாடுகளால் தீர்மானிக்கப் படும். உத்தரவு பிறப்பித்ததற்கும் அவ்வுத்தரவு பூர்த்தி செய்யப்படுவதற்கும் இடையே உள்ள காலக்கழிவை அடிப்படையாகக் கொண்டு கையிருப்பின் அளவைத் தீர்மானிப்பதிலேயே இந்த அமைப்பு இயங்குகிறது. உத்தரவு பிறப்பிக்கப்படுவதற்கும் அவ்வுத்தரவு பூர்த்தி செய்யப்படுவதற்கும் இடையே உள்ள காலக்கழிவே மற்றுமோர் உத்தரவு, தேவையைப் பூர்த்தி செய்யப் பிறப்பிக்க வேண்டுவதன் முக்கியத்துவத்தைச் சுட்டிக்காட்டுவதாக அமைகிறது. இந் நிலையைத் திருப்பு உத்தரவு நிலை (Re-order Level) அல்லது திருப்பு உத்தரவு முனை என்கிறோம். கையிருப்பின் அளவானது முன்னால் தீர்மானிக்கப்

பட்ட தேவையான அளவிற்குக் குறையும் நேரத்திலெல்லாம் அந் நிலையான அளவிற்கு ஓர் உத்தரவு பிறப்பிக்கப்படுகிறது. இந்த நிலையானது 'இரு தொட்டி அமைப்பு' (Two Bin System) எனப் படும். இப்படிப்பட்ட சூழ்நிலைகளிலெல்லாம் கையிருப்பானது இரண்டு பிரிவுகளாகப் பாகுபடுத்தப்படுகிறது. கையிருப்பு, இவ் விரண்டில் ஏதேனுமொரு தொட்டியிலிருந்து, அத் தொட்டி காலியாகும்வரை பெறப்படுகிறது. முதலாவது தொட்டி காலி யாகும்போது ஒரு திருப்பு உத்தரவு பிறப்பிக்கப்படுகிறது. அதற்குமேல் இரண்டாவது தொட்டியிலிருந்து கையிருப்புப் பெறப்படுகிறது. இத்தகைய இரு தொட்டி அமைப்பு கையாளு வதற்கு எளிமையானதாகவும், குறைந்த அளவு பதிவேட்டுக் குறிப்போடும் விளங்குகிறது.

'திருப்பு உத்தரவு நிலை' எனப்படுவது 'குறைந்தபட்ச நிலை' அல்லது 'குறைந்த அளவை' எனவும் வழங்கப்பெறும். திட்டமிடும் பிரச்சினையானது இவ்விடத்து இரண்டு அளவுகளை நிலைநிறுத்துவதைச் சுற்றி அமைகிறது.

1. எப்போது உத்தரவிடப்படவேண்டும் என்பதை விளக்கும் திருப்பு உத்தரவு நிலை.

2. எவ்வளவு உத்தரவிடப்படவேண்டும் என்பதை விளக்கும் திருப்பு உத்தரவு நிலை.

கையிருப்பு நிலை உத்தரவு அளவு அமைப்பின் முக்கியமான பிரதிகூலமாக அமைவது, தொடர் சரக்குப் பட்டியலானது தொடர்பாக ஆய்வு செய்யப்பட வேண்டியதாகி வரும். இரட்டிப்புப் பாகுபாட்டு அமைப்பில் சேர்க்கப்படக்கூடிய பொருள்கள் சம்பந்தப்பட்ட சரக்குப் பட்டியலில் இந்தக் குறை யானது (பிரதிகூலமானது) ஓரளவு நீக்கப்படலாம். ஆனால், இவ்வாறு இரு தொட்டி அமைப்பில் அடங்காத பொருள்களைச் சரக்குப் பட்டியலில் உடையதாக அமைக்குமிடத்து, இக் குறையை நீக்குவதென்பது எளிதான ஒன்றல்ல என்பதை நினைவில் கூர்வது அவசியமாகும்.

சுழற்சி அமைப்பு அல்லது கால ஆய்வு அமைப்பு
(Cycle System or Periodic review System)

இந்த அமைப்பானது ஒரு நிலையான உத்தரவு காலத்தைக் கொண்டது. உத்தரவு செய்யப்படும் பொருள்களின் அளவும் தேவையின் மாறுபாடுகளைப் பொறுத்து மாறும் தன்மை உடைய தாய் உள்ளது.

இவை அடிக்கடி உபயோகப்படுத்தப்படும் நன்கு விளம்பரம் பெற்ற ஓர் அமைப்பாகும். இவ்வகை அமைப்பானது குறிப்பாகச் சரக்குப்பட்டியல் கையிருப்பானது ஒரு நிலைத்த காலக் கழிவுக் குப்பின் தொடர் முறையில் ஆராயத்தக்கதாக அமையும்போது பயன்படுத்தப்படுகின்றது. உதாரணமாக, கிடங்குக் கட்டுப் பாட்டிலோ அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட காலக் கழிவுக்குப்பின் எவ்விதத் தடையுமின்றி உத்தரவிடப்படும் அமைப்புகளிலோ இவ்வகை அமைப்பு பயன்பெறும்.

எனவே, எப்போது சரக்குப்பட்டியல் உத்தரவிடப்பட வேண்டும் என்ற கேள்விக்கு நாம் குறிப்பிட்ட காலத்தை அடிப் படையாகக் கொண்டு பதிலிறுக்கின்றோமேயன்றிக் கையிருப்பின் அளவினைக் கொண்டு விடையளிப்பதில்லை என்பது தெளிவா கிறது. இக் கேள்விக்கு விடையிறுக்கப்பட்டால் உடனேயே உத்தரவிடப்படும் அளவு ஒவ்வொரு முறையும் எவ்வளவாக அமையவேண்டும் என்பது முடிவாகும்.

உத்தரவிடப்படும் அளவானது, உத்தரவிடப்படும் நேரத்துச் சரக்குப் பட்டியலின் கையிருப்பு, சராசரித் தேவைக்கு மிஞ்சி இருப்பதையோ அல்லது குறைந்து நிற்பதையோ சார்ந்து நிற்கும். இந்த அமைப்பால் மூன்று மாதிரிகள் இயங்குகின்றன.

(i) (R, T) மாதிரிகள்

(ii) (R, r, T) மாதிரிகள்

(iii) (nQ, r, T) மாதிரிகள்

(R, T) மாதிரிகளை ஆராய்வதால் சரக்குப்பட்டியல் நிலையினை அல்லது கையிருப்பு அளவையை R நிலைக்குக் கொண்டு செல்லும் அளவுக்கு உத்தரவிடுவதையே, நமது இயக்கக் கோட் பாடாகக் கொள்கிறோம். உத்தரவு முறையானது எப்போதும் Rவரை உத்தரவிடுவதிலேயே அமையும்.

உத்தரவிடப்படும் அளவு = முன் தீர்மானித்த அளவு கையிருப்பு.

இந்த இயக்கக் கோட்பாடானது 'R வரை உத்தரவுக் கோட்பாடு' அல்லது (R,T) மாதிரி எனப்படும். இம் மாதிரி யானது காலத்தை அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவைத் தழுவி நிற்கும்.

சரக்குப் பட்டியலை ஆராயும் நேரத்து, கையிருப்பு அல்லது சரக்குப் பட்டியல் நிலையானது, rஐ விடக் குறைவாகவோ அல்லது r-க்கும் சமமானதாகவோ இருந்தால்தான் கொள்முதல்

செய்தல் என்னும் மாற்று இயக்கக்கோட்பாடிணைப்பின்பற்றலாம். இப்படிப்பட்ட நிலைகளில் தேவையான அளவானது உத்தர விடப்பட்டுப் பொருத்தமான சரக்குப்பட்டியல்நிலைக்கு உயர்த்தப் படுகிறது, இதனை 'R,r முறை'' என்கிறோம். சரக்குப் பட்டியல் நிலைகளை தனித்த மாறிகளாகக் கொண்டு $r=(R-1)$ என்றிருக்குமானால் R முறையளவான ஓர் உத்தரவானது ஒரு குறிப்பிட்ட தனி மாதிரியாகும், ஆனால், சரக்குப்பட்டியல் நிலைகளைத் தொடர்ச்சியான மாறிகளாகக் கொள்ளும்போது $r=R$ என்றிருக்குமானால் அதுவும் ஒரு சிறப்பான தனித்தமாதிரியாகும். மேற்குறிப்பிட்ட ஒருவித கோட்பாடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோட்பாடாகவும் ஒன்று பின்பற்றப்படுகிறது. சரக்குப் பட்டியலின் நிலை அல்லது கையிலுள்ள அளவும் உத்தரவு பிறப்பிக்கப்பட்ட அளவும் சேர்ந்து நாம் ஆய்வு செய்யும் நேரத்து 'r'-க்குக் குறைவாகவோ அல்லது r-க்குச் சமமானதாகவோ இருந்தால்தான் கொள்முதல் செய்வதில் அடங்கும். உத்தர விடப்படும் அளவை ஓர் அடிப்படையான அளவு Q-வின் பெருக்கலாக, முழு எண்ணாக அமைத்துக் கொள்கிறோம். அதாவது, உத்தரவிடப்படும் அளவு 'nQ'விற்குச் சமமானதாக அமையும். இவ்விடத்து $n=1, 2, 3 \ldots$, உத்தரவிடப்பட்ட பின்பு, சரக்குப் பட்டியல் நிலையானது, $R=r+Q$-விற்குக் குறைவானதாகவோ அல்லது சமமானதாகவோ இருக்கும்படி n-ன் மதிப்பானது மிகப்பெரிய முழு எண்ணாகத் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறது. இந்தக் கோட்பாடு 'nQ' கோட்பாடு எனப்படும்.

மேற்கூறப்பட்ட மூன்று வகையான கோட்பாடுகளுமே எவ்விதச் செயல் நிலைகளிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குப்பின் ஆய்வு செய்யப்படும் அமைப்புகளில் உபயோகப்படுத்தப் படுகின்றன. மேற்குறிப்பிட்ட மாதிரிகளின் பின்னணியில் அமைந்த இலட்சியமானது, r,R போன்றவற்றுக்குரிய தக்க மதிப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆய்வுக் காலம் T-க்கு ஏற்ப, மதிப்பிடுவதோடு மட்டுமின்றி, T-க்குரிய பெரிதுமுகந்த மதிப்பினை நிலைநிறுத்துவதிலேயும் அடங்கும். இரு ஆய்வுகளுக்கு இடைப்பட்ட காலக்கழிவு T ஆனது ஒரு மாறியாக அமையும் போதுதான் இந்த சூழ்நிலை உருவாகும் என்பது நினைவு கூறத் தக்கது. எனவே, மேற்குறிப்பிட்ட மாதிரிகள் (RT) மாதிரி (R, r, T) மாதிரி (nQ,r,T) மாதிரி எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. T, Rr, இவற்றிற்குப் பெரிதுமுவந்த மதிப்புகளை நிலைநிறுத்தப் பயன் படுத்தப்படும் மாதிரியையே R, r இவற்றின் பெரிது முகந்த மதிப்புகளைத் (ஒருகொடுக்கப்பட்ட T-க்கு) தீர்மானிக்கவும் பயன்படுத்தலாம்.

மூன்று கோட்பாடுகளின் ஒப்புவமை :

அதிகமாகப் பயனுறும் மூன்று கோட்பாடுகளாவன :

(i) R வரை உத்தரவிடப்படு நிலை

(ii) (R, r) கோட்பாடு

(iii) (nQ) கோட்பாடு

மேலும், 'R வரை உத்தரவிடப்படுநிலைக் கோட்பாடு' ஆனது (Rr) கோட்பாடு, (nQ) கோட்பாடு இவற்றின் ஒரு சிறப்பு அம்சமாகும் என்பதையும் நாம் ஏற்கெனவே கண்டோம். nQ கோட்பாடானது உண்மையாகப் பார்க்கப்போனால் $R - r = Q$ என்றமையும் R, r கோட்பாட்டின் ஒரு சிறப்பு நிலையாகும். இவ்விடத்து மேலும், உத்தரவிடப்படும் அளவு Q-ன் பெருக்கத் தொகையாக அமைகிறது. எனவே, எல்லாக் கோட்பாடுகளும், ஒரு கட்டம் வரை ஒன்றோடொன்று தொடர்புடையதாகும். (RT) மாதிரியைப் பொறுத்த அளவின் எண் சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகளை எளிதில் செய்துமுடிக்கலாம். ஆனால், மற்ற இரண்டு மாதிரிகளை எடுத்துக்கொண்டால் ஒரு "கணிப்பான்" தேவைப்படுகிறது.

R வரை உத்தரவிடப்படும் கோட்பாட்டின் கீழ் வருட சராசரி விலையானது R, r மாதிரியின் கீழ் அமையும். வருட சராசரி விலையிலிருந்து மாறுபடாமல் இருந்தால் nQ, Rr நிலைகளுக்கு ஏற்பக் கணக்கிடுதலில் பயனொன்றுமில்லை; ஆனால், ஆய்வு செய்யும் நேரத்து விலைகள், உத்தரவிடப்படும் விலைகளை நோக்கும்போது, அதிகமாக அமையின் R வரை உத்தரவிடப் படும் நிலையே, பொதுமாக நந்ததாக அமையும். உத்திரவிடப்படும் நிலைகள். ஆய்வுக்காலவிலைகளைவிட அதிகமாக அமைந்தால் தான் 'R, r கோட்பாடு" R வரை உத்தரவிடப்படும் கோட்பாட்டினை, விட சாலச் சிறந்ததாகும். (R, r, T) மாதிரியானது குறைந்த சராசரி ஆண்டு விலையை $(nQ\ RT)$ மாதிரியைவிடக் கொடுக்கு மெனினும், அவ்வித்தியாசமானது மிகவும் குறைந்ததாகவே அமையும். எனவே, இவ்விரண்டு மாதிரிகளில் எந்த ஒன்றையும் பயன்படுத்தலாம்.

இரண்டு அடிப்படை அமைப்புகளின் ஒப்புவமை

மறு உத்தரவு நிலைக்கும் (ROL) (இரு தொட்டி அமைப்பு) சுழற்சி அமைப்புக்கும் இடையே உள்ள முக்கியமான வேறு பாடானது சுழற்சி அமைப்பின் கீழ்ப் பாதுகாப்பு கையிருப்பைத் தீர்மானிப்பதற்கு, தேவையின் ஏற்றத்தாழ்வுகளும் அனுமதிக்கப்

படுகின்றன. ஆனால், உத்தரவிடப்படும் காலத்தைப் பொறுத்த அளவில் ஒருவித மாற்றமும் செய்யமுடியாதாகையால், தேவையில் ஏற்படும் எவ்வித மாற்றங்களும், கையிருப்பிலிருந்தே பூர்த்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

ROL அமைப்பானது, இருவித அமைப்புகளிலும் மிகுந்த செயலாற்றல் மிக்கதாகும். ஏனெனில், இருவகை அமைப்புகளின் சுட்டுறுப்புகளும் சமசராசரிக் கையிருப்பு நிலைகளில் இயங்கும் வண்ணம் மாற்றியமைக்கப்பட்டால் ROL ஆனது மிகச் சிறிய அளவில் கையிருப்புக் குறையைத் (Stock-out) தோற்றுவிக்கின்றது. எனவே, வாடிக்கையாளர்க்கு நல்ல சேவையினையும் அளிக்க முடிகின்றது. ஆனால், சுழற்சி அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்ட கையிருப்புக் குறையின் எண்ணிக்கைகளுக்கு அதிகமான கையிருப்பு தேவைப்படுகிறது. சரக்குப் பட்டியல் விலைகள் அளவிடக்கூடியதாகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகவும் இருக்குங்கால், ROL அமைப்பு பயனுள்ளதாகவும், விரும்பப்படுவதாகவும் அமைகின்றது. ஏனெனில், 'பூர்த்தி செய் அமைப்பானது' (Replenishment) விலைகளைப் பொறுத்தமட்டில் வெளிப்படையான முறையில் தகுந்த கவனம் அளிப்பதில்லை. உத்தரவிடப்படுவது மிகக் குறைவான அளவாக இருக்கும்போது, திருப்பு உத்தரவு அமைப்பானது விரும்பத்தக்கதாகும். ஒரு மாறும் தன்மை கொண்ட உத்தரவு அளவை (Variable order quantity) (VOQ) அடுத்தடுத்து தொடர்ச்சியாகச் சரிபடுத்துவதைவிட ஒரே முறை ஒரு நிலைத்த சிக்கன உத்தரவு அளவை (Economic Order quantity) (EOQ) மாற்றி அமைத்தல் சுலபம். ஆனால், மாறுபாடாக, பூர்த்திசெய் அமைப்பானது (replenishment) உத்தரவிடப்படும் தனிப்பட்ட பொருள்களின் மொத்த அளவின் மேல் ஏதேனும் கட்டுப்பாடுகளைப் பிறப்பிக்கும்போது பயனுள்ளதாகவும், விரும்பத்தக்கதாகவும் பூர்த்தி செய் அமைப்பானது ஒரு குறிப்பிட்ட தேதிகளில் உத்தரவு பூர்த்தி செய்யப்படும் என்ற நிலையின்கீழ் விரும்பப்படுகிறது.

ஒரு குறிப்பிட்ட கால கட்டத்திற்குப்பின் ஆய்வு முறை செய்யப்படும் அமைப்பின் முக்கிய நலனானது, குறித்த ஒழுங்கான தேதிகளில் உத்தரவு பிறப்பிக்கப்படுவதிலேயோ அல்லது உற்பத்தி பூர்த்தி செய்யப்படுவதிலேயோ அமையும். இத்தகைய அமைப்பின் கீழ்த்திட்ட மிடுதலும் கட்டுப்பாடும் நலம் பாராட்டப் படுகின்றன.

எவ்விதஅமைப்பைத்தேர்ந்தெடுத்தாலும் கீழ்குறிப்பிட்டுள்ள இரண்டு விவரங்களை மனத்தில் கொள்ளவேண்டுவது அவசியம். முதலாவதாகச் சரக்குப் பட்டியல் பொருள்களை உத்தரவிடுவதில் ஒழுங்கு நலம் உறுதிப்படுத்தப் படவேண்டும். இரண்டாவதாக சரக்குப்பட்டியலில் பொருள்களையும் அவற்றின் விற்பனையையும் சரக்குப்பட்டியலின் முதலீட்டையும் ஆதாரமாகக்கொண்டு இரு பிரிவுகளாகப்பிரிக்கப்படவேண்டும். பொருள்களின் விற்பனைத் திறன் அதிகமாயின், கட்டுப்பாட்டு முயற்சியும் அதிகமாக்கப்பட வேண்டும். பொருள்களை A, B, C என்று மூன்று விதமாகப் பாகு படுத்துவதன் மூலம், மிகுந்த விற்பனை உள்ளதும், மிகுந்த பய னுள்ளதும் ஆகிய சரக்குப்பட்டியல் பொருள்களின்மீது அதிக மான கட்டுப்பாடு முயற்சிகளை ஏவுவதற்கேற்ப ஒரு திறனுள்ள சரக்குமுதல் நிர்வாகத்தை அமைக்கலாம். சரக்குப் பட்டியல் பொருட்களெல்லாம் A, B, C என்ற மூன்று பிரிவுகளாகக்கீழ்கண்ட வாறு பாகுபடுத்தலாம்.

பாகுபாடு A: மிக அதிகமான முதலீட்டைக் கொண்ட உச்ச கட்ட 5% முதல் 10% வரையான பொருள்கள்

பாகுபாடு B: மிதமான முதலீட்டைக்கொண்ட நடு 20%-லிருந்து 50% வரையான பொருள்கள்.

பாகுபாடு C: மொத்த முதலீட்டில் ஒரு சிறிய பின்னத்தைத் தன்னுள்ளடக்கிய மிஞ்சியிருக்கும் பெரியதொகுதி.

மற்றுமோர் அணுகு முறையானது, சாதாரணமான சிக்கன உத்தரவுப் பொருள்களை ஒவ்வொன்றாகக் கணக்கிட்டு அவற்றை, அவற்றின் சராசரி பயன்படு தன்மையைக் கொண்டு மாதக் கணக்கில் பாகுபடுத்தலாம்.

நிச்சயமான சிக்கனமான உத்தரவு அளவு :

இவ்வத்தியாத்தில் பொருளாதார நோக்கின்கீழ் அமைந்த உத்தரவிடு அளவைகளைத் தீர்மானித்தற்குரிய விதிமுறையைநாம் உருவாக்குவோம். மேலும், அமைப்பிலுள்ள சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்பீட்டில் ஏற்படும் பிழைகளில், இத்தகையஉத்தரவுஅளவுக்கு எத்தகைய பாதிப்பை ஏற்படுத்துகின்றது என்பதையும் நோக்கு வோம். தேவையின் அளவினை நாம் அறிந்திருக்கிறோம் எனவும் அத் தேவையானது ஒரு மாறிலியாக அமைந்துள்ளது எனவும், சீரானமுறையில் நிகழும் தன்மையுடையது எனவும் ஆன ஊகங் களைக்கொள்வோம். ஆண்டிற்கு உத்தரவிடப்படும் பொருள்களின்

விலையும், உத்தரவிடப்படும் பொருள்களைப் பாதுகாப்பதற்கான ஆண்டு விலையையும் சேர்ந்த கூட்டுத் தொகையைக் குறைவு படுத்திப் பெறும் பொருளின் உத்தரவு அளவே நமக்குத் தேவை யானதாகும். ஒரு சமயத்தில் உத்திரவிடப்படும் பொருள்களின் விலையானது, உத்திரவிடப்படும் பொருளின் எண்ணிக்கையைச் சார்ந்திராமல், ஒரே சீரானது என்று ஊகம்செய்து செய்து கொள் வோம்.

D = சராசரி ஆண்டுத் தேவை (பொருள்களின் எண்ணிக் கையில்)

A= ஓர் ஆண்டிற்கு, ஒரு பொருளைப்பாதுகாப்பதற்குரிய விலை.

Q = உத்தரவிடப்படும் அளவு (பொருள்களின் எண்ணிக் கையில்.

C = ஒரு பொருளின் விலை.

என்டனவற்றை கருது. உத்தரவுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறைப்பதன்மூலம், உத்தரவுவிலைகள் குறைக்கப்படலாம் என்பது சண்கூடு. ஆனல்,உத்தரவுகள் எண்ணிக்கை குறைக்கப்பட்டால் உத்தரவின் அளவு அதிகரிக்கும். எனவே, சரக்குப்பட்டியலின் தேக்க விலையும் (carrying cost) அதிகரிக்கும். மறுபக்கத்தில், உத்தரவின் எண்ணிக்கை அதிகமாக்கப்பட்டால் உத்தரவு விலை அதிகரிக்குமென்றும், உத்தரவின் அளவு குறையுமென்றும் தெரிவதால் சரக்குப்பட்டியலின் தேக்க விலையும் குறையும். எனவே, இவ்விரண்டு எதிர்மாருன விலைகளைக் கவனத்தில் கொண்டு மிகக் குறைந்த மொத்த மாறி விலையைப் பெறுவதற்கேற்ப, ஒரு சம நிலையை மேற்கொள்ள வேண்டும். D=சராசரி ஆண்டுத்தேவை, Q= உத்தரவிடப்படும் அளவு. எனவே $\frac{D}{Q}$ உத்தரவுக்களின் எண் ணிக்கையாகும். ஆண்டு உத்தரவு விலை $= \frac{D}{Q} A$.

சரக்குப் பட்டியலின், எந்த ஒரு நேரத்திலிருக்கும் பொருளின் அளவு, பூச்சியத்திலிருந்து Q அலகுகள் வரை மாறுபடும். எனவே சரக்குப்பட்டியலின், சுமைவிலைச் செலுத்த வேண்டிய அளவானது : $\frac{Q+0}{2} = \frac{Q}{2}$ அலகுகள்.

ஆண்டுச் சுமை விலை $= \frac{ac \cdot Q}{2}$

எனவே, மொத்த மாறும் விலை = (T.V.C.)

$$= \frac{ac \cdot Q}{2} + \frac{DA}{Q}$$

மொத்த மாறு விலையை மிகக் குறைந்ததாக்கும், பெரிது முகந்த உத்திரவிடப்படும் அளவு Q^* ஆனது.

$\frac{\partial TVC}{\partial Q} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளால் கொடுக்கப் படுகிறது.

$$\frac{\partial TVC}{\partial Q} = \frac{ac}{2} - \frac{DA}{Q^2} = 0 \quad \text{அல்லது}$$

$$\therefore Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ac}}$$

எனவே Q^* பெரிது முகந்த மதிப்பு, $\frac{acQ^*}{2} = \frac{DA}{Q^*}$

அல்லது $\frac{ac}{2} = \frac{DA}{Q^2}$

$$\frac{acQ^*}{2} = \frac{DA}{Q^*}$$

உத்தரவிடப்படும் அளவு Q^*-ன் பெரிது முகந்தமதிப்பினைப் பெறுவதற்கு, உத்தரவு விலையும், சுமை விலையும் சமநிலையாக்கப் படுகின்றன. மிகக் குறைந்த மாறுவிலை $= TVC^* = acQ^* = \sqrt{2A_aD_c}$. Q^* ஆனது சிக்கனமான உத்தரவு அளவு (EOQ) எனவும் அமைக்கப்படும்.

$$TVC^* = \frac{acQ^*}{2} + \frac{DA}{Q^*}$$

$$= \frac{ac\,Q^*}{2} + \frac{a_cQ^*}{2}$$

$$= ac\,Q^*$$

உதாரணமாக, பொருள்களெல்லாம் கீழ்கண்ட முறையில் பாகுபடுத்தப்படலாம் :

1. ஒரு மாதத்திற்கு ஒரு முறையேனும் சராசரியாக உத்தர விடப்படும் பொருள்கள்.

2. குறைந்தது காலாண்டிற்கு ஒருமுறை ஆனால், ஒரு மாதத்திற்கு மேல்தான் ஒரு முறை உத்தரவிடப்படும் பொருள்கள்.

3. ஆண்டிற்குக் குறைந்தது ஒருமுறை ஆனால், நான்கு முறைகளுக்கு மேற்படாமல் உத்தரவிடப்படும் பொருள்கள்.

4. ஒரு வருடத்திற்கு ஒருமுறையைவிடக் குறைவாக உத்தரவிடப்படும் அல்லது தருவிக்கப்படும் பொருள்கள்.

ஒரு சரக்குப்பட்டியலிலுள்ள எல்லாப் பொருள்களையும் ஒரே மாதிரியாக, ஒரே கட்டுப்பாட்டு முறைகளின்கீழ்க் கொள்ள வேண்டுவதென்பது அவசியமானதுமல்ல, சிக்கனமானதுமல்ல என்பது நினைவு கொள்ளத்தக்க தொன்றாகும்.

சிக்கன உத்தரவு அளவு (EOQ) Q^*-வைக் காணப் பயன் படுத்தப்படும்.

$Q^* = \sqrt{\dfrac{2AD}{ac}}$ என்னும் சூத்திரம். EOQ சூத்திரம் அல்லது

$\dfrac{\text{வில்சன்–ஹாரிஸ் வர்க்கமூலம் சூத்திரம்}}{\text{(Wilson–Harris Square root)}}$ எனப்படுகிறது.

Q^*-க்கான கோவை (ரூபாய்) $Q^*_{Rs} = c.Q^*$

$$= \sqrt{\frac{2A}{a}}\, D_c = k\sqrt{Dc}$$

$$k = \sqrt{\frac{2a}{a}}\,.$$

k ஆனது "EOQ மாறிலி" எனப்படும்.

Q^*-க்கான கோவை (ஆண்டுக் கையிருப்பில்).

$$\frac{Q^*}{2} = \sqrt{\frac{\frac{2AD}{ac}}{D^2}} = \sqrt{\frac{2A}{ac\,D}} = \frac{k}{\sqrt{Dc}}\,.$$

ஓர் ஆண்டில் உத்தரவிடப்படும் பெரிதுமுகந்த எண்ணிக்கைகளுக்கான கோவை.

$$F^* = \frac{D}{Q^*} = \sqrt{\frac{ac\,D}{2A}} = \sqrt{\frac{Dc}{k}}\,.$$

ஆண்டுத் தேவை (ரூபாயில்), "CD" எனக் குறிப்பதால்

(i) ரூபாயிலான சிக்கன உத்தரவு அளவானது, ரூபாயிலான தேவையின் வர்க்கமூலத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும். இந் நேர்விகித மாறிலியானது 'EOQ'" மாறிலி "k" ஆகும்.

(ii) உத்தரவிடப்படும் பெரிதுமுகந்த எண்ணிக்கையானது, ரூபாயிலான தேவையின் வர்க்கமூலத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும். இந் நேர் விகித மாறிலியானது $\frac{1}{k}$ ஆகும்.

(iii) மிகக் குறைந்த மொத்த மாறுவிலையானது, ரூபாயிலான தேவையின் வர்க்க மூலத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும். இந் நேர்விகித மாறிலியானது $\sqrt{2Aa}$ ஆகும்.

அளவுத் தள்ளுபடி

ஒரு சில சமயங்களில், மிக அதிக அளவிலே பொருள்கள் வாங்கப்படும்போது, தள்ளுபடி கொடுக்கப்படுகின்றது. ஒரு சமயத்தில் q அளவையோ அல்லது மேற்பட்ட அளவையோ உத்தரவிடும்போதுதான், அளவுத் தள்ளுபடி, அளிக்கப்படுகின்றது என்று கொள்வோம். சிக்கன உத்தரவு அளவு EOQ ஆனது, q-வைவிட அதிகமானதாக இருந்தால், நாம் தள்ளுபடியின் பயனை உடனடியாக நுகர்கிறோம். ஆனால், உத்தரவிடப்படும் பெரிதுமுகந்த அளவின் பதிப்பு (ரூபாயில்) Q^*_{Rs} ஆனது Q_{Rs}ஐவிடக் குறைவானதெனில், உத்தரவிடப்படும் தொகையை Q_{Rs}ஐவிட அதிகப்படுத்தி அதன்மூலம் பெறும் தள்ளுபடியால் ஏதேனும் இலாபம் உண்டாகும் என்று சிந்திக்க வேண்டுவது அவசியம். பகுத்தறிவுக்குட்பட்ட ஒரு முடிவினை மேற்கொள்ள, அதிகப்படியாக உத்தரவிடுவதால் ஏற்படும் விளைவுகளை ஆய்வது அவசியம். கீழ்க்கண்ட விளைவுகளை நம்மால் எளிதில் அடையாளம் கொள்ள முடியும் :

(i) ஒரு வருடத்தில் பொருள்களைப் பெறுவதற்குரிய விலையிலேயே ஒரு குறைவு காணப்படுகிறது.

(ii) உத்தரவிடப்படும் அளவு அதிகமாக்கப்பட்டால், அப்பொருளின் பாதுகாப்பு விலை அதிகரிக்கின்றது.

(iii) உத்தரவிடப்படும் அளவு அதிகமாக்கப்படுவதால், உத்தரவுக்கான எண்ணிக்கைக் குறைகிறது.

எனவே, உத்தரவு விலையானது குறைகிறது.

உத்தரவிடப்படும் அளவு அதிகரிப்பதால், பொருள் பாதுகாப்பு விலையில் காணப்படும் உயர்வானது பொருள்களின் விலையில் அளிக்கப்படும் தள்ளுபடியால் உண்டாகும் குறைவைவிடச் சிறிதானால், சேமிப்புக்கான வாய்ப்புகள் அதிகரிக்கின்றன. மேலும் பொருள் பாதுகாப்பு விலையானது, உத்தரவு விலையைக்

காட்டிலும் வேகமாக அதிகரிக்கின்றது. உத்தரவு விலையோ q_0 அளவுக்கும் அதிகமாகக் கொள்முதல் செய்கையில் இறங்கு முகமாக இருக்கின்றது. எனவே, அதிகரிக்கப்பட்ட சுமை விலையானது உத்தரவு விலையின் குறைவு தள்ளுபடி சேர்ந்த தொகைக்குச் சமமாகும் ஒரு நிலை ஏற்படுகிறது. இந்த முனையானது (break even point) 'ஆதாயமோ—இழப்போ இல்லாத நிலைப் புள்ளி'யாகும்.

இந்தப் புள்ளியானது கீழ்க்கண்டவாறு பெறப்படலாம் :

$\therefore$ $d =$ தள்ளுபடி வீதம் அல்லது ஆண்டுத் தேவை மதிப்பில் $a\%$ தள்ளுபடி எனவும்.

$y = C \cdot D =$ ஆண்டுத் தேவையின் மதிப்பு

$dy =$ மொத்த விலைக்கழிவு என்றும் கொள்க.

EOQ = (சிக்கன உத்தரவு அளவு—ரூபாயில்)

$$Q^*_{RS} = \sqrt{\frac{2ACD}{a}}$$

"q" என்பது தள்ளுபடி பெறுவதற்குத் தேவைப்படும், உத்திரவு அளவு எனக் கொள்க.

எனவே, Q^*_{RS} என்ற அளவை, q_{RS} என்ற தேவைக்குப் பதிலாக வாங்குவதால் ஏற்படும் அதிக விலைகள்

$$= \left(\frac{q_{RS} - Q^*_{RS}}{2}\right) a.$$

உத்திரவு விலையில் ஏற்படும் கழிவு :

$$= \left(\frac{y}{Q^*}\right)A = \frac{(1-d)}{q} A$$

"break even point" தீர்மானிப்பதற்கு Q^*_{RS}-க்குப் பதிலாக q_{RS} பெறுவதால் ஏற்படும் அதிக விலையை, விலைத் தள்ளுபடியும் உத்திரவிடு விலையில் ஏற்படும் குறைவும் சேர்ந்த கூடுதலுக்கு ஒப்பிடுவதன்மூலம் கிடைக்கும் கோவையைப் பயன்படுத்தலாம்.

எனவே,

$$\left(\frac{q_{RS} - Q^*_{RS}}{2}\right)a = \left(\frac{Y}{Q^*_{RS}}\right)A - \frac{Y(1-d)}{q_{RS}} A + dy$$

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களிலும் q_{RS} ஆல் பெருக்க

$$\frac{q^2_{RS}}{2} - \frac{Q^*_{RS}a \cdot q_{RS}}{2} = \frac{YA \cdot q_{RS}}{Q^*_{RS}} - Y(1-d)A + dy\, q_{RS}$$

ஆனால்,

$$\frac{YA}{Q^*_{RS}} = a\cdot\frac{Q^*_{Rs}}{2} \text{ EOQ } [-\text{ சூத்திரம்}] \quad [\because \quad Y = CD]$$

$$\frac{acQ^*}{2} = \frac{DA}{Q^*}$$

$$D = \frac{Y}{c}$$

$$Q^*_{Rs} = cQ^*(i_e)\,\frac{aQ^*_2}{2} = \frac{YA}{cQ^*}$$

$$= \frac{YA}{Q^*_{Rs}}$$

$$\therefore \frac{a}{2}\, q^2_{Rs} + (-dv - Q_{Rs}{}^*a)\, q_{Rs} + YA\,(1-d) = 0.$$

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$q_{Rs} = \frac{dy + Q_{Rs}a \pm \sqrt{(dy + Q^*_{Rs}\cdot a)^2 - 2a.\,A\,Y(1-a)}}{a}$$

இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள உத்தரவு நிலைகளுக்கு ஆண்டுத் தேவை மதிப்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு break even புள்ளிகளைக்கொண்ட அட்டவணையைத் தயாரிக்கலாம். Q^*_{RS} அளவுக்குமேல் வாங்குகின்ற நேரத்துத் தள்ளுபடி அளிக்கப்படும் என்று கொள்க. பிறகு தமைப்படும் உத்தரவு விலையானது அட்டவணையிலுள்ள break even உத்தரவு மதிப்புகளைவிட அதிகமானதா, குறைவானதா என்பதை அட்டவணை மூலமாகஅறியலாம். உத்தரவுவிலைரூபாய் 5.00தள்ளுபடி வீதம் 10%[A=Rs.5. a = 10%) இவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்ட அட்டவணைக்குக் கீழ்கண்ட பட்டியல் மாதிரியாகும்.

பட்டியல் 1: (பட்டியல் அடுத்த பக்கம் பார்க்க)

பட்டியலை உபயோகிக்கும் விதம்

ஆண்டுத் தேவை மதிப்பிற்கு எதிராகக் (கொடுக்கப்பட்ட தள்ளுபடி வீதத்திற்கு) கொடுக்கப்பட்ட தொகையைக் கண்டு பிடிக்கவும். இந்தத் தொகைக் குக் குறைவாகப் பொருள் வாங்கப் பட்டால் (அதே தள்ளுபடியைப் பெற்று)நிகர சேமிப்பு ஏற்படும் தள்ளுபடியைப் பெறுவதற்கு வாங்கப்பட வேண்டிய உத்தரவு அளவு, அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவை விட

அதிகமாயிருந்தால், தள்ளுபடியைப் பெருமலிருத்தலே இலாபகர மானதாகும்.

பட்டியல்—1

ஆதாயம்—இழப்பு அற்ற உத்திரவு மதிப்புகள்

(Break-even order values)

ஆண்டுத் தேவை மதிப்பு λ	EOQ (ரூபாயில்)	தள்ளுபடி வீதம் (d)			
		0·01	0·02	0·03	0·04
1·00	10·00	11·83	12 65	13 00	13 90
4·00	20·00	24 87	27·10	29·00	30·70
9·00	30·00	39·50	43·16	46·70	49·90
16.00	40·00	53.70	60·46	66·10	71·20
25·00	50·00	69·26	78·98	87·20	94·60
36·00	60·00	85.53	98·63	109·80	11[illegible]·90
81·00	90·00	138·10	164 00	186·00	207·20
100·00	100·00	156·90	187·80	215·00	240·00
400·00	200·00	374·16	478·00	572·00	660·00
1600·00	400·00	954·00	1321·20	1667·00	2000·00
3600·00	600 00	1711·90	2498 70	3252 00	3[illegible]90·00
8100·00	900·00	3166·00	4877·20	6540·00	8190·00
10,000·00	1000·00	3734·90	5832·00	7870·00	9903 00

மாதிரி

ஒரு பொருள் 1200 அலகுகள் வாங்கப்பட்டால் 2% விலைத் தள்ளுபடி அளிக்கப்படுகிறது என்று கொள்க. $D = 1200$, $A =$ Rs. 5/- $A = 0·10$ $C =$ Rs. 3/- என்றும் கொள்க.

Q^*-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. 2% விலைத்தள்ளுபடியில் இதனைப் போன்ற 6 மடங்கு அளவு வாங்குதல் இலாபகரமானதா?

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,ACD}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 1200}{0 \cdot 10 \times 3}} = 200.$$

தீர்வு

அட்டவணையிலிருந்து $d = 0 \cdot 02$, $y = 3600$ ஆகியவற்றிற்கு எதிராக (break–cven) மதிப்பு Rs. 2498·70 தள்ளுபடி அளவில் ரூபாய் மதிப்பு 3528. [3600 − 3600 × 0·02] தள்ளுபடி பெறுவதற்குத் தேவையான உத்தரவு அளவின் மதிப்பு 3528 ஆனது அட்டவணை மதிப்பைவிட அதிகமானதால் நாம் தள்ளுபடி பெறுவது இலாபகரமானதல்ல என்று முடிவு செய்கிறோம்.

EOQ சூத்திரத்தின் கூருணர்வு ஆய்வு

தேவை உத்தரவு விலை, நடப்பு வீதம் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுவதற்குத் தேவையான புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல், அவற்றைப் பகுத்தறிதல் ஆகியவை பிழைகளின் ஆட்சிக்குட்பட்டதாகும். இத்தகைய பிழைகளின் மொத்த மாறுவிலையின்மேல் எத்தகைய விளைவுகளை ஏற்படுத்தும் என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

$TVC+$ = சரியான புள்ளி விவர மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துகையில் ஏற்படும் மொத்த மாறுவிலை.

TVC' = சரியற்ற மதிப்புகளைப் பயன்படுத்துவதால் உண்டாகும் TVC என்றும் கொள்க. பிழையான மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி உண்டாக்கப்படும் எவ்வித மதிப்புகளும் "/" குறியீட்டின் மூலம் விவரிக்கப்படும்.

$$\gamma_A = A', A \quad \text{இவற்றின் விகிதம்} = \frac{A'}{A}$$

$$\gamma_Q = \frac{D'}{D}, \gamma_c = \frac{C'}{C} \quad \gamma_a = \frac{\bar{a}'}{a}$$

$$\gamma_D = \frac{\gamma_A \gamma_D}{\gamma_D \gamma_c} = \frac{\left(\frac{A'}{A}\right)\left(\frac{D'}{D}\right)}{\left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{C'}{C}\right)} = \frac{A'D'}{a'C'} \Big/ \left(\frac{AD}{aC}\right)$$

ஆனல்,

$$Q' = \sqrt{\frac{2A'D'}{a'c'}},\ Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{ac}}\quad \frac{Q'}{Q^*} = \sqrt{\frac{A'D'}{a'c'} \Big/ \frac{AD}{ac}}$$

எனவே, பிழையான மொத்த வேறு விலைக்கும், பிழையற்ற மொத்த விலைக்கும் உள்ள வித்தியாசமானது.

$$\frac{TVC'}{TVC} = \frac{r_Q + 1}{2\sqrt{r_Q}}$$

ஆனல்,

$TVC = \frac{1}{2}\ Q'\ ac + \frac{D}{Q'}\ A.$ ஏனெனில் குழுமத்தால் உத்தர விடப்படும் பொருள்களின் உண்மையானவிலை A எனவும் போக்குவரத்து விலை "a" எனவும் அமைகிறது. சுட்டுருக்களைப் பற்றிய தவறுன ஊகங்களுடன் கணக்கிடப்படுவதால், உத்தரவு அளவு மட்டுமே பிழையின்பாற்பட்டதாகும். எனவே,

$$TVC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2A'D'}{a'c'}}\ ac + \frac{D}{\sqrt{2A'D'}}\ \sqrt{a'c'}$$

$$= \frac{1}{2}\ \sqrt{A_a D_c}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ADa'c'}{ADa'c'}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A\ D\ a'\ c'}{A'\ D'\ a\ c}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ TVC^*\left[\sqrt{\frac{\gamma_A \gamma_D}{\gamma_a\ \gamma_c}} + \sqrt{\frac{\gamma_a\ \gamma_c}{\gamma_A \gamma_D}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ TVC^*\left[\sqrt{\gamma Q} + \frac{1}{\sqrt{\gamma Q}}\right]$$

$$\frac{TVC'}{TVC^*} = \frac{1}{2}\ \frac{r_Q + 1}{\sqrt{r_Q}}\ \text{(Proved)}$$

பிழைக்கு அப்பாற்பட்ட நிலையில், எவ்விதப் பிரச்சினையாலும்

$$\gamma_A = \gamma_D = \gamma_c = \gamma_a = \gamma_q = 1.$$

பின்பு,

$$\frac{TVC'}{TVC^*} = \frac{1+1}{2\sqrt{1}} \neq e,\ TVC' = TVC$$

மாதிரிக் கணக்கு

ஒரு குழுமத்தின் உத்தரவு விலைக்கும், நடப்பு விகிதத்திற்கும் உண்மையான மதிப்புக்களானது முறையே ரூ 10, 16 ஆக அமைகிறது என்று கொள்க. ஆனால், உண்மையில் அக் குழுமமானது ரூ 5, 16% என்றே மதிப்புகளைக் கொள்கிறது. இப் பிழையால், மொத்த மாறு விலையுள்ள உத்திரவிலைக்கு ஏற்படும் விளைவுகளை ஆய்க.

தீர்வு

$$\gamma_A = \frac{A'}{A} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \gamma_Q = \gamma_D = \gamma_C = 1$$

$$\gamma_Q = \frac{1+0.5}{1+1} = 0{\cdot}5, \quad \therefore \frac{TVC'}{TVC} = \frac{1{\cdot}5}{2\sqrt{0{\cdot}5}} = 1{\cdot}0601$$

எனவே, உண்மையான உத்திரவு விலையைப்போல பாதியாகவே உள்ள ஓர் உத்திரவு விலையை (பிழையான) பயன்படுத்துவதால், மொத்தமாறு விலையில் 6% ஏற்றம் ஏற்படுகிறது.

TVC-யில் ஏற்படும் பிழையானது, தனிப்பட்ட சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்புகளில் ஏற்படும் பிழைகளால் பெருமளவு பாதிக்கப்படுவதில்லை என்பது தெளிவான ஒன்றாகும். மேலும் TVC-யில் ஏற்படும் பிழையானது புள்ளி விவர மதிப்புகளின் விகிதங்களின் விகிதத்தால்தான் பாதிக்கப்படும் என்பதும், அத்தகைய பிழையும் தனிப்பிழை விகிதத்தோடு ஒப்பிடுகையில் புறக்கணிக்கத் தக்கதே.

உத்தரவுப் பட்டியல்கள் (Ordering Tables)

அதிகமான பொருள்களை உள்ளடக்கிய சரக்குப் பட்டியல்களில் சிக்கனஉத்தரவு அளவைத் திரும்பத் திரும்பக் கணக்கிட வேண்டிய நிலையில் கையிருப்பைப் பகுத்தறியும் வித்தகர்களின் துன்பத்தைத் தீர்ப்பதெற்கன பல கணக்கீடு முறைகள் உண்டாக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய கணக்கீடு முறைகளில் நேமவரைபட முறை, உத்தரவுப்பட்டியல் முறை என்ற இரு முறைகள் பயன்படுகின்றன. இங்கு உத்தரவுப் பட்டியலை எவ்வாறு அமைக்கிறோம் என்பதனைக் கீழே விளக்குவோம்.

Q-விலிருந்து *Q**-ன் மாறுபாடு மொத்த விலைகளைக் பொறுத்த மட்டில் ஏற்படுத்தும் உயர்வானது, *Q*-வோடு சம்பந்தப்பட்ட குறைவு அல்லது உயர்வைக் காட்டிலும் அளவில் சிறியதேயாத

லால், பொருள்களை தேவை மதிப்பை வரைபாடாகக் கொண்ட குழுக்களாகப் பிரித்தல் எளிமையானதும், சிக்கனமானதும் ஆகும். இவ்வாறு பாகுபடுத்தினால் ஒரு குழுவில் அமையும் எல்லாப் பொருள்களுக்கும் ஒரே விதமான பூர்த்தி செய்ய வேண்டிய இடைவெளிக் காலத்தை அமைக்கலாம்.

பூர்த்தி செய் கால இடைவெளி $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 6, 12, 24, 36 மாதங்களாக உள்ள நிலையைக் கருத்தில் கொள்க. அதாவது 3 மாதம், ஒரு மாதம், 2,3 மாதங்கள் வீதங்களுக்குக்கொருமுறை சரக்குப் பட்டியல் பூர்த்தி செய்யப்பட வேண்டியுள்ளது. எனவே ஆண்டிற்கு 24, 12, 6 முறைகள் உத்தரவுகள் பூர்த்தி செய்யப் படுகின்றன. இப்பொழுது இரண்டு அடுத்தடுத்த சரக்குப்பூர்த்தி செய்யப்படாத இடைவெளிக் காலத்தை N & N' என்று குறிப் பிட்டுக் கருத்திற் கொள்க. இதில் $N \neq N'$. $Y = C$ 2 ஆண்டுத் தேவை (ருபாயில்) என்றிருக்கட்டும். ஒரு பொருளுக்கு ஆதாயம்—இழப்பு—அற்ற மதிப்பை (Break even value) அதனது மொத்த மாறு விலைகளை ஒப்பிட்டுத் தீர்மானிப்போம். ஒரு சமயத்தில் 'N' மாதத் தேவையைப் பூர்த்தி செய்ய உத்திரவு பிறப்பிக்கப்படும்போது $\frac{12}{N}$ உத்திரவுகள் பிறப்பிக்கப்பட வேண் டும். எனவே, உத்திரவு விலை $\frac{12A}{N}$; உத்திரவு மதிப்பு $\frac{Y}{12}$ N ; சரக்குப் போக்குவரத்துக் கட்டணம் $\frac{YNa}{12 \times 2}$

Y-ன் ஆதாயம்—இழப்பற்ற மதிப்பைப் பெறுவதற்கு N-ன் மொத்த மாறும் விலையை N'-ன் மொத்த மாறி விலைக்கு ஒப்பிடுகிறோம்.

$$\frac{12A}{N} + \frac{YNa}{24} = \frac{12A}{N'} + \frac{YN'a}{24}$$

$$\text{i.e. } \frac{Ya}{24}(N-N') = 12A\left(\frac{1}{N'} - \frac{1}{N}\right) = 12A\left(\frac{N-N'}{NN'}\right)$$

$$\text{i.e. } \frac{Ya}{24} = \frac{12A}{NN'}$$

$$\text{அதாவது } Y = \frac{288}{NN'}\frac{A}{a}$$

மேற்குறித்த சமன்பாடானது பல்வேறு (N_1, N') ஜோடி மதிப்புகளுக்குத் தீர்க்கப்பட்டுக் கிடைக்கும் Y-மதிப்புகள்,

'உத்தரவுப் பட்டியல்' தயாரித்துப் பயன்படுகின்றன. பல்வேறு ஆண்டுத் தேவையை (ரூபாய்களில்) வரையறையாகக் கொண்ட சிக்கன உத்தரவு காலத்தை இப் பட்டியல் வெளிப் படுத்துகிறது. உத்திரவு விலை 20 ரூபாய்; தேக்க வீதம் 20% உள்ள நிலையில் அமைக்கப்பட்ட பட்டியல் கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

பட்டியல்

"சிக்கன நிறைவாதும் கையேடு"

EOQ அளவு (மாதக் கையிருப்புகளில்)
EOQ in months of stock EOQ (மாதக் கையிருப்பில்)

$$\frac{A}{a} = 100$$

மதிப்பிடப்பட்ட ஆண்டுத் தேவை (ரூபாயில்) $Y = CD$	N மாதத்திற்கு ஒருமுறை அல்லது சமயத்தில் N மாதத்திற்கான தேவை உத்தரவிடப்படும் (N)
100-க்குக் குறைவாக	24
100 — 400	12
400 — 1600	6
1600 — 4800	3
4800 — 14400	2
14400 — 57600	1
57600-க்கு மேற்பட்டது	½

ஆண்டுத் தேவை வீதத்தை (ரூபாய்களில்) கணக்கிடத் தேவையான குறிப்பிட்ட கோவையானது (expression) $\frac{228 \times 20}{24 \times 12 \times 0 \cdot 2}$ = Rs. 100/- என அமைக்கப்படும்.

இதைவிட 0·01 அளவு அதிகமான ஒரு மதிப்பு, அட்டவணையின் இரண்டாவது வரியின் தேவையின்கீழ்எல்லையாக அமைகிறது. மேல் எல்லையான $\frac{228 \times 20}{12 \times 6 \times 0 \cdot 2}$ = Rs. 400/-

மேற் குறிப்பிட்ட அட்டவணையை அமைக்கப் பயன்படுத்தப் படும் உத்தரவிடும் காலத்தை தேர்ந்தெடுத்தல் நமது விருப்பத் திற்குட்பட்டதே மேற் குறிப்பிட்ட அட்டவணையில் குறிப்பிடப் பட்டுள்ள உத்தரவு காலமானது எல்லா ஆண்டுத் தேவை மதிப்பு களுக்கும் (ஒரு குறிப்பிட்ட வரையரையில்) பெரிதுமுகந்ததல்ல. ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லையில், ஒரு தனி தேவை மதிப்பிற்கே, அந்த மதிப்பு பெரிதுமுகந்ததாகும். உதாரணமாக, Rs. 1800/- ஆண்டுத்தேவையுள்ள ஒரு பொருளுக்கு உத்தரவு அளவில் உண் டாகும் பிழையினை EOQ-வினைக் கணக்கிடுவதன்மூலம் பெறலாம்.

EOQ (மாதங்களில்)

$$= \frac{12Q^*}{D} = 12\sqrt{\frac{2A}{aCD}} = 12\sqrt{\frac{2 \times 20}{2 \times 1800}}$$

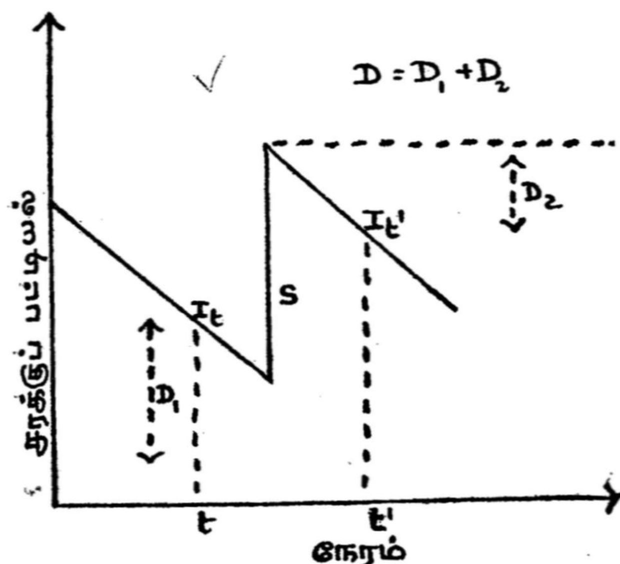
$$= \frac{12}{3} = 4.$$

எனவே, பிழையான அளவிற்கும் ''பெரிதுமுகந்த சிக்கன உத்தரவு அளவிற்கும்'' இடையே உள்ள விகிதமானது ஏட்டில் குறிப்பிட்டுள்ளபடி $\frac{3}{4}$ 0·75 எனவே, $\sqrt{\gamma} = 0{\cdot}75$ எனவே, மொத்த மாறுவிலையில் காணப்படும் பிழையானது 6%-க்கும் குறைவானதாக அமைகிறது. மிக அதிகமான இடைவெளி கொண்ட குழுக்களாகப் பொருள்களை அமைத்தாலும், விழுக் காட்டிலும், ரூபாயிலும் மிகக் குறைந்த மொத்த மாறுவிலையே ஏற்படுகிறது. இந்த அட்டவணையானது 5 ஆண்டு உத்தரவு பொருள் [மிகக் குறைந்த தேவை (ரூபாயில்) உடைய அதனையே மிக அதிகமான தேவை பெறுதற் பொருட்டு வார அல்லது தின உத்தரவுப் பொருளாக மாற்றுவதையும் அனுமதிக்கின்றது. இவ்வட்டவணையில் சேர்க்கப்படவேண்டிய உத்தரவு காலம் 'N'-ன் எண்ணிக்கையும் அவை எப்படிப்பட்ட இடைவெளிக் கிடையே அமையவேண்டும் என்பதும் சரக்குப்பட்டியலமைந்த பூர்த்தி செய்யப்படவேண்டிய பொருள்களின் எண்ணிகையைச் சார்ந்ததாகும். மேலும், உயர்ந்த மற்றும் மிகக் குறைந்த தேவை வரையறையின்கீழ் அடங்கும் பொருள்களின் பரவலும் இதனை உறுதி செய்யும். ஏராளமான பொருள்களை உள்ளடக்கிய மிகவும் வித்தியாசமான பிரிவுகளை உடைய மிக மாறுபாடான $\frac{2A}{a}$ விகிதங்களை உடைய சரக்குப்பட்டியலில் மற்ற $\frac{2A}{a}$ மதிப்பு களுக்கு ஒத்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்தக் கிடங்கு எழுத்தர் (clerk) ஓர் அலகு விலைக்கு ஏற்ற ஆண்டுத் தேவை (ரூபாய்

களில்)யை அலகுகளிலும் பெறவேண்டும். தேவையான உத்தர விடு காலத்தைக் கண்டபின், அதை மாதத் தேவையினுல் பெருக்குவதன்மூலம் அதை அலகுகளுக்கு மாற்றவேண்டும்.

சரக்குப் பட்டியல் முறைமையின் கட்டமைப்பு
(Structure of Inventory Systems)

மாதிரி எடுத்துக்காட்டாக விளங்கும் ஒரு சரக்குப் பட்டியல் முறைமையின் கட்டமைப்பினை கீழ்க்கண்டுள்ள வரைபடம் மூலம் விளக்குவோம். இப்படிப்பட்ட சரக்குப் பட்டியல்கள் முறைமை கள் ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவு 't'-ன் கையிருப்பையும் சிறிது காலக்கழிவிற்குப் பின் மற்ருெரு கால அளவு 't''-ன் கையிருப்பை யும் தொடர்புபடுத்தும் ஒரு சமநிலைச் சமன்பாட்டைப் பெற்றிருக் கின்றன.



படம்: மாதிரி எடுத்துக் காட்டான ஒரு சரக்குப்பட்டியல் முறைமையின் கட்டமைப்பு. $I_t = I_{t1} + S - D$.

I_t என்பது 't' என்ற காலத்தின் போது நமது கையிருப்பு என்று கொள்க. சரக்குப் பட்டியலுக்கு 'S' என்ற அளவானது (t, t' எனப்படும் இரு காலக்கட்டங்களுக்கு இடையே) சேர்க்கப் பட்டது என்றும் கொள்க. D என்பது தேவையாகும். t'என்னும் கால அளவின் போது இயற்புக் கையிருப்பானது.

$I_t = I_t + S - D$ எனும் சமன்பாட்டின்மூலம் பெறப்படும். ஆனல், சேர்க்கப்படும் அளவு நேர் எண்(positive) ஆக அமைய வேண்டுவது அவசியம்.

தேவையின் அளவு (Demand) தேவை நிரப்பீட்டின் (Supple- அளவை விட அதிகமாயின் இயற்புக் கையிருப்பு பூச்சியமாகும். பெரும்பான்மையான சரக்குப்பட்டியல் கணக்குகளில் கட்டுப் படுத்தப்பட்ட மாறியானது, சரக்குப்பட்டியலுக்குச் சேர்க்கப்படும் (t, t இரு காலக்கட்டங்களுக்கிடையே) S ஆக அமையும் மிகுந்த நலன்பயக்கும் அளவைகளையும், மிகுந்த நலன் பயக்கும் தேவை நிரப்பீட்டுக் காலத்தையும், பெற விரும்புவது நமது இலக்காகும். எப்போதாகிலும் ஒரு முறை தேவையையோ (D) அல்லது அதன் பண்பு நலன்களையோ கட்டுப்படுத்த இயலும்.

ஒரு பொருள்–ஒரு நிலையில் பொதுவான தீர்மான கணக்கு.

சரக்குப்பட்டியல் சூழ்நிலைகளின் எல்லா உருப் படிவங்களும் (models) உண்மை நிலையினை சற்றேறக்குறைய பிரதிபலிக்கின் றனவாகஅமைகின்றன. திறனாய்வுக்கு உட்படுத்தப்படமுடியாத பல, மேலும் விரிவான சூத்திரங்களைப்பெற இயலும். ஆனால், இத்தகைய சூத்திரங்களைக் கையாளுகையில் ஏற்படும் சிக்கல்கள் உண்மையான பிழைகளுக்குக் கவசமாக அமையலாம். அது மட்டுமின்றி, பொய்மையான செம்மையை, உண்மையில் காணப் படாத திருத்தத்தை உண்டாக்கும்.

பொதுவான ஒரு தீர்மானிக்கும் உருப்படிவத்தை உருவாக்கு கையில் ஆய்வு முறை கட்டங்களாக அமைந்து விளங்கும்.

1. ஓர் அலகு காலத்தின் சராசரி விலைக்கேற்ற ஒரு பொருத் தமான தேவையை உண்டாக்குதல்.

2. அக் கோவையில் காணப்படும் பல்வேறு மாறிகளுக் கிடையே அமைந்துள்ள தொடர்பினைக் கருத்தில் கொண்டு ஒரு சில மாறிகளைக் கோவையினின்றும் நீக்கி அக் கோவையைத் தெளிவாக்குதல் அல்லது சுருக்குதல்.

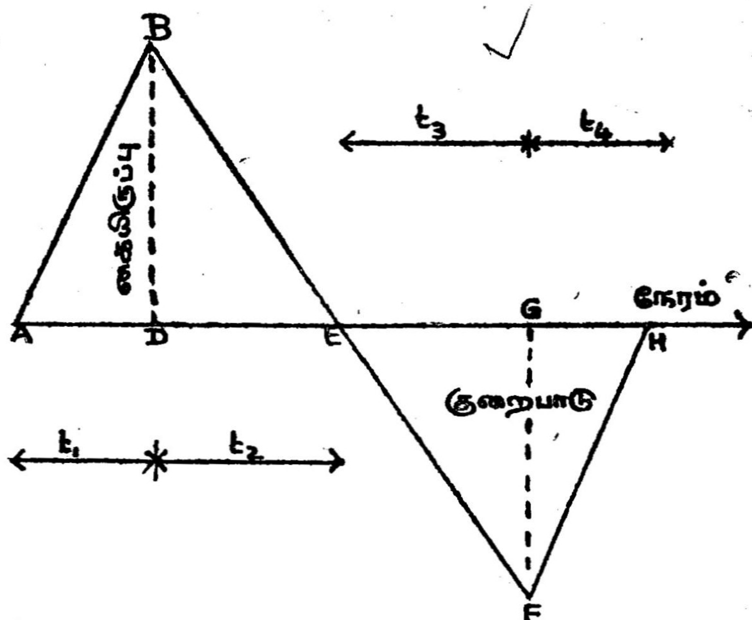
3. சராசரி விலையை மீச்சிறுமமாக்கும் மிகுந்த மாறிகளின் மதிப்புகளைக் கண்டு பிடித்தல்.

நாம் கருத்தில் கொண்டு ஆராயவிருக்கும் சூழ்நிலையைப் பின்வருமாறு படம் விளக்கி நிற்கும்.

(படம் அடுத்த பக்கம் பார்க்க)

நாம் ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவு T-க்கு R அலகுகள் வீதம் ஒரு சீரான $r = \frac{R}{T}$ வீதம் தேவை நிரப்பீடு செய்ய விரும்பு வதாகக் கொள்க.

ஒரு குறிப்பிட்ட சீரான அளவு k [$>r$] வீதம் உற்பத்தி அமைகிறது என்றும் ஒரு முறை பூர்த்தி செய்யப்படாத உத்தரவு திருப்பு உத்தரவின் மூலம் பெறப்படலாம் என்றும் கொள்க.



படம் : ஒரு சரக்குப் பட்டியல் சுழற்சி

c_1 = ஓர் அலகிற்கு ஒரு கால அளவிற்கு நிலவர விலை.

c_2 = ஓர் அலகிற்கு ஒரு கால அலகுக்குக் குறைபாட்டு விலை.

c_3 = ஓர் உற்பத்தி ஓட்டத்திற்கு அமைப்புச் செலவு.

r = தேவை வீதம்

k = உற்பத்தி வீதம்

q = ஓர் உற்பத்தி ஓட்டத்தில் உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருள் அளவு.

k = ஒரு கால அலகுக்கு சராசரி செலவு t_1, t_2, t_3, t_4 ... போன்றவை படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள கால கட்டங்கள் என்று கொள்க.

கையிருப்பானது முதலில் பூஜ்யத்தில் ஆரம்பித்துப் பின்னர் எனப்படும். கால அளவு வரையில் அதிகரிக்கின்றது. பின்னர்

t_2 என்ற கால அளவு வரையில் கையிருப்பானது திரும்பவும் பூஜ்யத்தை அடையும் வரையில் குறைகிறது. இப் புள்ளியில் t_3 என்ற கால கட்டத்தில் ஒரு திருப்பு (Back log) உண்டாகிறது. t_3-ன் முடிவில் உற்பத்தி தொடங்குகிறது. எனவே, இந்தத்திருப்பு (Backlog) t_4 என்ற கால நிலை வரையில் குறையப் பெற்றுப் பூஜ்ய மாகிறது. $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ எனும் மொத்த காலத்திற்குப் பின்னர் இச் சுழற்சி திரும்பத் திரும்ப ஏற்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்திலிருந்து நிலவர விலையானது $\triangle ABE$ எனும் முக்கோணத்தின் பரப்பைப் போன்று c_1 முறை களாக அமைகிறது என்பதையும், இம் முக்கோணத்தின் உயரம் BD ஆனது மீப்பெரும் கையிருப்பு Sஆக அமைகிறது என்பதை யும் காணலாம்.

$$AE = t_1 + t_2; \text{ நிலவர விலை } = C_1 \frac{s(t_1 + t_2)}{2}$$

குறைபாடு விலை (Shortage Cost) $C_2 X \triangle EFH$-ன் பரப்பு IG = மீப்பெரும் குறைபாடு $- s$ என்க.

$$\text{குறைபாடு விலை (Shortage Cost) } C_2\, s\, \frac{(t_3 + t_4)}{2}$$

குறைபாட்டு விலை, நிலவர விலை இவற்றை அமைப்பு விலை யுடன் கூட்டிச் சுழற்சி நேரம் $(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$ஆல் வகுக்கும் போது ஓர் அலகு காலம் k-க்குச் சராசரி விலையைப் பெறலாம்.

$$k = \frac{\left[\frac{1}{2} c_1\, s\,(t_1 + t_2) + c_2\, s\,(t_3 + t_4)\right] + c_3}{[t_1 + t_2 + t_3 + t_4]} \quad \ldots (1)$$

k என்பது s, s, t_1, t_2, t_3, t_4 எனும் ஆறு மாறிகளின் சார் பாக அமைந்த போதிலும், இக் கோவையை t_2, t_3 எனும் இரு மாறிகளின் சார்பாக மட்டுமே கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

சுழற்சி தொடங்குகையில் A என்ற காலத்தில் தொடக்க சரக்குப் பட்டியல் பூஜ்யமாகும். உற்பத்தியானது t_1 என்ற காலத் திற்கு D வரை (A-விருந்து) தொடர்ச்சியாகப் பெருகுகிறது. இக் காலக் கட்டத்தில் kt என்ற அளவானது உற்பத்தி செய்யப் படுகின்றது. ஆனால், உத்தரவுகள் எல்லாம் r என்ற விகிதத்தில் நிறைவாக்கப்படுவதால் சரக்குப் பட்டியலின் நிகர் உயர்வு (t_1 என்ற கால இடைவெளியில்) $kt_1 - rt_1$ என அமைகிறது. எனவே, சரக்குப் பட்டியலின் நிகர உயர்வு மீப்பெரும் கையிருப்பு S ஆகும்.

$$\therefore \quad S = t_1 (k - r) \qquad \dots \qquad \dots \quad (2)$$

இக் கையிருப்பு Sஆனது t_2 என்ற காலப் பிரிவில் பயன்படுத்தப்படும். பயன்படுத்தப்படும் அளவு வீதம் r ஆதலின்,

$$S = t_2 r \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots (3)$$

$$\therefore \; t_1 = \frac{S}{k - r} = \frac{t_2 \, r}{k - r} \qquad \dots (4)$$

t_3 என்ற காலப் பிரிவில் குறைபாடுகள் r என்ற வீதத்தில் பெருகுகின்றன.

$$\therefore \quad S = t_3 \, r \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots (5)$$

t_4 என்ற கால நிலையில் உற்பத்தியானது k என்ற வீதத்தில் அமைகின்றது. தேவையோ r என்ற விதத்தில் அமைகிறது. எனவே குறைபாடு நீக்கப்படும் நிகர வீதம் $(k-r)$ ஆகஅமையும்.

$$\therefore \quad S = t_4 (k - r) \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots (6)$$

$$\therefore \; t_4 = \frac{s}{(k - r)} = \frac{t_3 \, r}{(k \quad r)} \qquad \dots (7)$$

மொத்த சுழற்சியானது $(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$ ஆகவும் மொத்த உற்பத்தித் தேவையை நிறைவாக்கப் போதுமானதாக இருப்பதாலும்,

$$q = r (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \qquad \dots \qquad \dots (8)$$

t_1, t_4 இவற்றிற்குப் பிரதியிட

$$q = r (t_2 + t_3) + r \frac{t_2 \, r}{(k - r)} + r \frac{t_3 r}{(k-r)}$$

$$= \frac{(k - r) \, r (t_2 + t_3) + r \, r (t_2 + t_3)}{(k-r)}$$

$$= \frac{kr (t_2 + t_3)}{(k-r)} \qquad \dots (9)$$

(1)-ல் t, i_4-களைப் பிரதியிட,

$$k = \frac{\frac{1}{2} C_1 \, S \left[\frac{t_2 r}{(k-r)} + t_2 \right] + \frac{1}{2} \; C_2 \, S \left[t_3 + \frac{t_3 r}{k-r} \right] + C_3}{t_2 + t_3 + \frac{t_2 r}{(k - r)} + \frac{t_3 \, r}{(k - r)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \; C_1 \, S \left[\frac{t_2 k}{k - r} \right] + \frac{1}{2} \; C_2 \; S \left[\frac{t_3 k}{k-r} \right] + C_3}{\frac{t_2 k}{k - r} + \frac{t_3 k}{k - r}}$$

$$K = \frac{1}{2} kr \frac{[c_1 t_2^2 + c_2 t_3^2] + c_3 (k-r)}{k(t_2 + t_3)} \quad \dots (10)$$

since $S = t_2 r$; $s = t_3 r$.

t_2, t_3 எனப்படும் t_2, t_3 இவற்றின் மிகச் சிறந்த மதிப்புகளைப் பெற, Kஐ t_2, t_3 இவற்றைச் சார்ந்து வகை வேறுபடுத்தி (differentiate)கிடைக்கும் முடிவுகளைப் பூஜ்யத்திற்கு ஒப்பிட்டால்

$$t^\circ_2 = \sqrt{\frac{2 c_2 c_3 \left(1 - \frac{r}{k}\right)}{c(c_1 + c_2) - c_1}} \quad \dots (11)$$

$$t^\circ_3 = \sqrt{\frac{2 c_1 c_2 \left(1 - \frac{r}{k}\right)}{r(c_1 + c_2) - c_2}} \quad \dots (12)$$

எனவே,

$$q^\circ = \sqrt{\frac{2r c_3}{c_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{k}\right)} \left[\frac{c_1 + c_2}{c_2}\right]} \quad \dots (13)$$

$$s^\circ = \sqrt{\frac{2r c_1 c_3 \left(1 - \frac{r}{k}\right)}{(c_1 + {}_2c) c_2}} \quad \dots (14)$$

எனவே, இத் தீர்மானிக்கும் மாறிகளின் பெரிதும் உகந்ததும் மதிப்புக்களுக்கொத்த

K-ன் மீச்சிறு மதிப்பு

$$K^\circ = \left[\frac{2r c_1 c_2 c_3 \left(1 - \frac{r}{K}\right)}{c_1 + c_2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots (15)$$

சில சிறப்பான தீர்மான வகைகள்!

செயல் நிலைகளில் அவ்வப்போது, நமது ஊகங்களில் சில சுருக்கப்பட்டு ஏற்படுத்தப்பட்டாலும், ஒரு பொதுவான தீர்மான உருப்படிவத்தின் குறிப்பீடே, இதுவரை நமது ஆய்வின் கருப் பொருளாக இருந்தது. இவ்வாறு, ஊகங்களின்மேல் ஏற்படுத்தப் படும் கட்டுப்பாடானது நமது முடிவுகளை எவ்வாறு பாதிக்கும் என்பதைக் பின்வருமாறு காண்போம்.

பெருவாரியான நேரங்களில் உற்பத்தி வீதம் k ஆனது தேவை அளவின் வீதம் rஐக் காட்டிலும் பெருமளவில் அதிக மாக அமைவதால் மொத்த உற்பத்தி நேரம் $(t_1 + t_4)$ புறக் கணிக்கப்படலாம்.

அதாவது,

$$k \to \infty \Longrightarrow \frac{1}{k} \to 0 \; ; \quad \frac{k-r}{k} = 1.$$

சமன்பாடு (10)ஐ உபயோகித்து "உடனடி உற்பத்தியைக்" (Instantaneous Production) காணலாம்.

$$k = \frac{\frac{1}{2} kr(C_1 t_2 + C_2 t^2{}_3) + C_3(k-r)}{(kt_2 + t_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} r\,(C_1\, t^2{}_2 + C_2 t_3)\, \frac{(k-r)}{k}}{(t_2 + t_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} r(C_1 t^2{}_2 + C_2 t_3) + C_3}{(t_2 + t_3)} \quad \ldots \; (10a)$$

எனவே, சமன்பாடு 13, 14, 15,

$$q^0 = \sqrt{\frac{2r\, C_3}{D_1}\, \frac{(C_1 + C_2)}{C_2}} \quad \ldots \; (13a)$$

$$s^0 = \sqrt{\frac{2r\, C_1\, C_3}{C_2\,(C_1 + C_2)}} \quad \ldots \; (14a)$$

$$k^0 = \sqrt{2r\, \frac{C_1\, C_2\, C_3}{(C_1 + C}} \quad \ldots \; (15a)$$

என அமைகின்றன.

'குறைபாடுகள்' என்பவைகள் அனுமதிக்கப்படாத நிலையில் இக் கோவை இன்னும் எளிமையாக்கப்படும்.

அதாவது குறைபாடு விலையானது (Shortage Cost) $C_2 \to \infty$ சுழற்சியில், குறைபாட்டினை ஏற்படுத்தும் காலப்பகுதி பூஜ்ய மாகும். ஆனால், தேவை வீதம் (Demand) காலக் கழிவு (Lead Time) ஆகிய எவ்விதப் பிழையுமின்றி முன் கூட்டியே தீர்மானிக் கப்பட்டாலன்றி, எப்போதாவது ஏற்படும் குறைபாடுகள் எல்லாம் தவிர்க்க முடியாததாகும் என்பது இங்கு நினைவு கூறத்

தக்கது. எனவே தீர்மான உருப்படிவங்களில் (Deterministic Model) கீழ்க்கண்ட ஊகத்தை மேற்கொள்கிறோம். அதாவது

$C_2 \to \infty ; \frac{C_2}{C_1 + C_2} \to 1$

$$\therefore \quad \frac{C_1 + C_2}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} + 1 \to ; \; 1 \; as \; C_2 \to \infty$$

எனவே (10a), (13a), (14a), (15a) இவற்றிற்கு இயையாக

$$k = \frac{1}{2} \; r \, Ct_2 \; + \frac{C_3}{t_2} \; as \; t_3 \to 0 \qquad \ldots \; (10b)$$

$$q^0 = \sqrt{\frac{2r \, C_3}{c_1}} \qquad \ldots \; (13b)$$

$$s^0 = 0 \qquad \ldots \; (14b)$$

$$k^0 = \sqrt{2r \, c_1 \, c_3} \qquad \ldots \; (15b)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

k என்பது கீழ்க் கண்டவாறும் அமைக்கப்பெறலாம்.

$$t_2 = \frac{q}{r} \text{ ஆதலின் } \frac{q}{r} = \frac{t_2 + t_3}{\left(1 - \frac{r}{k}\right)} = t_2 + t_3 \to t_2 \, as \, t_3 \to 0$$

$$k = \frac{1}{2} \, r \, C_1 \; t_2 \; + \frac{C_3}{t_2} = C_1 q + \frac{C_3 r}{q} \qquad \ldots \; (10c)$$

எனவே, கோவை (13b), ஒப்புக் கொள்ளப்பட்ட அடிப் படைச் சிறப்புடைய சிக்கனப் பொருளளவு சூத்திரமாகும். எத்தகைய ஊகங்களின் மேல் இச் சூத்திரமானது அமைக்கப் பட்டதோ, அந்த அடிப்படை ஊகங்கள் செயல் நிலைகளில் ஒரு சில சமயங்களில் உண்மையற்றதாய் இருக்கும்போது உபயோகப் படுத்தப்பட்டாலும் அவ்வூகங்கள் எத்தகையன என்பதை நினைவு கூர்தல் அவசியம்.

(அ) தேவையான, நிலைத்த, அறிவிற்குட்பட்ட விதத்தில் அமைகிறது.

(ஆ) காலக் கழிவு (Lead time) நேர்த்தியானதாகவோ, அறிவிற்குட்பட்டதாகவோ உள்ளது.

(இ) உற்பத்தியானது உடனடியாக நிகழும் தன்மை யுடையது.

(ஈ) குறை பொருள் அனுமதிக்கப்படுவதில்லை.

மாறத்தக்க பெறும்விலை அல்லது மாறத்தக்க உற்பத்திச் செலவு

இதுவரை, நாம் உற்பத்திச் செலவைக் கவனத்தில் கொள்ளாது, அமைப்புச் செலவை (set up cost) மட்டுமே கவனத்தில் கொண்டோம். விடுமுகை உற்பத்திச் செலவானது (Marginal cost) ஓர் அலகிற்கு நிலையானதாகவும், எல்லா தேவைகளும் நிறைவு செய்யப்படுவதற்கான நிலையிலுள்ளதாகவும் அமைந்தால் உற்பத்திச் செலவுகளைக் கணக்கில் காட்டத் தேவையில்லை. ஆனால், பொதுத்தன்மையான ரீதியில் 'q' அலகுகளை உற்பத்தி செய்வதற்கான உற்பத்தி விலையானது ஒரு குறைவற்ற சார்பாக (non-decreasing) $f(q)$; $f(0)=0$ எனக் கொள்க. 'q'-ன் மதிப்பு பூஜ்யத்தை விட அதிகம் என்ற நிலையில் அமைப்புச் செலவு C_3, $f(q)$-ன் மதிப்பில் கூடுதலாகிறது. எனவே $f(q)$ என்பது $q=0$ என்ற புள்ளியில் 'தொடர்ச்சியற்ற சார்பு' எனப்படும். பொருள் அளவைத் தீர்மானிக்குங்காலத்தில், இதுபோன்று $f(q)$ ஆனது தொடற்சியற்ற சார்பாக விளங்குகிருற்போல் பல புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்கிறது எனக் கவனம் கொள்ளல் வேண்டும்.

சில நிலைகளில் அளவுத் தள்ளுபடிகள் அளிக்கப்படலாம். ஓர் அலகு பொருளின் விலை, வாங்கப்படும் பொருளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து அமையலாம். உதாரணமாக 1000 அலகுகள் வரை ஒரு பொருளை வாங்கும்போது ஓர் அலகு பொருளின் விலை ரூபாய் ஒன்ருக அமையலாம். 1000 அலகுகள் அல்லது அதற்கு மேலாக வாங்கும்போது ஒரு அலகு பொருளின் விலை 95 பைசாக்களாகக்குறையலாம். ஏனெனில் இங்கு அளவுத்தள்ளுபடி இடம் பெறுகின்றது. இந்நிலையில், 950 முதல் 999வரையிலான அலகுகளைப் பெறுவதற்குப்பதில் 1000 அலகுகளை வாங்குவதே இலாபகரமானதாம். தேவைக்கதிகமாக வாங்கும் பொருள்கள் பயனற்றவையே எனப் புறக்கணிக்கப்பட்டாலும் இலாபமே மேலேங்கி நிற்கும். இங்கு சிக்கன உத்திர அளவைவிட [EOR] அதிகமாகப் பெறுவதன்மூலம் குறைந்தசெலவினை அடைகிருேம் அளவுத்தள்ளுபடியின் பயனையும் நுகர்கிருேம்.

r ...தேவை வீதம்,

c_1 ஓர் கால அலகிற்கு ஒரு பொருளின் நிலவர விலை

c_2 ஓர் உத்தரவு பிறப்பிப்பதற்கு உண்டாகும் நிலையான விலை

p Q என்ற அளவிற்கு குறைவாக உத்திரவிட்டால், ஓர் அலகிற்கு அடக்கமாகும் மாறும் விலை.

$p' - Q$ என்ற அளவிற்கு மேலாக உத்தரவிடும் போது ஓர் அலகிற்கு அடக்கமாகும் மாறும் விலை (ஈண்டு $p' < p$ என்பதை கவனம் கொள்க.

Q — சிக்கன உத்தரவு அளவு என்று கொள்க.

எனவே.

$F(q) = 0 \quad q = 0$ என்னும்போது (உற்பத்தி விலைச் சரிவு)

q-ன் மதிப்பு 0ஐ விட அதிகமாயும், Q விட குறைவாயும் இருக்கும் போது உற்பத்தி விலைச்சரிவு $F(q) = c_3 + qp$.

q-ன் மதிப்பு Q-ன் மதிப்புக்குச் சரியாயும், அதிகமாயும் இருக்கும் போது, உற்பத்தி விலைச் சரிவு

$$F(q) = c_3 + qp' \qquad \dots \quad (16)$$

q அலகுகள் கொண்ட தொகுதிகளாக உத்திரவிடப்பட்டால் ஒரு கால அலகிற்கு மொத்த செலவு

[கோவை $10c$-ல் $t_2 = \frac{q}{r}$ என்று பிரதியிடு]

$$k(q) = \frac{C_3 r}{q} + \frac{1}{2} C_1 q + pr \quad 0 < q < Q \text{ எனின்}$$

$$= \frac{C_3 r}{q} + \frac{1}{2} C_1 q + p'r \quad q \geqslant Q \text{ எனின்.} \qquad \dots \quad (17)$$

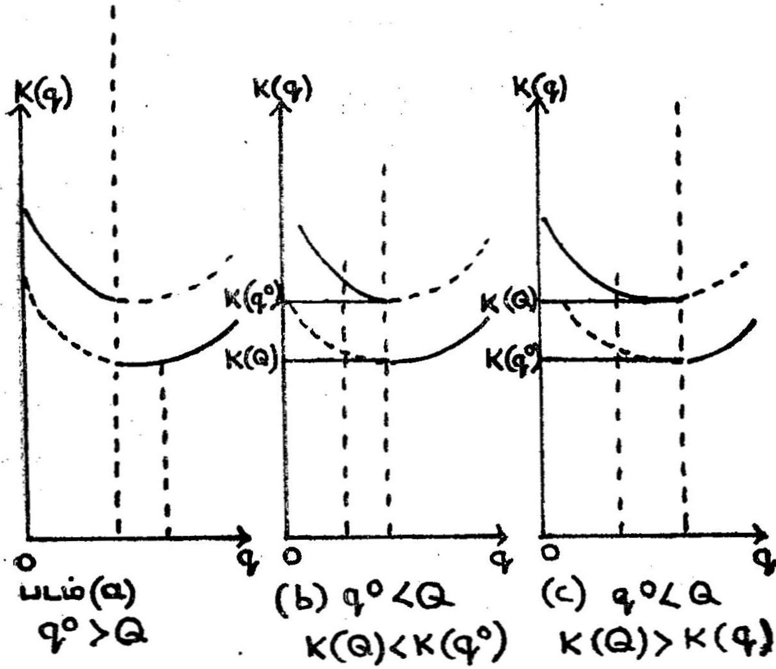
எனவே $k(q)$ என்ற சார்பானது $q = Q$ என்றும் புள்ளியில் ஒரு தொடர்ச்சியின்மையைப் பெற்றிருக்கிறது. k-ன் மீச்சிறுப்பு மதிப்பு $\frac{dk}{dq} = 0$ என்ற புள்ளியிலோ அல்லது தொடர்ச்சியின்மைப் புள்ளியிலோ ஏற்படுகிறது என்பதை நிலை நிறுத்தலாம்.

$$\frac{dk}{dq} = -\frac{c_3 r}{q^2} + \frac{1}{2} c_1 \qquad \dots \quad (18)$$

$q = Q$ என்ற இடம் தவிர்த்து மற்றெங்கும் இச்சமன்பாடு உண்மையாகும். ஏனெனில் $q = Q$ என்ற புள்ளியில் சார்பு வரையறுக்கப் பெறவில்லை.

$$\text{எனவே } q^0 = \sqrt{\frac{2C_3 r}{C_1}} \qquad \dots \quad (19)$$

இப்போது $q^0 > Q$; $q^0 < O$ எனப்படும் இரு நிலைகளை ஆராய்வோம்.



எனப்படும் நிலைகளில் price bre..k விலைத் தடை.

நன்கு வரையப்பட்டுள்ள வளைகோடுகள் (curves) உண்மையான விலை வளைகோடுகள் (cost curves) ஆகும். ஆனால். புள்ளியிடப்பட்டுள்ள வளைகோடுகள், விலை தடையில்லாமலிருந்தால் அமையும் விலைவளைகோடுகளாகும்.

$Q < q^\circ$ என்றிருக்கும் நேரத்தில் K-ன் மீச்சிறு மதிப்பானது $q = q^\circ$ என்ற புள்ளியில் நிகழ்கிறது. (15b) என்ற சமன்பாடோடு ஒப்பிடுகையில்

$$K^\circ = p'r + \sqrt{2C_1C_3r} \quad \text{என்று பெறுகிறோம்.} \quad \ldots \quad (20)$$

q° என்ற அளவு வாங்கப்படும் போது $Q > q^\circ$ என்றமையுமானால் விலையானது $pr + \sqrt{2C_1C_3}\, r$ என்றமையும். ... (21)

ஆனால், மற்றொரு விதமாக Q அலகுகளை உத்திரவிடும் போது, நாம் குறைவான அலகு விலையைப் பெற்றால் (10b)என்ற என்ற சமன்பாட்டைக் கருத்தில் கொள்ளலாம். அப்போது விலையானது,

$$p'r + \frac{C_3 r}{Q} + \frac{1}{2} C_1 Q \text{ என்றமையும்.} \quad \cdots \quad (22)$$

$$p - p' > \frac{1}{r}\left[\frac{C_3 r}{Q} + \frac{1}{2} C_1 Q - \sqrt{2C_1 C_3 r}\right] \quad \cdots \quad (23)$$

என்றிருந்தால்தான் Q அலகுகளுக்கு உத்தரவிடுவது இலாபகரமாகும். இத்தகைய எல்லா நிலைகளும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

ஒரு விலைத்தடை (price break) சார்ந்த நிலையில் பயன்படுத்தப்படும் செயல்வாதம் (reasoning) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இத்தகைய விலை மாற்றங்களைக் கொண்ட நிலையங்களுக்கு விரிவுபடுத்தப்படலாம். பெருமளவில் பொருள் உத்தரவிடப்படும் சூழ்நிலைகளில், பொருள் உற்பத்திக்கு அதிக நேரம் (overtime) தேவைப்படலாம். எனவே, ஓர் அலகு உற்பத்தி செலவு அதிகரிக்கலாம். $q < Q$ என்றிருக்கும்போது, ஓர் அலகு உற்பத்திச் செலவு 'P' என்றிருக்கட்டும். Q என்ற குறியீட்டிற்கு மேல் உற்பத்தி செய்யப்படின், ஓர் அலகு உற்பத்திச் செலவு $P' > P$ என்றும் கொள்க. இப்போது உற்பத்திச் செலவுகள் $f(q)$ என்பது.

$$\left.\begin{aligned} f(q) &= 0 \quad [q = 0 \text{ என்றால்}] \\ &= C_3 + Pq \quad [0 < q < Q \text{ எனின்}] \\ &= C_3 + PQ + P'(q - Q) \quad [q > Q \text{ எனின்}] \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

எனப் பெறப்படுகிறது.

மேலும், $q > Q$ என்றிருந்தால் $f(q)$ கீழ்க்கண்ட மாற்று நிலையில் அமைக்கப்படும் :

$$f(q) = C_3 - (p' + Q) + p'q.$$

மற்றைய நிலைகளுக்கேற்றவாறு, ஓர் அலகு காலத்திற்கான மொத்த விலையானது,

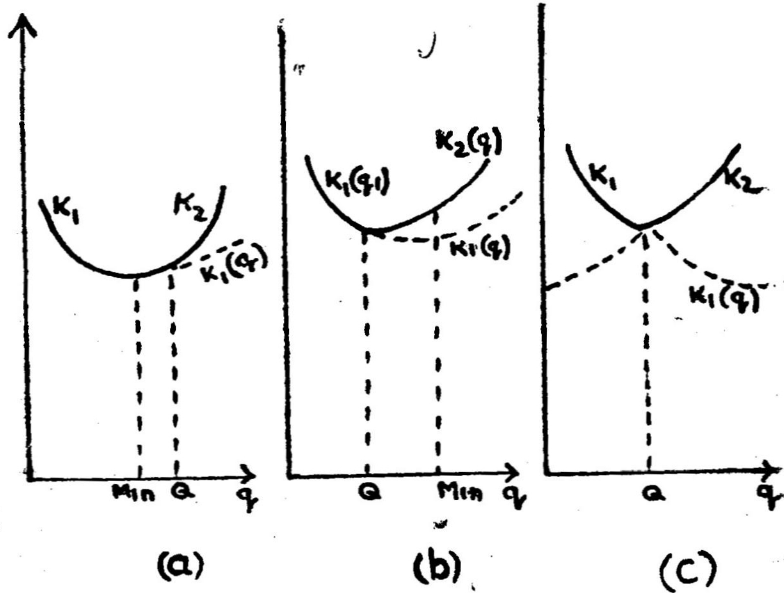
$$K(q) = \frac{C_3 r}{q} + P\wedge + \frac{1}{2} C_1 q \qquad 0 < q < Q \text{ எனின்}$$

$$= \frac{[C_3 - (P' - p)\, Q]\, r}{q} + p'\gamma + \frac{1}{2} c_1 q$$

$$q > Q \text{ எனின்} \quad \ldots \quad (25)$$

என அமையும்.

$q > 0$ என்றமையும்போது $K(q)$ என்ற சார்பானது தொடர்ச்சியானதாகும். $q>0$ என்னும்போது வகை வேறுபாடு (differentiate) காணத்தக்கதாயும் ($q = Q$ தவிர) அமையும் என்பது தெளிவானதாக அமையவேண்டும்.



படம். விலைத் தடையின் மூன்று நிலைகள்.

(அ) $q<Q$ எனின் $K_1'(q) = 0$

$q>Q$ எனின் $K_2'(q) > 0$

(ஆ) எல்லா $q < Q$ எனின் $K'_1(q) < 0$

ஏதேனுமொரு $q > Q$ எனின் $K'_2(q) = 0$

(இ) $q < Q$ எனின் $K'_1(q) < 0$

$q > Q$ எனின் $K'_2(q) > 0$

கோவை (25) போன்ற ஒரு சார்பிற்கு மீச்சிறுமமானது $K'(q)=0$ என்றிருக்கும் ஒரு புள்ளியிலோ அல்லது வகை வேறுபாடு (Derivative) வரையறுக்கப்படாத ஏதேனுமொரு புள்ளியிலோ அமைகிறது. மேற்குறிப்பிட்ட படங்களில் மூன்று விதமான நிலைகள் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

தெளிவான முறையில் கீழ்க்கண்ட சார்புகள் பெறப் படுகின்றன:

$$K_1\ (q) = \frac{C_3 r}{q} + pr + \frac{C_1 q}{2}$$

$$K_2\ (q) = \frac{[C_3 - (p' - p)Q]}{q} r + p'\ r + \frac{1}{2}\ C_1 q.$$

எனவே,

$K(q) = K_1\ (q);\quad q<Q$ என்றிருந்தால்

$\quad = K_2\ (q) \quad q>Q$ என்றிருந்தால்.

மேலும்,

$K_1\ (Q) = K_2(Q)$ என்பதும கவனத்தில் கொள்ளத்தக்கது.

பல் பொருள் தீர்மானக்கணக்கு—ஒரு நிலை

சரக்குப்பட்டியலானது பல்வேறு பொருள்களை உள்ளடக்கி யிருக்கும் போது கிடங்குக் கொள்ளளவு (storage capacity) அல்லது உற்பத்தி வசதிகள் போன்றவற்றின்மேல் ஏற்படும் கட்டுப்பாடுகள் (limitation) ஒவ்வொரு பொருளையும் தனித் தனியாகக் கருத்தில் கொண்டு ஆய்வதற்குப் பங்கம் விளைவிக் கலாம். மிக எளிதான நிலைகளில் லாங்கரான்ஞ் பெருக்கிலி (Langranges multiplier) முறையை அனுசரித்துக் கணக்கை மேற்கொள்ளுகிறோம். iஆவது பொருளுக்கு

C_{1i}—கிடங்குச் செலவு அல்லது பாதுகாப்புச் செலவு(storage cost)

C_{3i}—அமைப்புச் செலவு (set up cost)

r_i—தேவை வீதம் (demand rate)

$q_i - i$ பொருளுக்கான உத்தரவு அளவு

சிக்கல்களைப் போக்குவதற்கான, எளிமையை ஏற்படுத்து வதற்காக உற்பத்தியானது உடனடித் தன்மையானது என்றும், குறைபாடுகள் (shortages) அனுமதிக்கப்படுவதில்லை என்றும் கொள்க. எனவே, $C_{2i} = 0$

ஓர் அலகு காலத்திற் மொத்த விலையானது.

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\ C_1 q_i + \frac{C_{3i}\ r_i}{q_i} \right] \qquad \ldots \qquad (26)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta K}{\delta q_i} = \frac{1}{2} C_{1i} - \frac{C_{3i} r_i}{q^2_i} \quad i = 1, 2, 3 \ldots$$

எனவே q_i-ன் பெரிதுமுகந்த மதிப்பானது

$$q_i = \sqrt{\frac{2 r_i C_{3i}}{C_{1i}}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (27)$$

கொள்முதல் செய்யப்பட்டுள்ள எல்லாப் பொருள்களின் சராசரி எண்ணிக்கையானது I என்ற குறியீட்டை மிஞ்சக் கூடாது என்னும் கட்டுப்பாட்டைச் சரக்குப் பட்டியலுக்கு விதித்தால், K ஐ $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i < I$ என்னும் நிபந்தனைகுட்பட்டு மீச்சிறுமமாக்குதல் வேண்டும். ... ... (28)

$\sum_{i=1}^{n} q_i < 2I$ என்றிருந்தால் பிரச்சினைக்கு இடமில்லை.

ஆனால், $\sum_i q_i < 2I$ என்றில்லாதபோது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட q_i ஐ நீக்குதல்மூலம் சமன்பாட்டு நிபந்தனையை உண்டாக்குவோம்.

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} C_{1i} q_i + \frac{C_{3i} r_i}{q_i} \right] + \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} q_i - 2I \right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (29)$$

என்று அமைக்கவேண்டும். முன்பு கூறப்பட்ட நிபந்தனையானது நிறைவு செய்யப்படும் வரையில் $L = K$ என்றாகும்.

இப்போது, $$\frac{\delta L}{\delta q_i} = \frac{1}{2} C_{1i} - \frac{C_{3i} r_i}{q_i^2} + \lambda = 0$$

$$i = 1, 2, 3 \quad \ldots \quad (30)$$

இச் சமன்பாட்டைத் தீர்வு செய்தால்

$$q^0 = \sqrt{\frac{2 C_{3i} r_i}{C_{1i} + 2\lambda}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (31)$$

இப்பொழுது $\sum_{i=1}^{n} a^{\circ}_i = 2I$ என்றமையும்வண்ணம், λ-ன் மதிப்பை நிர்ணயிக்கவேண்டும். சோதனைச் செயல்பாடு (trial) பிழைகள் இவற்றின்மூலம் இதனை அடையலாம்.

$\frac{dk}{dq_i} = -\lambda$, (எல்லா i-க்களுக்கும்) என்றமையும் வண்ணமே q_i எல்லாம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும். (அதாவது) ஒவ்வொரு பொருளின் அளவானது குறைக்கப்படும் போதும், விடுமிகை விலை (Marginal Cost) யானது ஒவ்வோர் மாறுபாடில்லாமல் விளங்கும் வண்ணம் q_i-க்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு குழுமத்தின் நிர்வாகமானது கிடைக்கக்கூடிய கொள் முதலில் ஏற்படும் கட்டுபாட்டின் (limitation) காரணமாக, பல் வகைப் பொருள்களைக் கொண்ட சரக்குப்பட்டியல் நிலையின் சராசரி 750 பொருள்களுக்கு மேல் செய்யக்கூடாது என்று தீர் மானிக்கிறது. அக் குழுமமானது மூன்று வகைப் பொருள்களைக், கீழ்க் கண்டவாறு உற்பத்தி செய்தால், பெரிது முகந்த (optimal) உற்பத்தி அளவுகளைக் காண்க.

உற்பத்திப் பொருள்	1	2	3
C_1	0·05	0·02	0·04
C_2	50·00	40·00	60·00
γ	100·00	120·00	75·00

தீர்வு (Solution)

ஒவ்வோர் உற்பத்திப் பொருளுக்கும், q°-க்களைக் கண்டு பிடிக்கின்றோம்.

உற்பத்திப் பொருள் *1*:

$$q^{\circ}_1 = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 50}{0.05}} = \sqrt{\frac{2c_2 r}{c_1}}$$

$$= 100\sqrt{20} = 447.$$

உற்பத்திப் பொருள் 2:

$$q^\circ_2 = \sqrt{\frac{2\times120\times40}{0.02}} = 100\sqrt{48}$$

$$= \mathbf{693}.$$

உற்பத்திப் பொருள் 2:

$$q^\circ_3 = \sqrt{\frac{2\times75\times60}{0.04}} = 100\sqrt{21\cdot5}$$

$$= \mathbf{464}.$$

சராசரி சரக்குப்பட்டியல், மேற்குறிப்பிட்ட பொருள்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $(447+693+464)$ இவற்றில் பாதியாக $\left(\frac{1604}{2}\right) = 802$ ஆக அமையும். ஆனால், இவ்வெண்ணிக்கை அனுமதிக்கப்பட்டுள்ள 750-ஐ விஞ்சுவதால், (31)-சமன்பாட்டை பயன்படுத்துகிறோம்.

உற்பத்திப்பொருள் 1:

$$q^\circ_1 = \sqrt{\frac{2r_1 i_3 C_.}{C_{11}+2\lambda}} = \sqrt{\frac{2\times100\times50}{0.06}}$$

$$= 100.(16\cdot67) = \mathbf{409}.$$

உற்பத்திப் பொருள் 2:

$$q^\circ_2 = \sqrt{\frac{2\times120\times40}{0.03}} = 100\sqrt{32} = \mathbf{566}.$$

உற்பத்திப்பொருள் 3:

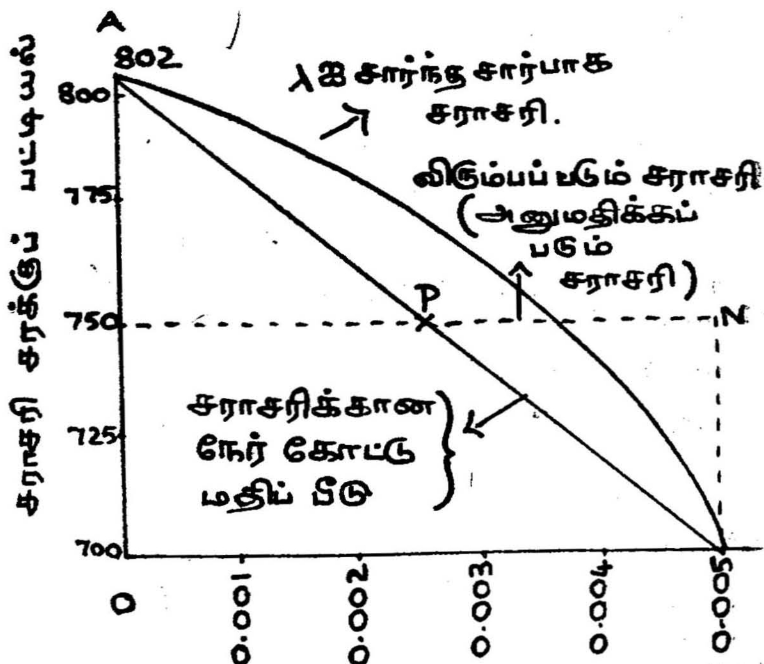
$$q^\circ_3 = \sqrt{\frac{2\times75\times60}{0.05}} = 100\sqrt{18} = \mathbf{424}.$$

இப்பொழுது சராசரி சரக்குப் பட்டியல் $z = \frac{1399}{2} \simeq 700.$

ஆனால், இவ்வெண்ணிக்கை 750 ஐ விடப் பெரிதும் குறைந்துள்ளபடியால், λ-விற்கான வேறொரு சிறிய மதிப்பினைப் பெற வேண்டி உள்ளோம். இத்தகையதொரு மதிப்பினை ''இடைச் செருகல்'' மூலம் பெறுவோம்.

0·0-க்கும் 0·005-க்கும் இடையில் 0·001 இடைவெளியில் அமைந்துள்ள எல்லா λ மதிப்புக்களையும் எடுத்துக் கொள்க.

சராசரி சரக்குப் பட்டியலை λ-யைச் சார்ந்த ஒரு சார்பாக கணக்கீடு செய்துவிட்டோம், என்ற ஊகத்தோடு கீழ்க்கண்ட படத்தினைப் பெறுகிறோம். இப் படத்தில் $\lambda = 0, \lambda = 0{\cdot}005$ இவற்றிற்கேற்ப A, B என்ற இரு புள்ளிகளைப் பெறுகிறோம். A, B இவற்றிற்கிடையே உருவம் தெரியாத இவ்வளைகோடு, சற்றேறக்குறைய ஒரு நேர் கோடாக அமைகிறது.



படம் : λ-க்கான (Inter-polation) இடைச் செருகல்.

சராசரி சரக்குப் பட்டியல் 750 பொருள்கள் என்ற குறியீட்டை அளிக்கவல்ல P என்ற புள்ளியானது AMP, BNP என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களால் அமைக்கப்படுகிறது.

$$\therefore \quad \frac{MP}{AM} = \frac{NP}{NB} \text{ அல்லது, } MP = \frac{MN - MP}{NB}$$

$$AM = \frac{0{\cdot}005 - MP}{750} \cdot 52$$

$$\therefore \quad MP = \lambda = 0{\cdot}0025.$$

உற்பத்திப் பொருள் உள்ளவற்றைத் திரும்பவும் கணக்கீடு செய்ய $\lambda = 0 \cdot 0025$ என்ற இந்த மதிப்பிணைப் பயன்படுத்தலாம். λ ஆனது $0 \cdot 0$-க்கும் $0 \cdot 005$-க்கும் இடைப்பட்ட நிலையில் அமைந்துள்ளதால் உற்பத்திப் பொருள் எண்ணிக்கையும் முன்பு கண்ட இரு எண்ணிக்கைகட்கு இடைப்பகுதியாக விளங்கும்.

$$q^o{}_1 = \frac{447 + 409}{2} = 428$$

$$q^o{}_5 = \frac{693 + 566}{2} = 628$$

$$q^o{}_8 = \frac{464 + 424}{2} = 444$$

தற்போதைய சராசரி சரக்குப் பட்டியல் = 750

$$= \frac{428 + 628 + 444}{2} = 750$$

இவ்வாறு இக் கணக்குத் தீர்வையைப் பெறுகிறது.

ஒரு சரக்குப்பட்டியலின் பொருள்களெல்லாம் குறிப்பிட்ட முழுமைத் தொகுதியாகவோ அல்லது ஒரு குடும்பமாகவோ, ஒரு பொதுவான அமைப்புச் செலவைக் கொண்டு அமைந்தால் மற்றொரு விதமான பல் பொருள் நிலை ஏற்படுகிறது. ஒரு தொகுதியில் 'n' பொருள்கள் உள்ளன என்று கொள்க. அத் தொகுதியானது, ஏற்கெனவே அமைக்கப்பட்ட ஒன்று ஒன்றாக அமைந்தால், உற்பத்தியைத் தொடங்க iஆவது பொருளுக்கான செலவு C_{8i} ஆகும். ஆனால் முற்போதைய அமைப்பானது ஒரு குடும்பத்திற்காகவோ அல்லது ஒரு தனிப் பொருளுக்கேற்பவோ அமையின், முதலில் உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருளுக்கான செலவு $C_8 + C_{8i}$.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சுழல் இயந்திரத்தின் விலையைக் கருத்தில் கொள்க. அவ்வியந்திரத்தில் ஒரு சட்டத்தின் தடிப்பை அதிகரிக்க வேண்டுமாயின், இரு உருளைகளுக்கு இடையேயுள்ள இடைவெளியானது மாற்றியமைக்கப்பட வேண்டியதாய் இருக்கும். மற்றொரு விதத்தில் அகலம் அதிகரிப்பட வேண்டுமாயின் வேறுவிதமான உருளை அமைப்பினை அவ்வியந்திரத்தில் பொருத்த வேண்டியுள்ளது. இத்தகைய தொடு நிலையில், ஒரே அகலம் கொண்ட எல்லாச் சட்டங்களும் ஒரே தொகுதியாக அல்லது ஒரே குடும்பமாக அமைகிறது.

'தேவை' நமது அறிவுக்குட்பட்டதாக, iஆவது பொருளிற்கு r_i என்ற விதத்தில் அமைந்திருந்தால் அப் பொருளின் நிலவரவிலை C_{1i} என்றும், அப் பொருளானது உடனடியாகப் பெறமுடியக்கூடியதுஎன்றும் அமைந்தால் இக்கணக்கானது சாதாரண சிக்கன அளவுக் கணக்கினை ஒத்ததாக அமையும். இத்தகைய தொரு தொகுதியின் (குடும்பத்தின்) ஒவ்வோர் அங்கத்தினரும் (ஒவ்வோர் பொருளும்) (சரக்குப்பட்டியலின் ஒவ்வோர் பொருளும் உற்பத்திச் செய்கையில்) உருவம் பெறுகிறது என்று ஊகம் செய்க. (இத்தகைய ஊகத்தைக் கொண்டே, பெரிது முகந்த மதிப்புகளை எத்தகைய சூழ்நிலைகள் அளிக்க வல்லன என்பதைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

அமைப்புக் காலங்களுக்கு இடையேயுள்ள நேரமானது 't' எனக் கொள்க. (106) என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$k = \frac{1}{2}\, t\, \Sigma\, c_{1i}\, r_i + \frac{C_s + \Sigma\, c_{si}}{t} \qquad \dots \quad (82)$$

என்பதைப் பெறுகிறோம். t-க் கான பெரிது முகந்த (optimal) மதிப்பை

$$t^0 = \sqrt{\frac{2\,(c_s + \Sigma\, c_{si})}{\Sigma\, r_i\, c_{1i}}} \qquad \dots \qquad \dots \quad (83)$$

எனப் பெறுகிறோம். மேலும் பெரிது முகந்த உற்பத்திக்கான அளவானது,

$$q_i = r_i\, t^0 \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (84)$$

மொத்த சரக்குப்பட்டியலில் ஏதேனுமொரு கட்டுப்பாட்டை விதிக்கையில், பல்வேறு விதமான முன்புக் கூறப்பட்ட தொகுதிகளை உள்ளடக்கிய நிலையை ஆராய்வோம். சில தொகுதிகளின் ஒரு சில பொருள்கள் ஒவ்வொரு முறையிலும் உற்பத்தி செய்யப் படாதபோது, உண்டாகும் பொதுவான கணக்குப்பிரச்சினையானது, ''முழு எண் திட்டம்'' (integer programming) சார்ந்து நிற்கும் தன்மையின்பாலது தொகுதி அமைப்புகளின் இடையிலான காலவெளி 't' என்றும் iஆவது பொருளானது ஒவ்வொரு j_i^{th} அமைப்பிலும் உற்பத்தி செய்யப்படும் என்றும் கொள்வோம். பிறகு, ஓர் அலகு காலத்திற்குச், சராசரி விலையானது

$$K = \frac{C_s}{t} + \sum \frac{C_{si}}{j_i t} + \frac{1}{2}\, \Sigma C_{1i}\, r_i\, j_i\, t \qquad \dots \quad (85)$$

$\{j_i\}$ அனைத்தும் முழு எண்களாக இருக்கும் வண்ணம், குறைந்தது ஒரு $j_i=1$ என்றும் அமைந்த கட்டுப்பாட்டின் படி Kஐ மீச்சிறுமமாக்கும். $\{j_i\}$, 't' இவற்றைத் தேர்ந்தெடுத்தலே நாம் விரும்புவதாகும். மேற்கூறப்பட்ட கட்டுப்பாட்டைக் கருத்தினின்றும் நீக்கி $\frac{\partial k}{\partial t}, \frac{\partial k}{\partial j_i}$ இவற்றைப்பூச்சியத்திற்குச்சமமாக்கினால்

$$t = \sqrt{\frac{\Sigma C_3 + \Sigma C_{3i}/j_i}{\Sigma r_i C_{1i} j_i}} \qquad \ldots (36)$$

$$j_i = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2C_3}{r_i C_1{}^i}} \qquad \ldots (37)$$

என்று பெறுகிறோம.

j_i–க்கேற்ற மதிப்பை 't'–ல் பிரதியிட்டால் $t=0$ என்பது கிடைக்கும். இதுவே K–ன் மீப்பெரும மதிப்பாகும். அதற்குப் பதிலாக $j_i = 1$ for all 'i' என்ற ஊகத்துடன் தொடங்கி, K ஐ எல்லா $j_i=1$ என்ற அமைப்பில், மீச்சிறுமமாக்கும் $t=t_1$ என்ற மதிப்பைக் கணக்கீடு செய்கிறோம். எனவே, நாம் $\frac{1}{t_1}\sqrt{\frac{\Sigma C_{3i}}{r_i C_{1i}}}$ என்ற மதிப்பைக் கணக்கீடு செய்கிறோம். மேலும் j_i மீச்சிறுமமாக்கும் இப் புறத்திலிருக்கும் ஏதேனுமொரு முழு எண் 'K'ஐயும் கணக்கீடு செய்கிறோம். நேரடியான கணக்கீடுகள் எந்த j_i-ன் மதிப்பு 1 ஆக அமைகிறது என்பதைத் தெளிவாக்குகிறது. ஏதேனுமொரு j_i ஒன்றுக்கு அப்பாற்பட்ட ஏதேனுமொரு மதிப்பைப் பெறுகையில் கணக்கீடு மறுபடியும் திரும்பத்திரும்பச் செய்யப்பட்டு $\{j_i\}$ -ன் ஏதேனும் ஒரு (' matching set')-ம் 'ஒத்திசை உருத்தொகுதி' அல்லது 'நிகரான தொரு தன்மையான பொருள்களின் குவியல்'-ம் 't' யும் பெறப்படும் வரையில் தொடரப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $C_3 = 22$ என்று கொள்க.

i	1	2	3
r_i	1	20	25
C_{1i}	1	2	1
C_{3i}	10	6	7

$j_1 = j_2 = j_3 = 1$ என்றிருக்கும்போது $f = \sqrt{\frac{90}{65}} = 1 \cdot 17$
t_1-ன் மதிப்பிலிருந்து $j_1 = 4, j_2 = 1, j_3 = 1$ என்பன வற்றைக் கணக்கீடு செய்கிறோம் இத்தகைய j மதிப்புக்களைச் சூத்திரத்தில் பிரதியீடு செய்யும்போது $t = 1 \cdot 09$ என்றும், $j_1 = 4$ $j_2 = 1$ $j_3 = 1$ என்றும் பெருகிறோம். எனவே, இவை பெரிதுமுகந்தன என்று முடிவு செய்கிறோம்.

நிகழ்தகவு சார்ந்த கணக்குகள் (Probabilistic problems) (lead time) ''காலக் கழிவு நேரம்'' ஏற்பத் தேவையின் அளவைத் துல்லியமாக முன்கூட்டியே அறிவிக்க ஏலாதிருக்கும் சூழ்நிலை களும் எழுவதுண்டு. ஒரு குறிப்பிட்ட திருப்பு உத்திரவு நிலையில் கையிருப்பு அமையும்போது உற்பத்தி நுட்பம் உடனடியாகத் தொடக்கப்பட முடியாது. இத்தகைய நிலையின் எதிர் விளைவாகவே ''காப்புக் கையிருப்பு''க் கொள்கை உருவாக் கப்பட்டது. ஒரு பொருள் உற்பத்திக்கென முடிவு எடுக்கப்படுவ தற்கும் சரக்குப் பட்டியலுக்கு அப்பொருள் அனுப்பப்படுவதற்கும் இடைப்பட்ட காலக் கழிவு நேரம் L என்று கொள்க. சராசரியாக $L\bar{r}$, ($\bar{r}$ என்பது சராசரி தேவை வீதமாகும்.) பொருள்களுக்கான தேவையை நாம் எதிர்பார்க்கிறோம். கையிருப்பானது Lr என்ற அளவை எட்டுகின்றநேரத்திலாவது நாம் உத்திரவு பிறப்பிக்கமுடியும். இப்படிப்பட்ட ஒரு செயல் பாட்டுக்கொள்கை பாதி அளவுக்குக்குறைபாட்டினைத் தோற்று விக்கும். இதனைத் தவிர்க்கக் ''காப்புக் கையிருப்பாக'' (buffer stock) b அலகுகளைக்கூட்டுகிறோம். கையிருப்பானது $L\bar{r} + b = s$ என்ற அளவை எட்டும்போது, உத்தரவு பிறப்பிக்கிறோம். இவ் விடத்து, b ஆனது குறைபாடு நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு குறை வானதாக ($0 \cdot 05$ அல்லது $0 \cdot 01$) இருக்கும் வண்ணம் தேர்ந் தெடுக்கப்படுகிறது. இவ்விதமாக b ஆனது தேர்வு செய்யப் படுதல், நிலவரவிலை, குறைபாடு விலை (shortage cost) இவற்றில் சிறிது உயர்வைத் தோற்றுவிக்கும் மேலும், கவனமான ஆராய்ச்சியானது b, q என்ற இரண்டும் தனித்தனியாகப்பெரிது முகந்த மதிப்பைப் பெறும் விதமாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது என்பது தெளிவாகும்.

கையிருப்பானது இவ்வாறு தொடர்ச்சியான கண்காணிப் பின்கீழ் வைக்கப்பட்டு, அக் கையிருப்பானவை முன்பே தீர்மானிக்கப்பட்ட ஒரு நிலையை அடையும்போது, ஒரு நிலை

யான அளவுக்கான ஆணை பிறப்பிக்கப்படும்படியான கொள்கைத் திட்டம் "இரண்டு தொட்டு கொள்கைத் திட்டம்" என்று வழங்கப்படுகின்றன. இத்தகைய கொள்கைத் திட்டம் ஏற்கெனவே விரிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளது.

இத்தகைய 'இரண்டு தொட்டு கொள்கைத் திட்டம்' மறு உத்திரவுக்கான வாய்ப்புகளை, எவ்வித எழுத்துக் குறிப்பீடுமின்றி ஏற்படுத்திக் கண்காணிக்கிறது.

ஒரு நிகழ்தகவுப்பரவலின் நிபந்தனைக்குட்பட்டே காலக் கழிவு நேரம் (lcad time) நமது அறிவுக்குட்பட்டதாக அமைகிறது என்றும், தேவை வீதம் (Demand Rate) ஒரு மாறிலியாக அமைகிறது என்றும் நிலையில் எத்தகைய விளைவுகள் ஏற்படுமோ, அத்தகைய விளைவுகளே மாறிலியான அறிவுக்குட்பட்ட காலக் கழிவு நேரமும், மாறுபடும் தன்மைத்தான தேவையும் கொண்ட சூழ்நிலையிலும் ஏற்படும் என்பது கவனத்தில் கொள்ளத்தக்க ஒன்றாகும். மேற்கூறப்பட்ட இரு வேறு நிலைகளிலும், திருப்பு உத்தரவு புள்ளி (Reorder Point) யானது. காலக்கழிவு நேரத்தின் போது, குறைபாடு (Shortage) ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு, பொருத்தமான அளவு குறைவாக அமையும் வண்ணம் அதாவது α என இருக்கும் வண்ணமே அமைக்கப்படுகிறது. ஒரு நிலையான, அறிவுக்குட்பட்ட காலக்கழிவைக் கொண்ட ஒரு சூழ்நிலையில், காலக் கழிவு நேரத்தின்போது, 'தேவையின்' பரவலை (Distribution) முன்கூட்டியே அறிவிக்க வேண்டி இருக்கலாம். அதற்குப் பின்பு, α-வைச் சார்ந்த ஒரு காலச் சார்பு, மிஞ்சி நிற்கும்படியான ஒரு தேவை அளவைத் தெரிந்திருக்கவேண்டியிருக்கும். தெரிந்த தேவை அளவு, r என்றால், காலக்கழிவு நேரம் 's/r' என்ற அளவை மிஞ்சும் நிகழ்தகவு 'α' என்றிருக்கும் வகையில் கையிருப்பு s என்ற அளவை எட்டுகையில் திருப்பு உத்திரவு பிறப்பிக்க வேண்டியுள்ளது. ஒரு சில நிலைகளில் தேவை வீதம், காலக்கழிவு நேரம் இவை இரண்டையும் சார்ந்த, இணைப்புப் பரவலை (Joint Distribution) கருத்தில் கொள்ள வேண்டியுள்ளது. முன் கூட்டியே அறிவிக்கும் தேவையின் அளவு மிகத் துல்லியமாக அமைய அமைய குறைந்த அளவு பாதுகாப்புக் கையிருப்பே (safety stock) தேவைப்படும் என்பது தெளிவாகிறது. கடந்த சில ஆண்டுகளாகக்கடந்த காலச்சரக்குப் பட்டியலின் சரித்திரத்தினை ஆராய்வோம். எதிர்காலத் தேவையைத் துல்லியமாக முன்கூட்டி அறிவித்தலுக்கு முறைகள் வகுக்கப்படுவதிலே கவனம் செலுத்தப்படுகிறது. (Refer the book by R. G. Brown)

கால வரை ஆய்வுக் கொள்கை (Periodic Review Policies)

ஒரு சில நிலைகளில் கையிருப்பைத் தொடர்ச்சியாகக் கண்காணிப்பில் அமைப்பது கடினமாக அமையும். ஆனால், ஒரு குறித்த நிலையான கால இடைவேளைக்குப்பின் கையிருப்பைக் கண்காணிப்புச்செய்வது இயலும். இத்தகைய சூழ்நிலைகளில் உபயோகப்படுத்தப் பெறும் கொள்கைத் திட்டம், ஒவ்வொர் கண்காணிப்புக் காலத் திட்டத்தின் போதும் ஓர் உற்பத்தி ஓட்டத்தைத் தேவையாக்கியிருந்தால் இரண்டு விதமான முடிவுகளை எடுக்க இயலும்.

(1) எவ்வளவு கால இடைவெளிக் கொருமுறை "கண்காணிப்பு" மேற்கொள்ளப்பட வேண்டும்?

(2) ஒவ்வொரு கண்காணிப்பையும் தொடர்ந்து எவ்வளவு சேர்க்கப்பட வேண்டும் ?

சில சூழ்நிலைகளில், குறிப்பிட்ட நிலையான கால இடைவெளிக் கொருமுறை கண்காணிப்பு நடத்தப்பட்டு, அக்கண்காணிப்பினைத் தொடர்ந்து, எவ்வளவு சேர்க்கப்பட வேண்டும் என்பதற்கு முன், ஏதேனும் சேர்க்கப்பட வேண்டுமா அல்லது வேண்டாமா என்பதை முடிவு செய்தலே கொள்கைத் திட்டமாக அமையும்.

இத்தகைய சூழ்நிலைகளுக்கேற்ற மிகச்சரியான தீர்மானத்தை மேற்கொள்ள சூத்திரங்கள் அல்லது முறைகள் எளிமையானவை அல்ல. ஏனெனில், இத்தகைய செயல்முறைச் சூத்திரங்கள் எதிர்பார்க்கும் நிலைகளைக் கணக்கீடு செய்கையில் பல்வேறு சிக்கலான முழு நிறைகளை (integrals) தீர்வு செய்யவேண்டி அமைந்துள்ளன. தேவையானது மிகத் துல்லியமாக நமது அறிவுக்குட்பட்டிருப்பின் அதன் பயனால் எழக்கூடிய விலைகளுக் கேற்ப ஒரு கோவையைத் தீர்மானித்துப்பொதுவான ஆய்த்துணர்வு வழிமுறையாகும். சாதாரணமாக, கையிருப்பானது தேவையின் அளவைச் சமாளிப்பதற்குப் போதுமானதா, அல்லவாஎன்பதைச் சார்ந்து இருவிதநிலைகளை ஆராய்ந்தறியலாம். நாம் தேவையை முன் கூட்டியோ அறிந்திலோம். ஆனால், பல்வேறு தேவை அளவுகளின் நிகழ்தகவு பற்றிய விவரம்அறிந்துள்ளோம். எனவே, விலைகளை, தேவைகளைக் கொண்டு சராசரியாக்குகிறோம். நாம் அறிந்துள்ள நிகழ் தகவுகளைப்பெருக்கியோ,பின்னர் அப்பெருக்குத் தொகையைக்கூட்டியோ அல்லது முழுநிறை(integration) யாக்கியோ இச் சராசரி விலைகளைப்பெறுகின்றோம். பின்னர் தீர்மானிக்கும் மாறிகளின் மிகப் பெரிதுமுகந்த மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிக்க ஏதுவாகிறது. இத்தகைய மதிப்புகளை, ஒரு சில செயல்நிலை

களில் நிர்ணயிப்பதில் தகுந்த செயல்முறை சூத்திரங்களையுடைய ஏராளமான கணக்கீடுகளைத்தவிர, கணிசமான எண் கணிதசார்பு முறைகளும் தேவைப்படுகின்றன. இதற்குக்காரணம் என்னவென்றால், முடிவு மாறிகள் (Decision variables) வழக்கமாக, அட்டவணையிடப்பட்டுள்ள சார்புகளைக் கொண்டு தீர்வுசெய்ய முடியாத முழுநிறைகள் (integrals) சம்பந்தப்பட்டு நிற்பதேயாகும். எனவே. ஒன்று அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பொருள்கள் கொள் முதல் செய்யப்பட வேண்டியிருப்பின், ஒரு மின்னியக் கணிப்பான் (Electronic computer) ஏதுவான கணக்கீடு முறையாக அமையும்.

இத்தகைய காரணங்களைக் கவனத்தில் கொண்டே செயல் முறைச் சரக்குப்பட்டியல் கட்டுப்பாட்டுக் கணக்குகளில், எதிர் காலத்திற்கென முன்கூட்டியே கணிக்கப்பட்ட காலக்கழிவுநேரம் சார்ந்த தேவையினையும், சிக்கனத் தொகுதி அளவு (Economic lot size) செயல்முறைச் சூத்திரத்தையும் மிகுதிப் பெரும்பான்மையாகப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இப்போது சில செயல்நிலைச் சரக்குப் பட்டியல் கணக்குகளின் விளக்கத்தைக் காண்போம். கையிருப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளையும் தனித்தனியாகக் கட்டுப்படுத்துகின்ற முறைகளைப் பற்றி எண்ணிறந்த ஆய்வுகள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன. இப்படிப்பட்ட ஆய்வுத் தாள்கள் ஹான்ஸ்மேன் (1962), ஹேட்லி-விட்டின் (1963), வாக்னர் (1962) இவர்களின் வெளியீடுகளாகச் சுருக்கப்பட்டுள்ளன. நன்கு விரிவான கணித இயல்படிகளைக் கொண்டு பெறும் முடிவுகள், இத்தகைய படிகளுக்குத் தேவைப்படும் கணக்கீடுகளின் சிக்கலோடு ஒப்பிடப்பட்டால், மிகுந்த ஏமாற்றமளிப்பதாக உள்ளனமட்டுமின்றி, சரக்குப் பட்டியல் 50,000-க்கு மேற்பட்ட ஒன்றுடன் ஒன்று கிரியை புரியும் படியான பொருள்களைக் கொண்டிருக்கும்போது, அப்பொருள்களைக் கட்டுப்படுத்துவதற்காக உண்மையான படிவங்களை உபயோகித்தல், கொள்கை ஆராய்ச்சி அளவிலும் மிகுந்த துன்பகரமானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு பொதுவான உற்பத்தி முன்தேவைப் பொருளைக் கொண்டு தயாரிக்கப்படும் மூன்று பொருள்களைக் கருத்தில் கொள்க. உற்பத்தி முன்தேவைப் பொருளுக்கான உத்தரவு விலை ரூ. 1000 என்றும், பாதுகாப்பு விலையானது ஒரு நாளுக்கு ஓர் அலகிற்கு ஒரு பைசாவாக அமைகிறது என்றும் கொள்க.

உற்பத்தி முன்தேவைப் பொருள் உத்தரவு பூர்த்தி செய்யப்படுவதற்கு ஏழு நாள்களாகிறது. கீழ்க்காணப்பட்ட பட்டியலில் காணப்படும் விவரங்களை நாம் பொருள்கள் தயாரித்து முடிக்கப்பட்டவுடன் பெறுகிறோம். தயாரித்து முடிக்கப்பட்ட முழுப் பொருள்களுக்கான குறைபாடு திருப்பி உத்தரவிடப்படுகிறது. உற்பத்தி முன் தேவைப்பொருளில் ஏற்படும் ஏதேனும் குறைபாடு அதன் வாயிலாக நேரடியாக ஒருவித செலவையும் ஏற்படுத்துவதில்லை. ஆனால், உற்பத்தியில் தடங்கலையும், காலக் கழிவையும் ஏற்படுத்துகிறது. இத்தகைய தடங்கல், பூர்த்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களின் குறைபாட்டினை ஏற்படுத்துகிறது.

பூர்த்தி செய்யப்பட்ட பொருளுக்கான விவரம்

விவரம்	பொருள்கள்		
	A	B	பொருள் C
சராசரி தினசரித் தேவை, γ	43	78	25
திட்ட விலக்கம், σ	20	14	5
தினசரி நிலவர விலை, C_1	1	0·5	1·2
தினசரி குறைபாடு செலவு, C_2	20	10	30
அமைப்பு விலை, C_3	800	1000	3000
அமைப்பு கால நாள்கள்	0·5	1·0	1·0
தினசரி உற்பத்தி வீதம்	192	385	90
தினசரி ஓர் அலகிற்கான முன் உற்பத்தி அளவு	3	2	5

அமைப்புக் காலங்களும், உற்பத்தி வீதங்களும் அட்டவணையில் முதலில் கவனிக்கத் தகுந்த அம்சங்களாகும். எடுத்துக்காட்டாக, மூன்று பொருள்களையும் ஒரே நாளில் உற்பத்திக்கென அமைக்கமுடியாது. ஏனெனில், அரை நாளோ அல்லது ஒரு முழு நாளோ அமைப்பிற்கென செலவிடப்பட வேண்டி உள்ளது. மேலும், சராசரி தினசரி தேவையும், திட்ட விலக்கமுமே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இச் சார்புகளின் பரவல் கொடுக்கப்படவில்லை. ஆயினும், இச் சார்புகளின் பரவல்கள் தனித்தனியானவை என்று கொள்வோம். இப்பொழுது, பெரும்

எண்களின் விதியானது, பல்வேறு நாள்களுக்கான (பத்து அல்லது மேற்பட்ட) மொத்த தேவையானது, தோராயமாக, ஒரு சமச்சீரான தேவைச் சார்பிற்கு, இயற்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளது. இப்போது, இக் கணக்கினைத் தீர்வை செய்வோம்.

முன் உற்பத்தி அளவிற்கான, சராசரி தினசரித் தேவை, திட்ட விலக்கம் இவற்றைக் கொள்க. மூன்று பொருள்களும் முறையே 3, 2, 5 அலகு முன் உற்பத்திப் பொருள்களை வேண்டியிருப்பதால், முன் உற்பத்திப் பொருள் சராசரிக்கான தினசரி மொத்தத் தேவையானது.

$$3\,(43) + 2\,(78) + 5\,(25) = 410.$$

மாறுபாடு $= 9\,(2\;)^2 + 4\,(14)^2 + 25\,(5^2) = 5009.$

திட்ட விலக்கம் $= 71$

ஏனெனில்,

$Z = ax + 6y + cz$ என்றிருந்தால்,

$$Z = a\bar{x} + 6\bar{y} + c\bar{z}$$

$V(z\;= a^2\,v(x) + 6^2\,v(y) + c^2\,v(x)$, ($x,y,z$ இவை தனித்தனி மாறிகள் என்றால்)

மேலும், $C_3 = 1000$ ரூபாய்கள், $C_1 = 1$ பைசா என்பது கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்,

$$q^0 = \sqrt{\frac{2C_3 r}{C_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 410}{0{\cdot}01}} \simeq 9000$$

$$\frac{9000}{410} \simeq 22 \text{ நாள்கள்}$$

ஆனால், செயல்நிலைகளில் இயந்திர அமைப்பானது ஒரு வாரத்தில் ஏழு நாள்களும் இயங்கினால், நாம் மூன்று வாரங்களுக்கு ஒரு முறை உத்தரவு செய்வோம் என்று கொள்வோம். இயந்திர அமைப்பானது, வாரத்திற்கு ஐந்து நாள்கள் இயங்கினால் (அட்டவணையில் இயங்கும் நாள்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன) நாம் ஒரு மாதத்திற்கு ஒருமுறை உத்தரவிடுவோம். ஓர் எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வாரத்தில் ஏழு நாள்களும் இயங்கும் நிலையைக் கருத்தில் கொள்க.

அடுத்தமுறை, உத்தரவு பூர்த்தி செய்யப்படும் வரையில் உத்தரவிடப்படும் அளவும், கையிருப்பும் சேர்ந்த தொகுதி தேவையாயிருப்பதால் 29 நாள்களுக்கான தேவையும், மாறு பாட்டை நீக்குவதற்காக ஒரு தொகுதிக் கையிருப்பும் சேர்ந்த அளவு தேவைப்படும். இவ்விடத்து இரண்டு உத்தரவு களுக்கான இடைப்பட்ட காலமும், காலக் கழிவு நேரமும் சேர்த்து $22 + 7 = 29$ நாள்கள் எனப் பெறுகிறோம். மூன்று பொருள்களின் மாறுபாடும் தேவையான தொகுதி என்று கொள்க. தினசரி மாறுபாடு 71 ஆகும். எனவே. 29 நாள்க ளுக்குத் தேவையான தொகுதி $= 3\times \sqrt{29\times 71} = 1130$

29 நாள்களுக்கு மேற்பட்ட எல்லா அவசிய நிலைகளைச் சமாளிக்கத் தேவைப்படும் அளவு $= 1130 + 29\times 410 = 13020.$ எனவே, உத்தரவிடப்படும் அளவானது கீழ்க்கண்ட விதி முறையில் இயங்குகிறது. ஒவ்வோர் இருபத்திரண்டு நாள்க ளுக்குப் பின்னும், கையிருப்பும், உத்தரவிடப்படும் அளவும் 13020 என அமையும் வரையில், தேவையான அளவு உத்தர விடப்படவேண்டும்.

கையிருப்பானது, 3000 என அமைந்தால், உத்தரவு அளவு $= 13020 - 3000 = \mathbf{10020}$.

ஒரு மாற்றுக்கொள்கையாக, ஒவ்வொரு முறையும் "சிக்கனத் தொகுதி அளவு (9000) மதிப்பை உத்தரவிடும் அளவாகக் கொள்ளலாம். இந்தக் கையிருப்பானது காலக் கழிவு நேரம் (7 நாள்கள்) வரை போதுமானதாயுள்ளது. கையிருப்பானது $7\,(410) + 3\sqrt{7}\ \ (71) = 3431$ என்ற அளவிற்குக் குறைந்த உடனேயே, உத்தரவு பிறப்பிக்கப்படும். இத்தகைய கொள்கைத் திட்டம் சற்றுக் குறைவான கையிருப்பின் நிலைக்களனாகும். மேலும், 22 நாள்களுக்கொருமுறை சீரான கண்காணிப்பு, தொடர்ச்சியான கண்காணிப்பைக்காட்டிலும் குறைந்த செலவை ஏற்படுத்துகிறது.

மேற்குறிப்பிடப்பட்ட இரண்டு கொள்கைத் திட்டங்கள் ஒவ் வொன்றும், தேவைப்படும் நேரத்தில், முன் உற்பத்திப் பொருள் தட்டுப்பாடில்லாமல் வழிவகை செய்கிறது.

முன் உற்பத்திப் பொருளில் தட்டுப்பாடு ஏற்படுகின்றதென்ற ஊகத்தோடு, முழுவதும் பூர்த்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களை அணுகுவோம். பல்வேறுவிதமான கொள்கைத் திட்ட முறைகள் இருப்பினும், முக்கியமான ஒரு சிலவற்றைக் காண்போம்.

இரட்டைத் தொட்டி அல்லது $S-s$ கொள்கை

கையிருப்பானது 's' என்ற அளவிற்குக் குறைந்த உடன், S அளவிலிருந்து கையிருக்கும் அளவு கழிவு செய்யப்பட்ட அளவு உத்தரவிடப்படுவதை இக் கொள்கைத் திட்டம் வலியுறுத்து கின்றது. ஆனால், s-ன் மதிப்பைத் தீர்மானித்தலே இங்குக் கடின மானதாகும். ஏனெனில், உத்தரவு பூர்த்தி செய்யப்படும் வரை தேவையைச் சமாளிக்கப் போதுமானதுள்ளதாக 's' ஆனது அமையவேண்டும். மேலும் கழிவு நேரமானது, உத்திரவிடப்படும் அளவிற்கென உற்பத்தி தொடங்குவதற்குமுன் எந்த அளவு தேவை என்ற கேள்வியிலேயே சார்ந்து நிற்கிறது. இயந்திர அமைப்பிற்கு எவ்வித உத்தரவும் அனுப்பப்படவில்லையெனில், உத்தரவு நாளினின்றும் அரைநாளில் பொருள் A-க்கான உத்தரவு பூர்த்தி செய்யப்படும். அந்த உத்தரவு பூர்த்திசெய்யப் படும்வரை, ஒரு நாளுக்கு 192 அலகுகள் வீதம் பூர்த்தி செய்தல் தொடர்ந்து நடைபெறும். ஆனால், பொருள்கள் B,C இவையும் முதலிலேயே உற்பத்தி செய்யப்படவேண்டும் என்றமைந்தால், உற்பத்தியானது பல நாள்களுக்குத் தொடங்கப் படமாட்டாது.

எனவே, இயங்கு நிலையானது ஒவ்வொரு நாளும், மாற வேண்டும் அல்லது, மற்ற இரண்டு பொருள்களும் முதலிலேயே உற்பத்தி செய்யப்படவேண்டிய நிலையில் தேவையானதாக இருக்கவேண்டியுள்ளது. முதலில் கூறப்பட்ட கோட்பானது, செயல் நிலைகளில் அனுசரிக்கப்படுவது மிகுந்த சிக்கலானதாகும். இரண்டாவது கோட்பாடோ, ஏராளமான, தேவைக்கதிகமான கையிருப்பைத் தோற்றுவிக்கும்.

ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் நிலையான கால இடைவெளியில் உத்தர விடுதல்

சிக்கன தொகுதி அளவு சூத்திரத்தை உபயோகப்படுத்தி ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் தனித்தனியாகக் கால இடைவெளி யைக் கணக்கீடு செய்ய இயலும். ஒரு பயன்படுத்தத்தக்க வழி முறையை அடைய, கால இடைவெளியை அவை சிறிய முழு எண்களின் பெருக்கிலிகளாக அமையும் வண்ணம் சீரமைக்க வேண்டுவது அவசியமாகும். அடுத்தடுத்த கால இடைவெளி களில், உற்பத்தி அளவை சமநிலைப்படுத்தும் வகையில் தேவை யான உற்பத்தி செய்து முழுவதும் தயாரிக்கப்பட்ட நிலையி லுள்ள பொருள்கள் இருந்தால், இத்தகையதொரு வழிமுறை செவ்வனே செயல்படும். ஆனால், நமது ஆய்வுக்குட்பட்டன வாக மூன்றே பொருள்கள் இருக்கின்ற நிலைகளில், இத்தகைய தொரு நடைமுறை பயனளிக்காது, பொருள்கள் A, B, C இவற்

றிற்கு முறையே, 7, 8, 15 நாள்களே மிகவும் உகந்த கால இடைவெளிகளாக அமைகின்றன.

பெரிதுமுகந்த கால இடைவெளி அமைப்பிற்கான கணக்கீடு

பொருள் A : $q^{\circ}_{A} \sqrt{\dfrac{2C_{3}r}{C_{1}}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 800 \times 48}{1}}$

$= 262{\cdot}8 \simeq 263$ அலகுகள்.

ஆனால், $q^{\circ}_{A} = rt^{\circ}_{A}$, $t^{\circ}_{A} = \dfrac{263}{48} = 6{\cdot}1 \simeq 7$ நாள்கள்.

பொருள் B : $q^{\circ}_{B} = \sqrt{\dfrac{2\,C_{3}r}{C_{1}}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 1000 \times 78}{0{\cdot}5}}$

$= 558{\cdot}5 \simeq 559$ அலகுகள்.

$\therefore \quad t_{B} = \dfrac{559}{78} = 7{\cdot}1 \simeq 8$ நாள்கள்.

பொருள் C : $q^{\circ}_{c} = \sqrt{\dfrac{2\,C_{3}r_{1}}{C_{1}}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 3000 \times 25}{1{\cdot}2}}$

$\simeq 354$ அலகுகள்.

$t^{\circ}_{c} = \dfrac{354}{25} = 14{\cdot}16 \simeq 15$ நாள்கள்.

பொருள்கள் A, B இவற்றை ஒவ்வொரு வாரமும் உற்பத்தி செய்வதன் மூலமும், பொருள் C–யை, இருவாரத்திற்கொருமுறை உற்பத்தி செய்வதன் மூலமும், மேலே குறிக்கப்பட்ட முடிவுகளைத் தோராயமாக்கலாம்.

உற்பத்திக் காலமானது கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது :

பொருள் $A = 0{\cdot}5 + \dfrac{(7)\ (48)}{192}$

$=$ அமைப்புக் கால நாள்கள் $+ \dfrac{r.t}{k}$

$= 0{\cdot}5 + 1{\cdot}5 = 2{\cdot}0$ நாள்கள்.

பொருள் $B = 1{\cdot}0 + \dfrac{(7)\ (78)}{385} = 2{\cdot}5$ நாள்கள்.

பொருள் $C = 10 + \dfrac{(14)\ (25)}{90} = 4{\cdot}9$ நாள்கள்.

முதல் வாரத்தில், பொருள்கள் A,B உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற நேரத்தில் உற்பத்தித்திறன் போதுமானதாக அமைகிறது. ஏனெனில், A,B இவற்றைத் தயாரிக்க $2{\cdot}0 + 2{\cdot}5 = 4{\cdot}5$ நாள்கள் தேவைப்படுகின்றன. $4{\cdot}5$ நாள்கள் ஒரு வாரத்திற்குள் அடங்கும். ஆனால், இரண்டாவது வாரத்தில் எல்லாப் பொருள்களும் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற நேரத்து, $2{\cdot}0 + 2{\cdot}5 + 4{\cdot}9 = 9{\cdot}4$ நாள்களுக்கு உற்பத்தி நடக்க வேண்டியுள்ளது. எனவே, ஒரு வாரத்தைக் கடந்து அடுத்த வாரத்திற்கும் உற்பத்தி நடக்கும். எனவே, மொத்த உற்பத்தித் திறன் இரண்டு வாரங்களாக அமைந்தால் போதுமானதாகும். ஏனெனில் 14 நாள்களில், $9{\cdot}4 + (2{\cdot}0 + 2{\cdot}5) = 13{\cdot}5$ நாள்கள் வேலை நடைபெறலாம். ஆனால், தொகுதிக் கையிருப்பு கணக்கீடு இத்தகைய முறையின்கீழ் மிகுந்த சிக்கலானதாதலால், இத்தகையதொரு செயல்முறை மேற்கொள்ளுவதற்குப் பல கடினங்களைத் தோற்றுவிக்கிறது.

சமநிலைப்படுத்தப்படாத உற்பத்தியால் இத்தகைய கடினங்கள் ஏற்படுகின்றன. எனவே, எல்லாப் பொருள்களுக்குமான உற்பத்தி ஓட்டத்திற்கு இடையில் சம கால இடைவெளியைப் பயன்படுத்துகிறோம் என்ற உண்மையை இச் சிக்கல்கள் கோடிட்டுக் காட்டுகின்றன. குறிப்பிட்ட எடுத்துக் காட்டில், இந்த நடைமுறையே மிகப் பொருத்தமான கோட்பாடாகும். பல பொருள்களை மேற்கொள்ளும் கணக்குகளில், சரக்குகளை சமநிலைப்படுத்துதல் எளிமையானதே. எல்லாப் பொருள்களும் ஒரே நிலையான கால இடைவெளி எப்போதும் பயனளிக்காது.

எல்லாப் பொருள்களுக்கும் பொதுவான உத்தரவு காலஇடைவெளி

பொதுவான உத்தரவு காலஇடைவெளிக்கு மிகவும்பொருத்தமான ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறுவதற்கு, கீழ்க்கண்ட குறியீடுகளைக் கவனத்தில் கொள்க:

$C_{1i} = l$ ஆவது பொருளுக்கு, ஓர் அலகிற்கு, ஒரு நாளைக்கு நிலவர விலை.

$C_{2i} =$ ஓர் அலகு பொருளுக்கு, ஒரு நாளைக்குப் பாதுகாப்புச்செலவு.

$C_{3i} = l$ ஆவது பொருளுக்கான அமைப்புச் செலவு.

R_i = உற்பத்தி வீதம்.

r_i = தினசரி சராசரித் தேவை.

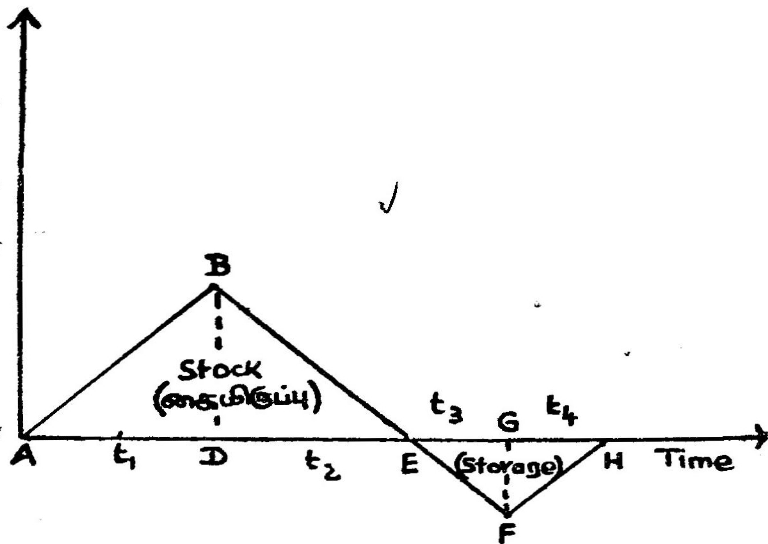
t_{1i} = கையிருப்பு அளவு நேரெண்ணாக இருக்கும் போது, சுழற்சியின் உற்பத்திப்பகுதி

t_{2i} = கையிருப்பு அளவு நேரெண்ணாக இருக்கும் போது, சுழற்சியின் உற்பத்தியில்லாத பகுதி. (அதாவது, ஒரு தட்டுப்பாடு ஏற்படுகையில் நிலை)

t_{4i}= கையிருப்பு அளவு எதிரெண்ணாக இருக்கையில், சுழற்சியின் உற்பத்திப்பகுதி.

$t = t_{1i} + t_{2i} + t_{3i} + t_{4i}$ = பொதுவான சுழற்சிக்கான நேரம்.

k= ஒரு கால அலகிற்கான மொத்த செலவு.



படம் : ஒரு சரக்குப்பட்டியல் சுழற்சி

ஆய்வு முறையானது, (10)-ல் உபயோகிக்கப்படும் நடைமுறையை ஒத்ததாகும். ஒவ்வொரு தனியான i-ஆவது பொருளுக்கும், K_i என்ற ஒரு விலை உள்ளது. இவ்விலையானது (10)-ல் காணப்படும் Kஐ ஒத்ததாகும். 10-ல் காணப்படும் மொத்த விலையானது K_i-க்களின் மொத்தத்திற்கு நேரானதாகும்.

எனவே,

$$K_i = \frac{\frac{1}{2} k_i r_i [C_{1i} t_{2i}^2 + C_2{}^2{}_i] + C_{3i}(k_i - r_i)}{k_i (t_{2i} + t_{3i})} \quad \ldots \quad (88)$$

Rஆவது சுழச்சிக்கான மொத்த விலை,

$$K = \Sigma K_i \qquad \ldots (39)$$

பொது சுழற்சிநேரம் $t = t_{1i} + t_{2i} + t_{3i} + t_{4i}$ என்றகட்டுப்பாட்டின் படி, K-யை, t_{1i}, t_{2i} யைச்சார்ந்து மீச்சிறுமமாக்குதல் நமது கொள்கையாகும்.

$$t_{1i} + t_{2i} + t_{3i} + t_{4i} = t \qquad \ldots (40)$$

(5),(8) இவற்றில் உபயோகிக்கப்பட்டுள்ள முடிவுகளை ஒத்த படிகளைப் பின்பற்றி, tஐ $t_{1i}\ t_{2i}$ சார்பாக,

$$t = \frac{(t_{2i} + t_{3i})\ ki}{(k_i - r_i)} \qquad \ldots (41)$$

என அழைக்கிறோம். Kஐ, (41) என்ற நிபந்தனையைக் கொண்டு மீச்சிறுமமாக்குதல் நமது கோட்பாடாகும்.

லாக்ராஞ்சர் பெருக்கிலியின் உதவியைக் கொண்டு, இரண்டு படிகளில் இவ்விலக்கினை அடைகிறோம். t-ன் மதிப்பு நமது அறிவுக்குட்பட்டது என்ற ஊகத்துடன், t_{2i}, i_{3i} இவற்றின் மதிப்பை t-யின் வாயிலாகப் பெறுகிறோம். பிறகு K-ன் மதிப்பை t-ன் சார்பாகப் பெற்று, t-ன் பெரிதுமுகந்த மதிப்பைப் பெற்றுக் கணக்கின் தீர்வையை அடைகிறோம்.

எனவே,

$$t^{\circ} = \left[\frac{2\Sigma CSi}{\sum \frac{r_i C_{1i} C_{2i}\left(1 - \frac{r_i}{k_i}\right)}{(c_{1i} - c_{2i})}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots (42)$$

$$q^{\circ}_i = t^{\circ}\ r_i \qquad \ldots (43)$$

என அடைகிறோம்.

இச் சூத்திரத்தில், கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைத் தகுந்த இடத்தில் பொருத்தி, (42)-னின்றும்,

$$(t^{\circ})^2 = \frac{2\,(800 + 1000 + 3000)}{\frac{(1)(20)(43)\left(1 - \frac{43}{132}\right)}{20 + 1} + \frac{(0{\cdot}5)(10)(78)\left(1 - \frac{78}{135}\right)}{10 + 0{\cdot}5} + \frac{(1{\cdot}2)(30)(25)\left(1 - \frac{25}{90}\right)}{30 + 1{\cdot}2}}$$

$$\approx 116.$$

$$\therefore\ t^{\circ} \approx 10.$$

மூன்று பொருள்களும் பத்து-நாள் சுழற்சி வளையத்தில் உற்பத்தி செய்யப்பட்டால், ஒவ்வோர் உற்பத்தி ஓட்டத் துவக்கத்திலும், உற்பத்தி அளவைப் பற்றி நாம் ஏதேனும் ஒரு முடிவினைக் கொள்ள இயலும். இப்படிப்பட்ட பத்து-நாள் சுழற்சி வளையத்தைக் கருத்தில் கொண்டால், கையிருப்பும், உத்தரவிடப்படும் அளவும் சேர்ந்த அளவானது பத்து நாள்களுக்குத் தேவையானதாக இருக்க வேண்டுவது அவசியம். ஒவ்வொரு பத்து நாள் சுழற்சி ஓட்டத்தின் ஆரம்பத்திலும், ஓர் உற்பத்திப் பட்டியல் வரையப்படுகிறது. பொருள்களெல்லாம் A, B, C என்ற வரிசையில் உற்பத்தி செய்யப்பட்டால் பொருள் A-க்கான காலக் கழிவு நேரம் பூச்சியமாகும். மேலும் கையிருப்பு, உத்தரவிடப்படும் அளவு சேர்ந்த தொகை பத்து நாள் தேவையைப் பூர்த்தி செய்யத் தகுந்ததாக அமைய வேண்டும். பொருள் B-யானது காலக் கழிவு நேரத்தைப் பெற்று விளங்குகிறது. அமைப்பு கால அளவுகளின் கூடுதல் (பொருள் A, B இவற்றுக்கான) இக் காலக் கழிவு நேரமாகும். பொருள் C-க்கான காலக் கழிவு நேரம், பொருள் A, பொருள் B, பொருள் C இவற்றிற்கான அமைப்புக் காலங்களின் கூடுதலாக அமையும். முற்போதைய சுழற்சியின் தேவையைச் சார்ந்து, உற்பத்தி நேரமானது சிறிதளவு மாறுபடுகிறது. எனினும், பத்து நாள்களுக்கான சராசரி தேவையைப் பூர்த்தி செய்யத் தகுந்த பொருளை உற்பத்தி செய்வதற்கான காலமாகக் கொள்வதில் பிழையொன்றுமில்லை. உண்மையிலேயே தேவைப்படும் கையிருப்பானது, சராசரி தேவையோடு இரண்டு மடங்கு திட்ட விலக்கம் சேர்ந்த அளவெனக் கணக்கீடு செய்யப்படலாம். (ஒவ்வொரு பொருளுக்கான கையிருப்பு நிலையை வாசகர்களே கணக்கீடு செய்து கொள்ள வேண்டும்.

கணக்கியல் இயந்திரத்தின் மூலம் இக் கணக்கானது தீர்வை செய்யப்பட்டுள்ளது. கடினமான கணக்கிடுகளை மேற்கொண்டு பெறப்படும், பொதுவான சுழற்சி நேரத்திற்கான விலைகள், ஓர் 'இரட்டை தொட்பு' கோட்பாட்டைக் கொண்டு பெறப்படும் விலைகளைப் போன்று அரை மடங்காக அமையும் என்பது குறிப்பிடத் தகுந்ததாகும்.

தட்டுப்பாடு நிகழ்விதம் (Occurrence of Shortage)

'r' என்பது திருப்பு உத்தரவு நிலையெனவும், 'm' ஆனது சராசரி தேவையாகவும், sஆனது தொகுதிக் கையிருப்பு எனவும் $(r = m + s)$ என்றிருந்தால்,

தட்டுப்பாட்டு நிலைக்கான நிகழ்தகவு $= 1 - P(r)$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} P(x) = \sum_{0}^{r} \frac{e^{-m} m^{x}}{X!} \text{ (பாய்சான் பரவலுக்கானது)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} d_x \text{ Where } t = \frac{r-m}{\sigma} \quad \text{(இயற் நிலைப் பரவலுக்கானது)}$$

ஓர் ஆண்டில் எதிர்பார்க்கும் தட்டுப்பாடு (stock out)

$$= \frac{D}{Q} [1 - P(r)] \text{ எண்ணிக்கை}$$

தட்டுப்பாட்டு வீதமானது, இருபது உத்தரவு சுழற்சிகளில் ஒரு முறை அல்லது இரண்டு ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை என்ற கட்டுப்பாட்டினை நிறுவினர் விதிக்க இயலும். மேலும், இந்த நிலையிலேயே தட்டுப்பாடு வீதம் இருக்கும் வண்ணம் திருப்பு உத்தரவு நிலையையும் அமைக்கவும் முடியவும் r-ன் மதிப்புகள் நிலைப்படுத்தப்பட்ட பாய்சான் அட்டவணைகளிலிருந்தோ, இயல் நிலை அட்டவணையிலிருந்தோ, பெறப்படலாம். ஆனால் அதற்கு முன், விரும்பப்படும் செயல் திறன் நிலையானது குறிக்கப்பட வேண்டும்.

பாதுகாப்புக் கையிருப்பின் காலக் கழிவு நேரத் தேவையின் மதிப்பிடப்பட்ட திட்ட விலக்கத்தின் ஒரு நிலைத்த பெருக்கலைக் கொள்ளுதல் ஒரு விதி முறையாகும். திருப்பு உத்தரவு முனையைப் பெறுவதற்கு, காலக் கழிவு நேரத்தின் எதிர்பார்க்கும் தேவையை மேற்குறிப்பிடப்பட்ட அளவுடன் கூட்டி பெறலாம். மேற்குறிப்பிடப்பட்ட தேவையின் நிகழ்தகவு திருப்பு உத்தரவு முனையைக் காட்டிலும் விஞ்சும் வகையில் அமையும் வண்ணம் பெருக்கிகள் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன.

இத்தகையதொரு குறைபாட்டு அளவை (Measure of shortage)யின் முக்கியமான குறையாவது, இம்முறை 1, 10, 100 என்ற அலகில் ஏற்படும் குறைபாடுகளை அல்லது ஒரு நாள், ஒரு வாரம், ஒரு மாதம் என்ற கால அளவில் ஏற்படும் குறைபாடுகளை வித்தியாசப்படுத்தி, அதாவது வேறுபடுத்திக் காட்டத் தவறுகிறது என்பதேயாகும்.

(ii) தட்டுப்பாடான அலகுகளின் எண்ணிக்கை (Number of units short)

இரண்டாவது விதமான "குறைபாடு அளவை"யும் கீழ்க் கண்டவாறு அமைகிறது. அதிகமான பொருள் சாதனங்கள் பெறப்பட்டபோது, திருப்பு உத்தரவிலுள்ள மொத்த அலகுகளின் எண்ணிக்கையே அவ்வளவையாகும், சரக்குப் பட்டியல் நிறுவனர், காலக் கழிவு நேரத்தின் குறைபாட்டு விகிதம், ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு என்று அறுதியாகச் சொன்னால், திருப்பு உத்தரவு முனையானது அதற்குத் தக்கவாறு தெரிந்தெடுக்கப் படலாம்.

ஓர் உத்தரவு சுழற்சியில் உள்ள எதிர்பார்க்கும் குறைபாடு அலகுகளின் எண்ணிக்கை

$$= \sum_{r-1}^{\infty} (x - r)\, p\,(x) < \text{குறிப்பிடப்பட்ட மதிப்பு.}$$

$$= \int_{r}^{\infty} (x-r)\, f\,(x)\, dx \leqslant \text{குறிப்பிடப்பட்ட மதிப்பு.}$$

எதிர்பார்க்கும் குறைபாடு அலகுகளின் எண்ணிக்கைக்கான கோவையானது, $m-r + \sum_{0}^{r-1} p(x)$, (பாய்சான் பரவலுக்கு)

$p(x) = \sum_{0}^{x} p\,(x)$ என்று சுருக்கமாக அமைகிறது.

அல்லது,

இயல்நிலைப் பரவலுக்கான $\sigma\, U(t)$, $\sigma u(t) = \phi(t) - t[1 - \Phi(t)]$,

$$\phi\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\Phi\,(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2n}}\, e^{-\frac{t^2}{2}},\; t = \frac{r-m}{\sigma}$$

m ஆனது எதிர்பார்க்கும் தேவை, σ-காலக்கழிவு நேரத்தின் தேவையின் மாறுபாடு.

திருப்பு உத்தரவு முனையைத் தெரிந்தெடுப்பதற்கான விதியானது,

$$\left.\begin{array}{c} m - r + \sum_{0}^{r-1} P(X) \\ \text{அல்லது } \sigma\, u(t) \end{array}\right\} < \text{குறிப்பிடப்பட்ட மதிப்பு}$$

r-ன் மீச்சிறும மதிப்பு என அமையும்.

சுருக்கம் (Summary)

இவ்வத்தியாயமானது ஒரு நீண்ட அத்தியாயமாகும். ஏனெனில், சரக்குப்பட்டியல் பிரச்சினைகள், முதல் நோக்கிலே அவை எவ்வாறு தோற்றமளிக்கின்றனவோ அதைக் காட்டிலும் பன்மடங்கு திரிபுற்றவையாகும். இச் சரக்குப் பட்டியல் பற்றிய பிரச்சினைகளின் ஆழமான ஆய்வானது இதைத் தெளிவாக்கி நிற்கும். இதற்குக் காரணம் யாதென்றால், இத்துறையிலே (Operations Research)-ன் பல்வேறு விதமான, பயன் நல்கக் கூடிய செயல்பாட்டுத் திறன் கொண்ட முடிவுகள் கிளைத் திருப்பதேயாகும். ஏராளமான இலக்கிய வளமிகுந்த ஆனால், நமது உண்மையான இலட்சிய நோக்கினை எதிரொலிக்காத சரக்குப் பட்டியல் கணிதத்தைப் பயன்படுத்துவதால் ஏற்படக் கூடும் இடையூறுகளைப் பற்றிய அறிவினைப் பெற்றிருக்கவேண்டுவது இன்றியமையாதது. ஆனால், செயல் நிலைகளில், கணக்கீடுகளில் சிக்கலற்ற எளிமையான தன்மையும், பயன்படுத்துவதற்கு வாய்ப்புமிகக் கொண்டும், யாருக்குத் தேவைப்படுகிறதோ அவர்கள் எவ்விதக் குழப்பமுமின்றி புரிந்துகொள்ளும் வகையிலும், ஏற்று மீண்டும் மீண்டும் உபயோகப்படுத்தத்தக்க வகையிலும் அமைந்திருத்தலே ஒரு நல்ல வழிமுறைக்கு இலக்கணமாகும். பரவலில் காணப்படும் நிலையான தெரிந்த சுட்டுருபுகளைப் பற்றிய ஒருசில மறைவான ஊகங்கள், பல சமயங்களில் உண்மையினின்றும் பெருமளவு விலகி அமைகின்றன. மேலும், நமது அறிவுக்குட்பட்ட தேவையின் பரவலைப் பற்றிய உலகமும் பல நேரங்களில் நியாயப்படுத்தக்கூடியதாய் அமைய மறுக்கின்றன. எனவே, இவற்றின் எதிரொலியாக, ஒரு சரக்குப் பட்டியல் கட்டுப்பாட்டு அமைப்பானது விலைகளைப் பற்றிய பல்வேறு விவரக் குறிப்புகள், எதிபார்க்கப்படும் கட்டுப் பாட்டின் தரம் இவையிரண்டும் இடையேயான ஒரு போராட்டத்தில், நடுநிலைச் சார்ந்த திட்டமாக விளங்குகிறது. தெளிவாக, எதிர்காலத் தேவையின் அளவு துல்லியமாக முன்

கூட்டியே அறிவிக்கப்படும் நேரத்தில், துல்லியம் அதிகரிக்க அதிகரிக்க, கட்டுப்பாட்டின் தரமும் வெகுவாக மேன்மையடைகிறது. பல்வேறு நிலைகளில், கழிவுகால நேரத்தில் தேவையின் அளவு எத்தகையது என்பதை முக்கூட்டியே மதிப்பீடு செய்தலே முக்கியமான பிரச்சினையாகிறது.

Suggested Readings

சரக்குப் பட்டியலின் பாற்பட்ட புத்தகங்களெல்லாம் இரண்டு பெரும் பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். சரக்குப் பட்டியல் இயல்முறை (Theory)யைப் பற்றியனவாக ஒரு தொகுதியும், சரக்குப் பட்டியல் செயல்முறையைப் (practice) பற்றியனவாக மற்றொரு தொகுதியும் அமைந்துள்ளன. சரக்குப் பட்டியல் இயல் முறையைப் பற்றிய புத்தகங்களெல்லாம் அவ்வியல் முறையில் காணப்படும் நுணுக்கம் நிறைந்த கணித தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு வகைப்படுத்தப் படலாம் ஒரு விரிவான அறிமுகம் ''ஹான்ஸ்மேன்'' (1961) என்பவரால் அளிக்கப்படுகிறது. அவ்வறிமுகத்திலேயே இத் துறையின் முன்னேற்றத்தைப் பற்றிய கண்ணோட்டமும் காணப்படுகிறது. கணித நுணுக்கம் ஒரு சிறிதும் அற்ற, ஆனால், செயல் நிலைகளில் மிகுந்த பயனளிக்கத்தக்க வகையில் அமைக்கப்பட்ட மூன்று புத்தகங்கள் பௌமன்-ஃபிட்டர், மேசி (1958), பிரௌன் (1959). ''பிரௌன்'' புத்தகமானது சரக்குப் பட்டியல் கட்டுப்பாட்டைச் சார்ந்த, முன்கூட்டியே உரைக்கும் முறைகளில் ஒரு விரிவான விவாதத்தை அளிக்கிறது. சாதாரணமான கணித இயல் உள்ள புத்தகங்களாக, பக்கன்-கோனிஸ்பெர்க் (1963) ஃபிட்டர்-டாலக் (1961) ஹாட்லி விட்டின் (1963), வேக்னர் (1962) விட்டின் (1953), ஹான்ஸ்மேன் (1962), போன்றவை விளங்குகின்றன. பல்பொருள், பல் நிலை சார்ந்த கணக்குகளுக்குத் தேவையான ஒரு விரிவான செயற்முறையை ''ஹான்ஸ்மேன்'' அளிக்கிறது. முடிவாக, சரக்குப் பட்டியல் இயல் நிலையில், கணித இயல் நுணுக்கங்களைக் கொண்டு விளங்கும் செயற்முறைத் தத்துவங்களை ஆரோ, கார்லின் ஸ்கார்ப் (1958) போன்றவை அளிக்கின்றன.

பயிற்சி கணக்குகள்

1. ஓர் ஒப்பந்தக்காரர் ஒரு தானியங்கும் ஊர்திகளை உற்பத்தி செய்பவருக்குத் தினம் ஒன்றுக்கு 10,000, உராய்தலைத் தாங்கும் பொறியின் உறுப்புக்களைத் தரவேண்டியுள்ளது. அவர் உற்பத்தியை ஆரம்பிக்கும்போது தினமும் 25,000 உறுப்

புகளைத் தயாரிக்க முடியும் என்று அறிகிருர். ஓர் உறுப்பை ஓர் ஆண்டிற்குத் தேக்கி வைத்திருக்கும் செலவு 2 பைசா என்றும் ஒரு உற்பத்தி ஓட்டத்துக்கான நிறுவன அமைப்புச் செலவு 18 ரூபாய் என்றும் இருந்தால், உற்பத்தி ஓட்டங்களை எவ்வப் போது அமைக்கவேண்டும் ?

2. ஓர் உற்பத்தியாளர் ஓராண்டுக் காலத்தில் 6890 உறுப் புகளை வழங்குவதற்காகக் கீழ்க்கண்டவாறு உத்தரவைப்பெறு கிருர். முதல் வாரக் கடைசியில் 5 உறுப்புகள்

2ஆம்	,,	,, 10	,,
3ஆம்		,, 15	,,

சரக்குத்தேக்கநிலைச்செலவு ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஆண்டு ஒன்றுக்கு ரூ. 2-60; உற்பத்தி ஓட்டத்தின் நிறுவன அமைப்புச் செலவு ரூபாய் 450-00 என்ருல்,

(a) கீழ்க்கண்ட திட்டங்களுக்கான செலவுகளைக் கண்டுபிடி.

(i) 6890 உறுப்புகளையும் ஆண்டு ஆரம்பத்திலேயே உற்பத்தி செய்தல்.

(ii) 3445 உறுப்புகளையும் இப்போதும், எஞ்சியுள்ள 3445 உறுப்புகளை 6 மாதங்களிலும் செய்தல்.

(iii) உத்தரவின் $\frac{1}{12}$ பகுதியை மாதாமாதம் செய்தல்.

(iv) உத்தரவின் $\frac{1}{52}$ பகுதியை வாரா வாரம் செய்தல்.

(b) அறிவிற்குப்பொருத்தமான ஒரு திட்டத்தை அடைய முடியாது.

(3) ஓர் உற்பத்தித் தொழிற்சாலையானது, ஒரு வார காலத் தில், ஒரு நிலைத்த சுழற்சியான தேவையை(cyclic demand) கீழ்க் கண்டவாறு கொண்டுள்ளது :

திங்கள் கிழமை	9
செவ்வாய்க்கிழமை	17
புதன் கிழமை	2
வியாழக்கிழமை	0
வெள்ளிக்கிழமை	19
சனிக்கிழமை	9
ஞாயிற்றுக்கிழமை	14

கம்பெனியின் திட்டமானது தினசரி உற்பத்தியை நிலையானதாக வைத்து இருக்கப் பிரியப்படுகிறது. உற்பத்தித் துறையும், சரக்கேற்றுத் துறையும் ஒரு வாரத்தில் 7 நாள்களும் வேலை செய்கின்றனர் அத்துடன் ஒவ்வொரு நாளின் உற்பத்தியும் மறுநாள் சரக்கேற்றுவதற்குத் தயாராகஉள்ளது. ஒரு பற்ருக்குறையானது அதே அளவுக்கான உபரியைப்போல, நான்குமடங்குச் செலவைத் தினசரி தருமானல், திங்கட்கிழமை வியாபாரம்ஆரம்பிக்கும் நிலையில், எவ்வளவு பொருளைக் கையிருப்பாக வைத்திருக்க வேண்டும் ?

(நிறுவன அமைப்புச்செலவும், பற்ருக்குறைச் செலவும் தினம் ஒன்றுக்கு, அலகு ஒன்றுக்கு சமம் எனக் கொள்க).

4. *A,B,C* என்ற மூன்று விதமான சோப்புகளின் தேவை விலைகளையும், மற்ற (செலவுத்தொகை) விலைகளையும் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் விளக்குகிறது:

சோப்பின் விதம்	மாதாந்திர தேவை (அலகுகளில்)	அலகுகளின் விலை (ரூபாய்)	சரக்குத் தேக்கத்திற்கான செலவு	lead time (days)	ஒவ்வொரு உத்தரவுக்குமான (வாங்கும்) செலவு (ரூபாய்)	சரக்குக் குவிப்பினுல் ஏற்படும் நஷ்டம்%
A	1200	1·0	10%	20	10	10
B	800	1·2	12%	30	20	6
C	1600	0·8	6%	20	15	5

(a) பெரிதும் உகந்த கும்பலின் (அடுக்கு) அளவுகளை (batch sizes) கண்டுபிடி. எல்லா உறுப்புகளையும் "*A*" பொருள்களாக அனுமானித்தால் எல்லா உறுப்புகளுக்குமான பாதுகாப்புக் கையிருப்பினைக் (safety stocks) கண்டுபிடி.

(b) *A* சோப்பு வாங்கும் குவியலானது 5% குறைபாடுகள் உள்ளதென்றுல், இந்த உகந்த கும்பல் அளவு எந்த அளவு பாதிக்கப்படுகிறது ?

(c) மொத்தமாக *C* சோப்புக்களை வாங்கினுல் பின்வருமாறு தள்ளுபடி (discounts) கிடைக்கின்றன :

குவியல் அளவு	ஓர் அலகின் விலை (ரூபாய்)
1 — 1000	0.80
1000 – 5000	0.70
5000 – 10000	0·60

பெரிதும் உகந்த வாங்கும் திறனைக் (purchase strategy) கண்டு பிடி.

(குறிப்பு: ஒவ்வொரு விலை அளவுக்குமான மொத்த (விலையினை) செலவுத் தொகையினையும், உகந்த கும்பல் அளவையும் கண்டுபிடி.

5. ஓர் உத்தரவு இடுவதற்கான செலவு 10 ரூபாய் ஒரு ஜீப்பு பிஸ்டன் ஒன்றின் விலை 8 ரூபாய் வருடாந்திர தேவை 2000 பிஸ்டன்கள் சரக்குத்தேங்கவைப்பதற்கான செலவு ஆண்டொன்றுக்கு 100க்கு 15ரூபாய் காலக் கழிவு நேரம் (lead time) 15 நாள்கள் இந்த விவரங்களைக் கொண்டு ROL ஒழுங்குமுறைக்கான ஒரு சரக்குத் தேக்கப்பட்டியலைத் தயார் செய்.

6. (a) ஒரு சரக்குத்தேக்கப் பட்டியலின் ROL ஒழுங்குமுறையையும், சுழற்சி ஒழுங்குமுறையையும் விவரி. ஒவ்வொன்றின் பயன்களை விளக்குக.

(b) உற்பத்திக்கான ‘EOQ’ அளவைக் கணிக்கும் சூத்திரத்தைக்கண்டுபிடி.

(c) பொதுவாக, ஒரு உற்பத்தித்தொழிற்சாலை எவ்வாறு சரக்குத்தேக்கங்களினால் ஏற்படும் செலவினைக் கணிப்பது என்பதை விளக்குக.

9. விளையாட்டுக் கொள்கை

(Game Theory)

முன்னுரை

பொருளாதாரம், அரசியல் அல்லது மிலிடரி நடவடிக்கைகள் போன்ற போட்டிகள் அமைந்துள்ள சூழ்நிலைகளுக்கு விளையாட்டுக் கொள்கை மிகவும் தொடர்புடையதாக உள்ளது. ஃபான் நியுமேன் (Von-newman) என்பவர் விளையாட்டுக் கொள்கை எதைப்பற்றி ஆராய்கிறது என்பதை கீழ்கண்டவாறு கூறியுள்ளார் :

'ஏதோ ஓர் ஆட்டத்தை, P_1, P_2, ... P_n என்ற n ஆட்டக்காரர்கள் விளையாடினல், i ஆவது ஆட்டக்காரரான P_j என்பவர் அவருக்கு மிக சாதகமாக பொருளாத ரீதியில் எவ்வாறு ஆட வேண்டும்?' என்பதைக் காண்கிறது.

இவ்வத்தியாயத்தில் போட்டி ஏற்படக் கூடிய சூழ் நிலையை 'விளையாட்டு' (game) என்று குறிப்பதாகக் கொள்கிறோம். விளையாட்டானது ஒரு முடிவைப் பெற்று (வெற்றி அல்லது தோல்வி) அமையுமாறு இருந்தால் அச் சூழ்நிலையைப் 'போட்டியைக் குறிக்கும் சூழ்நிலை' என்று கூறுகிறோம்.

விளையாட்டுக் கொள்கையைப் பற்றி அறியும் முன்பாக, கீழ்க்காணும் சில தொடர்களைப் பற்றி அறிவோம் :

(i) 'ஆட்டம்' (play) என்பது கட்டாக அமைந்த விருப்பப்படி ஆட உறு துணையாக உள்ள விருப்பங்களைக் கொண்டு ஆடி, அதனை ஒரு முடிவுக்குக் கொண்டு வருவதாகும்.

(ii) தந்திரம் (strategy) என்பது ஆட்டத்தை ஆடுவதற்கு முன்பு ஓர் ஆட்டக்காரரால் எடுக்கப்படும் தீர்மான முடிவுகளாகும். எனவே, தீர்மான விதிகளை (decision rules)-ப் பெற்ற கணமாக (set) 'தந்திரம்' அமைந்துள்ளது.

(iii) ஓர் ஆட்டத்தின் முடிவு அடைந்த நிலையானது பணத்தை ஒருவருக்கொருவர் பரிமாற்றிக் கொள்ளுவதாக அமைந்திருக்கும். இம்மாதிரி பரிமாற்றிக் கொள்ளும் தொகை நேராகவும் (positive) அல்லது எதிராகவும் (Negative) இருக்கும். இதனைப் பெற்ற அட்டவணையை இழப்பு—ஈடு அட்டவணை (Pay-off-Table) என்று கூறுகிறோம்.

ஒரு விளையாட்டை அமைப்பதற்கு ஒவ்வோர் ஆட்டக் காரர்களின் தந்திரங்களும் (strategies), ஆட்ட முடிவுக்கான 'இழப்பு—ஈட்டு' அட்டவணையும் குறிப்பிடப்படவேண்டும்.

இரு நபர்களுக்கான பூச்சியக் கூட்டுத்தொகை செவ்வக விளையாட்டு (சேணப் புள்ளியுடன்) (Two person zero-cum Rectangular Game with Saddle point)

இரு நபர்களுக்கான பூச்சியக் கூட்டுத்தொகை விளையாட்டில், இரு ஆட்டக்காரர்கள் விளையாடுவர். அவர்கள் விளையாடி, முடிவு பெற்ற நிலையில் ஓர் ஆட்டக்காரர், மற்றோர் ஆட்டக் காரருக்குச் செலுத்திய பணத்தின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக அமையும். இந்த இரு நபர்களுக்கான பூச்சியக் கூட்டுத்தொகை விளையாட்டில் ஓர் ஆட்டக்காரரின் ஈட்டிப்பு (gain) மற்றோர் ஆட்டக்காரரின் இழப்புக்கு (loss)-ச் சமமாக இருக்கும். அதனால் இவ்விரு செலுத்தகையின் கூட்டுத்தொகையானது பூச்சியமாக அமைகிறது.

பெரும்பாலான பிரபலமடைந்த 'போக்கர்' போன்ற விளையாட்டில் பணத்தை இழந்த ஆட்டக்காரரின் தொகை, பணத்தை ஈட்டிய ஆட்டக்காரரின் தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

இரு நபர்களுக்கான ஆட்டத்தில் ஆட்டக்காரர் I, ஆட்டக் காரர் II ஆகியோர்கள் முறையே 'm' தந்திரங்களையும், 'n' தந்திரங்களையும் பெற்றிருந்தால், a_{ij} என்ற இழப்பு—ஈட்டிப்புகளை $m \times n$ அணியாகக் (matrix) கீழ்கண்டவாறு அமைக்கலாம் :

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

இதில் a_{ij} என்ற இழப்பு-ஈடானது நேராகவும் (positive) எதிராகவும், (negative) அல்லது பூச்சியமாகவும் இருக்கும். மேலும், a_{ij} என்பது முதல் ஆட்டக்காரர் iஆம் தந்திரத்தையும், இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் jஆம் தந்திரத்தையும் பயன்படுத்தினால் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர், முதல் ஆட்டக்காரருக்குச் செலுத்தும் தொகையாகும். இந்த விளையாட்டில் ஒவ்வொரு ஆட்டக்காரரும் புத்திக் கூர்மையுடையவர்கள் என்றும் அவரவர்களுடைய தந்திரங்கள் அவரவர்களுக்குத் தெரியும் என்றும், ஒரு ஆட்டக்காரரின் தந்திரம், மற்றொருவருக்குத் தெரியும் என்றும் கொள்கிறோம்.

இழப்பு—ஈட்டிப்பு அணியானது செவ்வகமாக இருந்தால் அந்த விளையாட்டை செவ்வக விளையாட்டு (Rectangular game) என்று கூறுகிறோம்.

சேணப்புள்ளி (Saddle point)

a_{ij} என்ற இழப்பு-ஈட்டிப்புகளைப் பெற்ற ($i = 1, 2, \dots m$; $j = 1, 2, \dots n$) அணியில் a_{vs} என்ற புள்ளியானது நிரையில் மிகச் சிறியதாகவும் அந் நிரலில் மிக பெரியதாகவுமிருந்தால் அதனை சேணப்புள்ளி (saddlepoint) என்று கூறுகிறோம். சேணப் புள்ளியை இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணியில் ஒரே சமயத்தில் நிரைகளின் மிகக் குறைந்த மதிப்புகளின் உச்ச மதிப்பாகவும், நிரல்களின் மிக அதிகமான மதிப்புகளின் நீச மதிப்பாகவும் கொள்ளலாம்.

ஒரு விளையாட்டில் சேணப்புள்ளியிருக்குமானால் அவ் விளையாட்டை சேணப்புள்ளியைப் பெற்ற விளையாட்டு என்றும், சேணப்புள்ளியைப் பெறாத விளையாட்டைச் சேணப்புள்ளியைப் பெறாத விளையாட்டு என்றும் கூறுகிறோம். மேலும், ஒரு விளையாட்டு, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சேணப்புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்கலாம். சேணப்புள்ளியைக்குறிக்கும் எண்ணை, விளையாட்டின் மதிப்பு (value of the game) என்று கூறுகிறோம். விளையாட்டின் தீர்வானது

(i) சிறந்த அல்லது உச்ச தந்திரங்களையும்,

(ii) விளையாட்டின் மதிப்பையும் பெற்று அமையும்.

இருநபர்களுக்கான பூச்சியக் கூட்டுத் தொகை விளையாட்டுக்குத் தீர்வு (சேணப்புள்ளியுடன்) (Solution of the Zero sum two person game with Saddle point)

நீச உச்ச-உச்ச நீச தத்துவம் (Minimax-Maximini Principle)

ஆட்டக்காரர்கள் I,II ஆகியவர்கள் முறையே $i(i=1,2, \ldots m)$ $j(j=1, 2, \ldots n)$ ஆகிய தந்திரங்களைப் பெற்றுள்ளனர். இவர்களின் இழப்பு—ஈட்டிப்பு அட்டவணையானது (a_{ij}) என்ற அணியாக அமைந்திருக்கும். இதில் a_{ij} என்பது $j=1,2, \ldots n$ ஆகிய தந்திரங்களைப் பெற்ற இரண்டாம் ஆட்டக்காரர்கள், $i=1,2, \ldots m$ ஆகிய தந்திரங்களைப் பெற்ற முதல்ஆட்டக்காரருக்கு செலுத்தும் தொகையாகும். முதல் ஆட்டக்காரர் தந்திரம் iஐத் தேர்ந்தெடுத்தால் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் j தந்திரங்களில் எந்த தந்திரத்தைக்கையாண்டாலும் அவர் நிச்சயமாக $\min_j a_{ij}$ஐப் பெறுவர் இதனால் முதல் ஆட்டக்காரருக்கு $\min_j a_{ij}$-க்களில் உச்ச ஈட்டிப்பைப் பெறுவர்

அதாவது $\max_i \min_j a_{ij}$ ... (1)

இப்பொழுது இரண்டாம் ஆட்டக்காரர், முதல் ஆட்டக்காரரின் ஈட்டிப்பைக் குறைக்கச் சிறந்த தந்திரத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க முற்படுவார். இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் தந்திரம் jஐத் தேர்ந்தெடுத்தால் முதல் ஆட்டக்காரர் i தந்திரங்களில் எந்தத் தந்திரத்தைத் தேர்ந்தெடுத்தாலும் அவர் $\max_i a_{ij}$ஐ விட அதிகமாக அடைய முடியாது இதனால் இரண்டாம் ஆட்டக்காரருக்கு $\max_i a_{ij}$-க்களில் நீச இழப்பைப் பெறுவார்.

அதாவது, $\min_j \max_i a_{ij}$ ... (2)

வரையறைகள் :

1. (1)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பான $\max_i \min_j a_{ij}$ஐ விளையாட்டின் கீழ் மதிப்பு (lower value) என்று கூறுகிறோம்.

2. (2)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பான $\min_j \max_i a_{ij}$ஐ விளையாட்டின் மேல் மதிப்பு (upper value) என்று கூறுகிறோம்.

a_{rk} என்ற மூலகம் (element) அல்லது மூலகங்கள்

($a_{rk} = max\ min\ aij = min\ max\ aij$ என்றிருந்தால் அந்த விளையாட்டானது ஒரு சேணப்புள்ளியை பெற்றிருப்பதாகக் காண்கிறோம்.) இங்கு. முதல் ஆட்டக்காரருக்கு தந்திரம் r-ம், இரண்டாம் ஆட்டக்காரருக்கு தந்திரம் K-ம் மிகச் சிறந்ததாக உள்ளது என்றும் அறிகிறோம்.

மாதிரி 1:

கீழ்க்காணும் விளையாட்டைக்கருதுவோம். A என்ற ஆட்டக்காரர் $P.Q.R$ என்ற தந்திரங்களையும், B என்ற ஆட்டக்காரர் $S\ T$ என்ற தந்திரங்களையும் பெற்றுள்ளனர். இப்போது இவ்விரு ஆட்டக்காரர்கள் ஒருவருக்கொருவர் செலுத்திக்கொண்ட பணங்களின் விபரங்கள் பின்வருமாறு :

தேர்ந்தெடுத்த தந்திரங்கள்	செலுத்துகைகள்
P,S	A,B-க்கு ரூ 2.00ஐ கொடுக்கிருர்
$P.T$	$B.A$-க்கு ரூ 2 00ஐ கொடுக்கிருர்
$Q.S$	A,B-க்கு ரூ 1.00ஐ கொடுக்கிருர்
Q,T	B,A-க்கு ரூ 3.00ஐ கொடுக்கிருர்
R,S	B,A-க்கு ரூ 1.00ஐ கொடுக்கிருர்
R,T	$B\ A$-க்கு ரூ 2.00ஐ கொடுக்கிருர்

இந்த ஆட்டத்தில் A,B ஆகியவர்களுக்கான சிறந்த தந்திரங்கள் யாவை என்பதை நீசஉச்ச-உச்சநீச தத்துவத்தின் மூலம் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள செலுத்துகைகளை (a_{ij}) $i = 1, 2, 3;$ $j = 1, 2$ என்று கீழ்கண்டவாறு அணி வடிவத்தில் அமைப்போம். இதில் நேர் எண்ணனது, B என்ற ஆட்டக்காரர், A-க்கு அளித்தத் தொகையையும், எதிர் எண்ணனது, A என்ற ஆட்டக்காரர் B-க்கு அளித்த தொகையையும் குறிக்கிறது.

		B-க்கான தந்திரங்கள் S	T
A-க்கான தந்திரங்கள்	P	-2	2
	Q	-1	3
	R	1	2

கணிதக்குறியில் $a_{11} = -2$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -1$, $a_{31} = 1$, $a_{32} = 2$, $a_{22} = 3$ என்று அமைந்துள்ளது.

இவ்வணியின் நிரைகளை (rows)-க் கருதினுல், முதல் நிரையிலுள்ள மிகச் சிறிய மூலகம் (element) $= -2$ இரண்டாம் நிரையிலுள்ள மிகச் சிறிய மூலகம் $= -1$ மூன்ரும் நிரையிலுள்ள மிகச் சிறிய மூலகம் $= 1$ ஆகும். இவற்றில் மிக அதிக மதிப்பு $= 1$ ஆகும். இது a_{31} என்ற மூலகத்தைக் குறிக்கிறது. எனவே விளையாட்டின் கீழ் மதிப்பு $= \max_i \min_j a_{ij} = a_{31} = 1$ ஆகும்.

இப்பொழுது இவ்வணியின் நிரல்களைக் கருதினுல், முதல் நிரலிலுள்ள மிக உச்ச மூலகம் $= 1$, இரண்டாம் நிரலிலுள்ள மிக உச்ச மூலகம் $= 3$. இவற்றின் நீச மதிப்பு 1 ஆகும். இது a_{31} என்ற மூலகத்தைக் குறிக்கிறது. எனவே, விளையாட்டின் மேல் மதிப்பு $= \min_j \max_i a_{ij} = a_{31} = 1$ ஆகும்.

கீழ் மதிப்பு = மேல் மதிப்பு என்பதால் சேணப்புள்ளி a_{31} ஆகும். இங்கு 1 என்பது ஆட்டத்தின் மதிப்பாகும். ஆட்டக்காரர் A-க்கான சிறந்த தந்திரம் R ஆகும். (மூன்ரும் நிரை ஆட்டக்காரர் B-க்கான சிறந்த தந்திரம் S ஆகும். (முதல் நிரல்)

இவ்வாருக, கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டின் தீர்வு :

(i) ஆட்டக்காரர் A-ன் சிறந்த தந்திரம் R ஆகும்.

(ii) ஆட்டக்காரர் B-ன் சிறந்த தந்திரம் S ஆகும்.

(iii) விளையாட்டின் மதிப்பு ரூ. 1-00 ஆகும்.

மாதிரி 2 :

கீழ்காணும் இழப்பு—ஈட்டிப்பு அணிகள் ஒவ்வொன்றும் சேணப் புள்ளியைப் பெற்றுள்ளதா இல்லையா என்பதைக் கண்டு, பின்பு கோணப் புள்ளியைப் பெற்ற விளையாட்டின் தீர்வை நீச உச்ச – உச்ச நீச தத்துவத்தின் வாயிலாகக் காண்க.

(i)

		ஆட்டக்காரர் B			
		1	2	3	4
ஆட்டக்காரர் A	1	3	−5	0	6
	2	−4	−2	1	2
	3	5	4	2	3

(ii) ஆட்டக்காரர் *B*

		1	2	3
ஆட்டக்காரர் *A*	1	1	2	1
	2	0	−4	−1
	3	1	3	−2

(iii) ஆட்டக்காரர் *B*

		1	2	3
ஆட்டக்காரர் *A*	1	1	2	1
	2	0	4	−1
	3	2	1	2

தீர்வு (i)

		ஆட்டக்காரர் *B* 1	2	3	4	நிரை நீசம்
ஆட்டக்காரர் *A*	1	3	−5	0	6	−5
	2	−4	−2	1	2	−4
	3	5	4	2	3	2
நிரல் வீச்சம்		5	4	2	6	2

ஆட்டக்காரர் *A* ஐக் கருதுவோம். இவர் தந்திரம் 1 ஐப் பயன் படுத்தினால் நீச ஈட்டிப்பு ரூ. 5.00 ஆகும். தந்திரம் 2 ஐப் பயன் படுத்தினால் நீச ஈட்டிப்பு ரூ. 4.00 ஆகும். தந்திரம் 3 ஐப் பயன் படுத்தினால் நீச ஈட்டிப்பு ரூ. 2.00 ஆகும். இவற்றில் உச்ச மான; அதாவது உச்சம் (−5, −4, 2) = ரூ. 2.00 = கீழ் மதிப்பு ஆட்டக்காரர் *B* ஐக் கருதுவோம். இவர்; தந்திரம் 1 ஐப் பயன் படுத்தினால் உச்ச இழப்பு ரூ. 5.00 ஆகும். தந்திரம் 2 ஐப் பயன் படுத்தினால் உச்ச இழப்பு ரூ. 4.00 ஆகும். தந்திரம் 3 ஐப் பயன்

படுத்திஞல் உச்ச இழப்பு ரூ. 6. ஆகும். இவற்றினில் நீசமான; அதாவது நீசம் (5,4,2,6) = ரூ. 2.00 = மேல் மதிப்பு.

கீழ்மதிப்பு=மேல்மதிப்பு என்பதால் சேணப்புள்ளி நிலேத்துள்ளது என்றும், அப்புள்ளி 2 என்ற கெலுத்துகையைப் பெற்ற a_{33} என்ற மூலகமாகும். விளையாட்டின் மதிப்பு ரூ. 2.00 ஆகும். a_{33} என்ற மூலகம், ஆட்டக்காரர் *A*-ன் மூன்ரும் தந்திரத்தையும், ஆட்டக்காரர் *B*-ன் மூன்ரும் தந்திரத்தையும் குறிக்கிறது. எனவே, தீர்வுகள் கீழ்கண்டவாறு அமைகிறது :

(i) சேணப்புள்ளி a_{33} ஆகும்.

(ii) விளையாட்டின் மதிப்பு ரூ 2.00 ஆகும்.

(iii) ஆட்டக்காரர் *A*-க்கு அவருடையே தந்திரமான 3-ம், ஆட்டக்காரர் *B*க்கு அவருடைய தந்திரமான 3ஆம் சிறந்த தந்திரங்களாகும்.

தீர்வு (ii)

	ஆட்டக்காரர் *B*			நிரை நீசம்
	1	2	3	
1	1	2	1	1 → கீழ்மதிப்பு
2	0	−4	−1	−4
ஆட்டக்காரர் *A*				
3	1	3	−2	−2
நிரல் உச்சம்	1 ↑ மேல்மதிப்பு	3	1 ↑ மேல்மதிப்பு	

இங்கு $i = 1, 2, 3;\quad j = 1, 2, 3$

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = 2 \qquad a_{13} = 1$$
$$a_{21} = 0 \qquad a_{22} = -4 \qquad a_{23} = -1$$
$$a_{31} = 1 \qquad a_{32} = 3 \qquad a_{33} = -2$$

கீழ்மதிப்பு $= \max_i \min_j aij = 1$

மேல்மதிப்பு $= \min_j \max_i aij = 1$

இங்கு a_{11}, a_{13} என்ற இரு சேணப் புள்ளிகளுள்ளன.

எனவே, இவ்விரு சேணப்புள்ளிக்குமான தனித்தனி தீர்வுகள் பின்வருமாறு :

a_{11} என்ற சேணப்புள்ளிகளுக்கு,

(i) A-க்கான சிறந்த தந்திரம் 1 ஆகும்.

(ii) B-க்கான சிறந்த தந்திரம் 1 ஆகும்.

(iii) விளையாட்டின் மதிப்பு 1 ஆகும்.

a_{13} என்ற சேணப்புள்ளிக்கு,

(i) A-க்கான சிறந்த தந்திரம் 1 ஆகும்.

(ii) B-க்கான சிறந்த தந்திரம் 3 ஆகும்.

(iii) விளையாட்டின் மதிப்பு 1 ஆகும்.

தீர்வு (iii)

		ஆட்டக்காரர் B 1	2	3	நிரை நீசம்
	1	1	2	1	1
ஆட்டக்காரர் A	2	0	−2	−1	−4
	3	2	1	2	1
திரல் உச்சம்		2	2	2	

இங்கு, $\min_i \max_j a_{ij} \neq \max_j \min_i a_{ij}$

அதாவது, மேல் மதிப்பு ≠ கீழ் மதிப்பு. எனவே, இந்த விளையாட்டில் சேணப்புள்ளியில்லை. இதனை சேணப்புள்ளியைப் பெருத விளையாட்டைத் தீர்வு செய்யும் முறையின்மூலம் காண வேண்டும்.

இருநபர்களுக்கான பூச்சியக் கூட்டுத்தொகை விளையாட்டு (சேணப் புள்ளியில்லாமல்) கலப்புத் தந்திரங்கள்

(Two person zero-sum game without Saddle point: Mixed strategies)

சேணப்டள்ளி இருந்தால், ஓர் ஆட்டக்காரர் பயன்படுத்தும் தந்திரம் மற்றொருவருக்குத் தெரியும். சேணப்புள்ளி இல்லை எனில் முதல் ஆட்டக்காரர் எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்துவார் என்பது இரண்டாம் ஆட்டக்காரருக்கும் இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் எந்தத் தந்திரத்தை பயன்டடுத்துவார் என்பது

முதல் ஆட்டக்காரருக்கும் தெரியாது. இதனால் முதல் ஆட்டக்காரர் தன்னுடைய தந்திரங்களை நிகழ்தகவுகளுடனும் (probabilities), இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் தன்னுடைய தந்திரங்களை, நிகழ்தகவுகளுடனும் செயல்படுத்துவார்.

A, B ஆகிய இரு ஆட்டக்காரர்கள், முறையே $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n$ என்ற தந்திரங்களைப் பெற்றுள்ளனர் என்று கொள்வோம். இவர்கள் ஆடும் விளையாட்டில்கலப்புத்தந்திரங்கள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது இவர்கள் ஆடும் விளையாட்டில் சேணப்புள்ளி இல்லையெனில், ஆட்டக்காரர்தன்னுடைய தந்திரங்களான $i = 1, 2, \ldots m$ ஆகியவற்றை முறையே, $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும், ஆட்டக்காரர் B, தன்னுடைய தந்திரங்களான $j = 1, 2, \ldots n$ ஆகியவற்றை $y_1, y_2, \ldots y_n$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும் ஆடுகின்றனர் என்க. இதனால் $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$; $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots x_m > 0$; $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$, $y_1 > 0, y_2 > 0, \ldots y_n > 0$

சாதாரணமாக, $\bar{x} = (x_1, x_2 \ldots x_m)$; $\bar{y} = (y_1, y_2 \ldots y_n)$ என்ற தந்திரங்களைக் கலப்பு தந்திரங்கள் என்று கூறுகிறோம். விளையாட்டில்சேணப்புள்ளி இருந்து அங்கு பயன்படுத்தப்படும் தந்திரங்களைத் தூய தந்திரங்கள் (pure strategies) என்று கூறுகிறோம்.

ஆட்டக்காரர் A, தன்னுடைய i என்ற தந்திரத்தை x_i என்ற நிகழ்தகவுடனும், ஆட்டக்காரர் B, தன்னுடைய j என்ற தந்திரத்தை y_j என்ற நிகழ்தகவுடனும் $(i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n)$ பயன்படுத்தினால், எதிர்பார்க்கப்படும் இழப்பு-ஈட்டிப்பு $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, a_{ij} \, y_j$-க்கு சமமாகும். இதில் a_{ij} என்பது இரண்டாவது ஆட்டக்காரரான B என்பவர் முதல் ஆட்டக்காரரான A-க்கு செலுத்தும் தொகையாகும்.

நீச உச்ச தேற்றம் (Minimax Theorem)

கலப்புத் தந்திரங்களைப் பயன்படுத்தினால் எப்பொழுது அவ் விளையாட்டிற்கு விளையாட்டு மதிப்பு நிலைத்திருக்கும். மேலும், அது ஒப்பற்றதாக (unique) இருக்கும்.

கலப்புத் தந்திரங்களைப் பெற்ற ஆட்டத்திற்கான தீர்வுக்கு ஓர் உதாரணம்

சேணப்புள்ளியைப் பெருத கீழ்க்காணும் இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணியாக அமைந்த விளையாட்டுக்கு தீர்வு காண்க.

ஆட்டக்காரர் B

ஆட்டக்காரர் A	T	S
P	−3	7
Q	6	1

தீர்வு :

ஆட்டக்காரர் A தன்னுடைய தந்திரங்களான P, Q ஆகியவைகளை முறையே x_1, x_2 என்ற நிகழ் தகவுகளுடனும், ஆட்டக்காரர் B, தன்னுடைய தந்திரங்களான S, T ஆகியவைகளை முறையோ y_1 y_2 என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் பயன்படுத்தி ஆடுவதாகக் கொள்வோம்.

இதில் $x_1+x_2=1$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$; $y_1+y_2=1$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$ ஆகும்.

ஆட்டக்காரர் B எப்பொழுதும் S என்ற தந்திரத்தைப் பயன் படுத்தினல் ஆட்டக்காரர் A-ன் எதிர் பார்க்கும் ஈட்டிப்பு(expected gain) $g\ (A, S)$ எனில்,

$$g\,(A,S) = -3x_1 + 6x_2$$
$$= -3x_1 + 6\,(1-x_1) \quad (\because\ x_2 = 1 - x_1)$$
$$= 6 - 9x_1 \qquad \ldots \ (1)$$

ஆட்டக்காரர் B. எப்பொழுதும் T என்ற தந்திரத்தைப்பயன் படுத்தினல், ஆட்டக்காரர் A-ன் எதிர் பார்க்கும் ஈட்டிப்பு $g\ (A\ T)$ எனில்,

$$g\,(A,T) = 7x_1 + 1\ (x_2)$$
$$= 7x_1 + (1 - x_1)$$
$$= 6x_1 + 1 \qquad \ldots \ (2)$$

இப்பொழுது, B என்ற ஆட்டக்காரர் எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினாலும், ஆட்டக்காரர் A தன்னுடைய ஈட்டிப்பை x_1, x_2 என்ற நிகழ் தகவுகளுடன் உச்சப்படுத்த (Maximise) முயல்வார். எனவே, ஆட்டக்காரர் A, சிறந்த தந்திரத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க $g\,(A,S)=g(A,T)$ என்றிருத்தல் வேண்டும்.

எனவே, A என்ற ஆட்டக்காரர் தன்னுடைய ஈட்டிப்பை உச்சப்படுத்த, தன்னுடைய எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பான $g(A,S)$ஐ [இங்கு $g(A,S)$ ஆனது. B எப்பொழுதும் S என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தும் பொழுது A ஆனவர் பெறும் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பைக்குறிக்கும்]. $g\,(A,T)$-க்குச் சமமாக இருக்கும்படி விளையாட வேண்டும். [இங்கு $g\,(A,T)$ ஆனது, B எப்பொழுதும் T என்ற தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தும் பொழுது A ஆனவர் பெறும் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பைக் குறிக்கும்]. அதாவது A என்பவர் தன்னுடைய ஈட்டிப்பை உச்சப்படுத்த $g(A,S)=g(A,T)$ என்று இருக்குமாறு அமைத்தால், தான் P,Q என்ற தந்திரங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்தகவுகளைக் காணமுடியும்.

இவ்வாறாக $g\,(A,S) = g\,(A,T)$

$$\Longleftrightarrow 6 - 9x_1 = 6x_1 + 1$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

எனவே ஆட்டக்காரர் A எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பை $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}$ என்று (1)-ல் அல்லது (2)-ல் பிரதியிட்டால் பெறலாம்.

$$A\text{-ன் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்பு} = \frac{1}{3}\ (-3) + \frac{2}{3}\ (6)$$

$$= \text{ரூ. } 3{\cdot}00 \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வாருக A என்பவர் P என்ற தந்திரத்தை $\frac{1}{3}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும், Q என்ற தந்திரத்தை $\frac{2}{3}$ என்ற நிகழ்தகவுடனும் விளையாடுவார். இவர் எதிர் பார்க்கும் ஈட்டிப்பு ரூ. 3·00 ஆகும்.

இதே முறையில் ஆட்டக்காரர் B என்பவர், S, T என்ற தந்திரங்களை y_1, y_2 என்ற நிகழ்தகவுடன், $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$, $y_1 + y_2 = 1$ என்றிருக்குமாறு விளையாடுவதாகக் கொள்வோம். ஆட்டக்காரர் A, எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினுலும், ஆட்டக்காரர் B, A-ன் எதிர்பார்க்கும் ஈட்டிப்புகளை குறைக்க முயல்வார்.

ஆட்டக்காரர் A, P என்ற தந்திரத்தை எப்பொழுதும் பயன்படுத்திஞல் ஆட்டக்காரர் B-ன் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு

$$h(B, P) = y_1(-3) + (1-y_1)\,7$$
$$= -10y_1 + 7 \qquad \ldots (3)$$

ஆட்டக்காரர் A, Q என்ற தந்திரத்தை எப்பொழுதும் பயன்படுத்திஞல் ஆட்டக்காரர் B-ன் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு

$$h(B, Q) = 6y_1 + (1 - y_1)\,1$$
$$= 5y_1 + 1 \qquad \ldots (4)$$

ஆட்டக்காரர் B-ன் சிறந்த தந்திரத்திற்கு

$h(B, P) = h(B. Q)$ என்றிருத்தல் வேண்டும்.

$$h(B, P) = h(B, Q)$$
$$\Longleftrightarrow -10y_1 + 7 = 5y_1 + 1$$
$$\Longrightarrow 15y_1 = 6 \Longrightarrow y_1 = \frac{2}{5} \Longrightarrow y_2 = \frac{3}{5}$$

B-ன் எதிர்பார்க்கும் இழப்பை $y_1 = \frac{2}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$ என்று (3)-ல் அல்லது (4 -ல் பிரதியிட்டால் பெறலாம்.

B-ன் எதிர்பார்க்கும் இழப்பு

$$= y_1(-3) + (1-y_1)\,7$$
$$= \frac{2}{5}(-3) + \frac{3}{5}(7)$$
$$= -\frac{6}{5} + \frac{21}{5}$$
$$= \text{ரூ. } 3 \text{ ஆகும்}$$

இவ்வாறாக ஆட்டக்காரர் A என்பவர் P, Q என்ற தந்திரங்களை $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் விளையாட வேண்டும். ஆட்டக்காரர் B, என்பவர் S, T என்ற தந்திரங்களை $y_1 = \frac{2}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் விளையாட வேண்டும். விளையாட்டின் மதிப்பு ரூ. 3.00 ஆகும்.

சேணப்புள்ளி இல்லாத விளையாட்டுக்குத் தீர்வுகாண பொதுமுறை (General procedure to solve a game without saddle point)

$m \times n$ தரத்தைப் (order) பெற்ற இழப்பு-ஈட்டிப்பு அணியைக் கருதுக. இதில் முதல் ஆட்டக்காரர் $i = 1, 2, \ldots m$ என்ற தந்திரங்களையும், இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் $j = 1, 2, \ldots n$ என்ற தந்திரங்களையும் பெற்றுள்ளார் என்க.

		இரண்டாம் ஆட்டக்காரர்				
		1	2	3	...	n
	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
முதல் ஆட்டக்காரர்	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	..	...	...	...
	m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}

இதில் சேணப்புள்ளி இல்லை என்று கொள்வோம். இவ்விளையாட்டிற்குத்தீர்வுகாண கீழ்க்கண்ட நிகழ்தகவுகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்:

(i) ஒவ்வொரு விளையாட்டிற்கும் g என்ற விளையாட்டு மதிப்பு இருக்கும். இது ஒப்பற்றது.

(ii) முதல் ஆட்டக்காரர் i என்ற தந்திரத்தை x_i என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும் $(i = 1, 2, \ldots m)$, இரண்டாம் ஆட்டக்காரர் j என்ற தந்திரத்தை y_j என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும் $(j = 1, 2, \ldots n)$ விளையாடுவதாகக் கொள்வோம். இதில்,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1, \quad x_1 \geqslant 0, \ldots x_m \geqslant 0$$

$$y_1 + y_2 + \ldots - y_n = 1, \quad y_1 \geqslant 0, \ldots y_n \geqslant 0$$

$x_1, x_2 \ldots x_m$, $y_1, y_2 \ldots y_n, g$ என்ற தெரியாதவற்றைப் பின்வரும் தொடர்களிலிருந்து பெறலாம்.

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{u} y_j = 1,\ y_j \geqslant 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

$$x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \ldots + x_m a_{mj} \geqslant g\ \forall j = 1, 2, \ldots n \quad \ldots \quad (3)$$

$$y_1 a_{1i} + y_2 a_{i_2} + \ldots + y_n a_{in} \leqslant g\ \forall\ i = 1, \ldots m \quad \ldots \quad (4)$$

தொடர்பு (3)-ல் n சமனிலிகள் உள்ளன. தொடர்பு (4 -ல் m சமனிலிகள் உள்ளன. எனவே, இங்கு $m+n+1$ தெரியா தவைகளும், $m+n+2$ தொடர்புகளும், $x_i \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ என்ற நிபந்தனைகளும் உள்ளன. இவைகளுக்கு கீழ்க்காணும் முறை களின் மூலம் தீர்வுகாண முடியும்.

(i) அல்ஜீப்ரா முறை (ii) அணி முறை(Matrix method)

(iii) வரைபட முறை (graphic method)

(i) அல் ஜீப்ரா முறை (Algebra method)

சேணப்புள்ளியைப் பெறாத விளையாட்டுக்கு இம் முறையைப் பயன்படுத்துவதை ஓர் உதாரணம் மூலம் காண்போம்.

மாதிரி

கீழ்காணும் இழப்பு-ஈட்டுப்பு அட்டவணையைப் பெற்ற விளையாட்டுக்கு தீர்வு காண்க.

		ஆட்டக்காரர் B	
		S	T
ஆட்டக்காரர் A	P	-3	7
	Q	6	1

g என்பது, இவ் விளையாட்டின் மதிப்பு என்க.

x_1, x_2 என்பவைகள், ஆட்டக்காரர் A என்பவர் P, Q என்ற தந்திரங்களைப் பயன்படுத்தும் நிகழ்தகவுகள் என்க.

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1, x_2 \geqslant 0$$

y_1, y_2 என்பவைகள், ஆட்டக்காரர் B என்பவர் S, T என்ற தந்திரங்களைப் பயன்படுத்தும் நிகழ்தகவுகள் என்க. $y_1+y_2=1$, $y_1, y_2 \geqslant 0$.

இப்பொழுது A என்பவர் B எந்த தந்திரத்தைப் பயன்படுத்தினாலும் g என்ற நீச ஈட்டிப்பைப் பெற முயல்வார். B என்பவர் அதிக பட்சம் g என்ற உச்ச இழப்பைப் பெற முயல்வார். எனவே, இப்பொழுது, கீழ்காணும் தொடர்புகளைக் காணலாம்.

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2) \qquad \dots \quad (1)$$

$$y_1 + y_2 = 1 \quad (y_j \geqslant 0,\ j = 1, 2) \qquad \dots \quad (2)$$

$$x_1\,(-3) + x_2\,(6) \geqslant g \qquad \dots \quad (3)$$

$$x_1\,(7) + x_2\,(1) \geqslant g \qquad \dots \quad (4)$$

$$y_1\,(-3) + y_2\,(7) \leqslant g \qquad \dots \quad (5)$$

$$y_1\,(6) + y_2\,(1) \leqslant g \qquad \dots \quad (6)$$

அல்ஜீப்ரா முறையைப் பயன்படுத்த, சமனிலிகள் (3)-லிருந்து (6) வரை சமன்பாடுகளாகக் கருத வேண்டும். அதனால் இங்கு 6 சமன்பாடுகளும், x_1, x_2, y_1, y_2, g என்ற 5 தெரியாதவைகளும் உள்ளன. எனவே, ஏதாவது 5 சமன்பாடுகளைக் கருதி, அவற்றிற்குத் தீர்வு கண்ட பின்பு, அவை 6ஆவது சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்கிறதா என்றும் $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ என்றும் காண வேண்டும். எல்லா தொடர்புகளையும் பூர்த்தி செய்யும் x_1, x_2, y_1, y_2, g என்ற மதிப்புகளே இவ் விளையாட்டின் தீர்வாகும். இவ்வாறாக (3)-லிருந்து (6) வரையுள்ள சமனிலிகளை சமன்பாடுகளாகக் கருதி கீழ்க்கண்டவாறு சமன்பாடுகளை அமைப்போம் :

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad \dots \quad (7)$$

$$y_1 + y_2 = 8 \qquad \dots \quad (8)$$

$$-3x_1 + 6x_2 = g \qquad \dots \quad (9)$$

$$7x_1 + x_2 = g \qquad \dots \quad (10)$$

$$-3y_1 + 7y_2 = g \qquad \dots \quad (11)$$

$$6y_1 + y_2 = g \qquad \dots \quad (12)$$

சமன்பாடுகள் (7), (8) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$x_2 = 1 - x_1 \qquad \dots \quad (13)$$

$$y_2 = 1 - y_1 \qquad \dots \quad (14)$$

இதனை (9),(10) ஆகியவற்றில் பிரதியிட்டால்

$$-3x_1 + 6(1 - x_1) = g \qquad \ldots (15)$$

$$7x_1 + (1 - x_1) = g \qquad \ldots (16)$$

(15), (16) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$-3x_1 + 6(1-x_1) + 7x_1 + (1-x_1)$ என்று பெறுகிறோம்.

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{1}{3} \qquad \ldots (17)$$

$$\therefore \text{(13)-லிருந்து } x_2 = \frac{2}{3} \qquad \ldots (18)$$

x_1, x_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை (9) அல்லது (10) ல் பிரதியிட்டால் $g = 3$ என்று பெறுகிறோம். ... (19)

$y_2 = 1 - y_1$, $g = 3$ என்று (11)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$-3y_1 + 7(1 - y_1) = 3$$

$$\Longrightarrow y_1 = \frac{2}{5} \qquad \ldots (20)$$

$$\therefore \text{(14)-லிருந்து } y_2 = \frac{3}{5} \qquad \ldots (21)$$

இப்பொழுது $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$ மேலும் தொடர்பு (12) ஆனது பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது.

எனவே, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $y_1 = \frac{2}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$, $g=3$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டின் தீர்வாகும். ஆட்டக்காரர் A என்பவர் P, Q என்ற தந்திரங்களை முறையே $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ என்ற நிகழ் தகவுகளுடனும், ஆட்டக்காரர் B என்பவர் S, T என்ற தந்திரங்களை முறையே $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ என்ற நிகழ் தகவுகளுடன் விளையாட வேண்டும். விளையாட்டின் மதிப்பு g = ரூ. 3.00 ஆகும்.

(ii) அணி முறை (Matrix method)

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ என்ற

இழப்பு—ஈட்டிப்பு அணியைக் கருதுக. இதில் சேணப் புள்ளி இல்லை என்றும் கொள்வோம். $B = (b_{ij})$ என்ற A அணியின் கீழ்ச் சதுர அணியை Square Sub-matrix) தரம் (order) $r > 2$ என்றிருக்குமாறு கருதுக. மேலும் $J_r = (1, 1, \dots\dots 1)_{1 \times r}$ என்க.

$B_T = B$ அணியின் திருப்பு அணி (transpose matrix) என்க.

சேர்ப்பு $B = adj\ B$

$$X = (x_1, x_2 \dots \dots x_m), \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \ x_i > 0$$

$$Y = (y_1, y_2 \dots\dots y_n), \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ y_i > 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\bar{X} = X$-லிருந்து பெறப்படும் $(1 \times r)$ அணியாகும்.

$\bar{Y} = Y$-லிருந்து பெறப்படும் $(1 \times r)$ அணியாகும்.

தீர்வு :

A அணியிலிருந்து பெறப்படும் B என்ற சதுர அணி $r > 2$ என்ற தரத்தைப் பெற்றதாக இருந்தால்

$$\bar{X} = \frac{J_r \text{ சேர்ப்பு } B}{J_r \text{ (சேர்ப்பு } B) J_r'} (x_{r1}, x_{r2}, \dots x_{rr})$$

$$\bar{Y} = \frac{J_r \text{ (சேர்ப்பு } B)'}{J_r \text{ (சேர்ப்பு } B) J_r'} = (y_{r1}, y_{r2}, \dots y_{rr})$$

என்று தீர்வைக் காண்கிறோம். இதில் ஏதாவதொரு $x_{ri} < 0$ அல்லது $y_{rj} < 0$ எனில், அந்தச் சதுரக் கீழ் அணியான Bஐ புறக்

கணித்து விட்டு, மற்றொரு B சதுரக் கீழ் அணியை A-லிருந்து பெற்று மேற்சொன்ன வழி முறையைப் பயன்படுத்தி எல்லா விதி முறைகளும் பூர்த்தி செய்யப்படுகிறதா என்பதையும் காண்கிறோம்.

இப்பொழுது $x_{ri} > 0$ $(i=1, 2, \ldots r)$, $y_{rj} > 0$ $(j=1, 2 \ldots r)$ எனில் விளையாட்டின் மதிப்பு $g = \dfrac{|B|}{J_r\ (\text{சேர்ப்பு } B)\ J_r'}$ ஆகும். இதில் $|B|$ என்பது B அணியின் அணிக்கோவை (determinant) மதிப்பாகும். இறுதியாக $\bar{X}$, $\bar{Y}$ ஆகியவற்றிலிருந்து பெறப்படும் X, Y ஆகியவற்றில் தகுந்த இடங்களில் பூச்சியங்களைச் சேர்த்து

$$\sum_{i=1}^{m} x_i\, a_{ij} > g \;\forall\; j = 1, 2, \ldots n \text{ என்றும்,}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j\, a_{ij} < g \;\forall\; i = 1, 2, \ldots m \text{ என்றும் உள்ளதா}$$

என்பதைச் சோதனை செய்ய வேண்டும். இவற்றில் ஏதாவது ஒன்று முரணாக இருக்குமானால் A அணியின் வேறொரு சதுரக் கீழ் அணியைத் தேர்ந்தெடுத்து தீர்வுகளைக் காண விழைகிறோம்.

மாதிரி :

இழப்பு—ஈட்டிப்புகளைப் பெற்ற கீழ்க்காணும் விளையாட்டைக் கருதுவோம்.

		ஆட்டக்காரர் B		
		P_3	P_4	P_5
ஆட்டக்காரர் A	P_1	2	−2	3
	P_2	−3	5	−1

P_1, P_2 என்ற தந்திரங்களை, ஆட்டக்காரர் A, x_1, x_2 என்ற நிகழ் தகவுகளுடன் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். P_3, P_4, P_5 என்ற தந்திரங்களை, ஆட்டக்காரர் B, y_1, y_2, y_3 என்ற நிகழ் தகவுகளுடன் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்வோம். இதில் $x_1, x_2 > 0$, y_1, y_2, $y_3 > 0$, $x_1 + x_2 = 1$ $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. g என்பது இவ்விளையாட்டின் மதிப்பு எனில், பின்வரும் தொடர்புகளை அமைக்கிறோம்.

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \ldots \quad (1)$$

$$y_1 + z_2 + y_3 = 1 \quad \ldots \quad (2)$$

$$2x_1 - 3x_2 > g \quad \ldots \quad (3)$$

$$-2x_1 + 5x_2 > g \quad \ldots \quad (4)$$

$$3x_1 - x_2 > g \quad \ldots \quad (5)$$

$$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 < g \quad \ldots \quad (6)$$

$$-3y_1 + 5y_2 - y_3 < g \quad \ldots \quad (7)$$

$r = 2$ என்று கொண்டு அணி முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

இப்பொழுது கீழ்க்காணும் இயலுமான சதுரக் கீழ் அணிகளை அமைப்போம்.

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

B_1ஐக் கருத்தில், சேர்ப்பு $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$(\text{சேர்ப்பு } B_1)' = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} = \frac{(1,\ 1)\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}}{(1,\ 1)\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{J_2\ (\text{சேர்ப்பு } B_1)}{J_2\ (\text{சேர்ப்பு } B_1)\ J_2'}$$

$$= \frac{(-6,\ -5)}{(-6,\ -5)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{[-6,\ -5]}{-11}$$

$$= \left(\frac{6}{11}, \frac{5}{11}\right)$$

$$\bar{Y} = \frac{J_2\,(\text{சேர்ப்பு } B_1)'}{J_2\,(\text{சேர்ப்பு } B_1)\,J_2'}$$

$$= \frac{(1,\,1)\begin{pmatrix}-1 & -5\\ -3 & -2\end{pmatrix}}{-11}$$

$$= \frac{(-4,\,-7)}{-11} = \left(\frac{4}{11},\ \frac{7}{11}\right)$$

எனவே,

$$X = \left(\frac{6}{11},\ \frac{5}{11}\right),\qquad Y = \left(0,\ \frac{4}{11},\ \frac{7}{11}\right)$$

$$\Longleftrightarrow X = (x_1,\,x_2),\ \ Y = (y_1,\,y_2,\,y_3)$$

$$x_1 = \frac{6}{11},\ x_2 = \frac{5}{11};\ y_1 = 0,\ \ y_2 = \frac{4}{11},\ y_3 = \frac{7}{11}$$

இங்கு, $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 > 0$ ஆக உள்ளது.

ஆனால், இம் மதிப்புகளுக்குத் தொடர்பு (3) பூர்த்தி செய்யப் படவில்லை. எனவே, அணி B_1ஐப் புறக்கணிக்கிறோம்.

இப்பொழுது A அணியின் மற்றொரு சதுரக் கீழ் அணியான B_2ஐக் கருதுவோம்.

$$B_2 = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix},\ \text{சேர்ப்பு } B_2 = \begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$(\text{சேர்ப்பு } B_2)' = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ X = \frac{J_2\,(\text{சேர்ப்பு } B_2)}{J_2\,(\text{சேர்ப்பு } B_2)\,J_2'}$$

$$= \frac{(1,\,1)\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}}{(1,\,1)\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}$$

$$= \frac{(2,\,-1)}{1} = (2,\,-1)$$ ஆகும்.

$\Longrightarrow x_1 = 2,\quad x_2 = -1 < 0$ எனவே, B_2 என்ற கீழ்ச் சதுர அணியை மறுக்கிறோம்.

இறுதியாக,

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$ என்று கருதுகிறோம்.

எனவே,

$$\text{சேர்ப்பு } B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad [\text{சேர்ப்பு } B_3]^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \bar{X} = \frac{J_2 \, (\text{சேர்ப்பு } B_3)}{J_2 \, (\text{சேர்ப்பு } B_3) \, J_2^1}$$

$$= \frac{(1, 1) \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}{(1, 1) \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{(8, 4)}{15}$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \ \frac{1}{3} \right) \Longleftrightarrow X = (x_1, x_2)$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3}, \ x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\bar{Y} = \frac{J_2 \, (\text{சேர்ப்பு } B_3)'}{J_2 \, (\text{சேர்ப்பு } B_3) \, J_2'}$$

$$= \frac{(1, 1) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{12}$$

$$= \frac{(7, 5)}{12} = \left(\frac{7}{12}, \ \frac{5}{12} \right)$$

$$\Longrightarrow Y = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{7}{12}, \ \frac{5}{12}, \ 0 \right)$$

இங்கு, $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 > 0$ எனவே,

$$g = \frac{|B_3|}{J_2 \, (\text{சேர்ப்பு} B_3) \, J_2^1} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}}{12}$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$ ஆகும்.

$$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ y_1 = \frac{7}{12},\ y_2 = \frac{5}{12},\ y_3 = 0,\ g = \frac{1}{3}$$

என்ற மதிப்புகளுக்குத் தொடர்புகள் (1)-லிருந்து (7) வரை பூர்த்தி செய்யப்படுகின்றன. எனவே, ஆட்டக்காரர் A என்பவர் P_1, P_2 என்ற தந்திரங்களை முறையே நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ என்று பயன்படுத்த வேண்டும். ஆட்டக்காரர் B என்பவர் P_3, P_4, P_5 என்ற தந்திரங்களை முறையே நிகழ்தகவு $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{12}$, 0 என்று பயன்படுத்த வேண்டும். விளையாட்டின் மதிப்பு $g = \frac{1}{3}$ ஆகும்.

வரைபட முறை (Graphical Procedure)

இம் முறையை ஓர் உதாரணம் வாயிலாகக் காண்போம். மேலே கண்ட உதாரணத்தை இங்குக் கருதுவோம்.

		ஆட்டக்காரர் B		
		P_3	P_4	P_5
ஆட்டக்காரர் A	P_1	2	−2	3
	P_2	−3	5	−1

இவ் விளையாட்டின் மதிப்பு g எனில், கீழ்க்கண்ட தொடர்புகளைப் பெறுகிறோம் :

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \dots (1)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \quad \dots (2)$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq g \quad \dots (3)$$

$$-2x_1 + 5x_2 \geq g \quad \dots (4)$$

$$3x_1 - x_2 \geq g \quad \dots (5)$$

$$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \leq g \quad \dots (6)$$

$$-3y_1 + 5y_2 - y_3 \leq g \quad \dots (7)$$

இங்கு x_1, x_2 என்பன, ஆட்டக்காரர் A என்பவர், P_1, P_2 என்ற தந்திரங்களை மேற்கொள்ளுவதற்கான நிகழ்தகவுகளாகும். $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 = 1$. y_1, y_2, y_3 என்பன ஆட்டக்காரர் B என்பவர் P_3, P_4, P_5 என்ற தந்திரங்களை மேற்கொள்ளுவதற்கான நிகழ்தகவுகளாகும். $y_1, y_2, y_3 \geq 0$, $y_1 + y_2 + y_3 = 1$

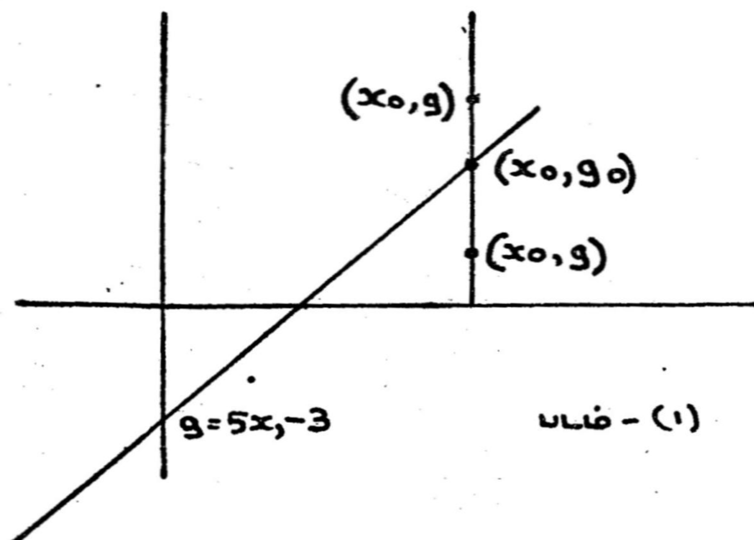
முன் கூறப்பட்ட சமனிலிகளை மாற்று விதமாக எழுதினால்

$2x_1 - 3(1 - x_1) \geqslant g$ அல்லது $5x_1 - 3 \geqslant g$ ... (8)

$-2x_1 + 5(1 - x_1) \geqslant g$ அல்லது $-7x_1 + 5 \geqslant g$ ... (9)

$3x_1 - (1 - x_1) \geqslant g$ அல்லது $4x_1 - 1 \geqslant g$ ... (10)

முதலில் $g = 5x_1 - 3$ என்ற கோட்டை வரைபடத்தில் கீழ்கண்டவாறு அமைக்கிறோம் :



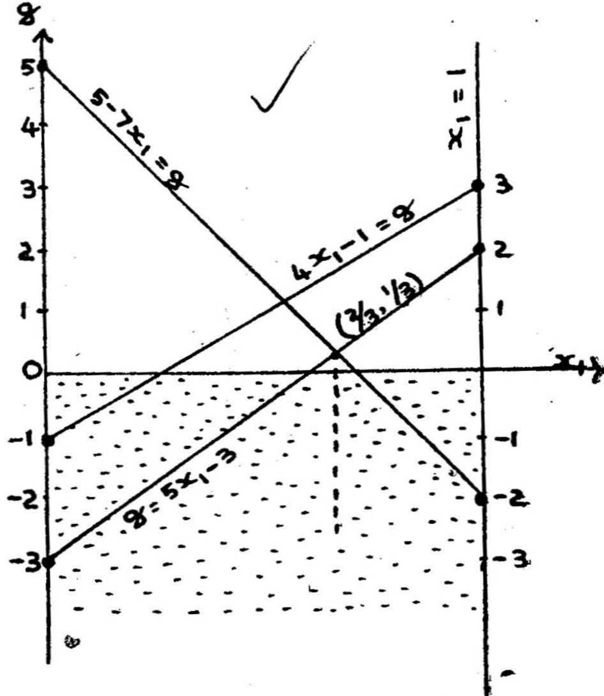
படம் - (1)

(x_0, g) என்ற எந்தப் புள்ளியும் இந்தக் கோட்டிற்கு மேலே அமையவேண்டுமெனில் $g > g_0 = 5x_0 - 3$ என்றிருத்தல் அவசியம். இதேபோன்று இந்தக் கோட்டிற்குக் கீழே அமைய வேண்டுமெனில் $g < g_0 = 5x_0 - 3$ என்றிருத்தல் வேண்டும்.

இப்பொழுது நாம் $5x_1 - 3 > g$ என்ற சமனிலியில் மிகவும் நாட்டம் கொண்டுள்ளோம். எனவே, நமக்குத் தேவைப்படும் தீர்வு இக் கோட்டின் மீதோ, அல்லது அதற்கு மேலோ, கீழோ அமைந்திருக்கும். $[0, 1]$ என்ற இடைவெளியில் $5x_1 - 3 = g$, $-7x_1 + 5 = g$, $4x_1 - 1 = g$ என்ற கோடுகளைப் பின்வருமாறு அமைக்கிறோம்.

இங்கு, g உச்சத்திலிருக்கும் வண்ணம் ஒரு புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். இந்த உதாரணத்தில் இப் புள்ளியானது

$g=5x_1-3$, $g=5-7x_1$ என்ற இருகோடுகள் வெட்டுமிடத்தில் அமைந்துள்ளது. இப் புள்ளி $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ஆகும்.



அதாவது,

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

எனவே, $g = 5x_1 - 3$

$$= 5\left(\frac{2}{3}\right) - 3$$

$$= \frac{5}{3} < \frac{1}{3} = g$$

அல்லது $3x_1 - x_2 > g$, பிறகு $y_3 = 0$

சமன்பாடுகள் (2)-ம், (6)-ம்

அதாவது, $2y_1 - 2(1 - y^1) = \frac{1}{3}$

$$4y_1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

அல்லது $y_1 = \frac{7}{12}$, $y_2 = \frac{5}{12}$

(7)ஐச் சோதனை செய்தால், இம் மதிப்புகளுக்கு அது பூர்த்தி செய்யப்படுகிறது. எனவே, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $y^1 = \frac{7}{12}$, $y_2 = \frac{5}{12}$, $y_3 = 0$, $g = \frac{1}{3}$ என்பது கொடுக்கப் பட்ட விளையாட்டின் தீர்வாகிறது.

நேர்கோட்டுத் திட்டமுறை (Linear Programming Method)

கலப்புத் தந்திரங்களைப் பெற்ற கீழ்காணும் விளையாட்டு அணியைக் கருதுக.

ஆட்டக்காரர் II

$$A = \text{ஆட்டக்காரர் I} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= (a_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots m$$
$$j = 1, 2, \ldots n$$

இதில் ஆட்டக்காரர்-I, $i = 1, 2, \ldots m$ என்ற தந்திரங்களை $x_1, x_2 \ldots x_m$ என்ற நிகழ்தகவுகளுடனும், ஆட்டக்காரர்-II $j = 1, 2, \ldots n$ என்ற தந்திரங்களை $y_1, y_2 \ldots y_n$ என்ற நிகழ்தகவு களுடனும் விளையாடுகிருர்கள் என்க.

இதில்,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = 1, \; x_i > 0, \; i = 1, 2, \ldots m$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = 1 \; y_j > 0, \; j = 1, 2, \ldots n$$

முதல் ஆட்டகாரருக்கு $x_1, x_2 \dots x_{m1}$ g ஆகியவற்றை

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + \dots + a_{m1}\, x_m \geqslant g \\ a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{m2}\, x_m \geqslant g \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n}\, x_1 + a_{2n}\, x_n + \dots + a_{mn}\, x_m \geqslant g \end{array}\right\} \quad \dots \quad (1)$$

$$x_1 + \dots + x_m = 1$$

$x_i \geqslant 0,\ i - 1, 2, \dots m$ என்றிருக்குமாறு காண வேண்டும்.

இரண்டாம் ஆட்டக்காரருக்கு, $y_1, y_2, \dots y_n, g$ ஆகியவற்றை

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \dots + a_{1n}\, y_n \leqslant g \\ a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \dots a_{2n}\, y_n \leqslant g \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}\, y_1 + a_{m2}\, y_2 + \dots + a_{mn}\, y_n \leqslant g \end{array}\right\} \quad \dots \quad (2)$$

$$y_1 + v_2 + \dots + y_n = 1$$

$y_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \dots n$ என்றிருக்குமாறு காண வேண்டும்.

(1). (2) ஆகியவற்றிலுள்ள தொடர்புகள் ஒவ்வொன்றையும் gஆல் வகுத்து

$$x_i' = \frac{x_i}{g}, \quad y_j' = \frac{y_j}{g}$$ என்று கருதினுல்

$$\Sigma\, x_i' = \frac{\Sigma\, x_i}{g} = \frac{1}{g}$$

$$\Sigma\, y_j' = \Sigma\, \frac{y_j}{g} = \frac{1}{g}$$

எனவே $\Sigma x_i'$ஐ நீசப்படுத்துவதால் $x_1, x_2, \dots x_m$-கள் விளையாட்டின் மதிப்பை உச்சப்படுத்துகின்றன. இதே போன்று $\Sigma y_j'$ஐ உச்சப்படுத்துவதால் $y_1, y_2, \dots y_n$-கள் விளையாட்டின் மதிப்பை நீசப்படுத்துகின்றன.

(1), (2) ஆகியவற்றிலுள்ள பிரச்சினைகளைக் கீழ்கண்டவாறு ஒரு கோட்டுத் திட்ட முறையாக இரு விதமாக அமைக்கலாம்.

முதல் நிலைப் பிரச்சினை (Primal problem)

$x_1^1 \; x_2^1 \ldots x_m^1$ ஆகியவற்றை

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^1 = x_2^1 + x_2^1 + \ldots + x_m^1$$ உச்சத்திலிருக்கும்

வண்ணம் கீழ்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட் பட்டிருக்குமாறு காண வேண்டும்.

$$\begin{array}{l}
a_{11} x_1^1 + a_{21} x_2^1 + \ldots + a_{m1} x_m^1 \geqslant 1 \\
a_{12} x_1^1 + a_{22} x_2^1 + \ldots + a_{m1} x_m^1 \geqslant 1 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{1n} x_1^1 + a_{2n} x_2^1 + \ldots + a_{mn} x_m^1 \geqslant 1 \\
x^1{}_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m)
\end{array}$$

இருமைப் பிரச்சினை (Dual problem)

$y_1^1, \; y_2^1, \ldots y_n^1$ ஆகியவற்றை $\sum_{j=1}^{n} y_j^1 = y_1^1 + \ldots + y_n^1.$

உச்சத்திலிருக்கும் வண்ணம் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளுக்குட் பட்டிருக்குமாறு காணவேண்டும்.

$$\begin{array}{l}
a_{11} y_1^1 + a_{12} y_2^1 + \ldots + a_{1n} y_n^1 \leqslant 1 \\
a_{21} y_1^1 + a_{22} y_2^1 + \ldots + a_{2n} y_n^1 \leqslant 1 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{m1} y_1^1 + a_{22} y_2^1 + \ldots + a_{2n} y_n^1 \leqslant 1 \\
y_j^1 \geqslant 0 \; (j = 1, 2, \ldots n)
\end{array}$$

ஒவ்வொரு விளையாட்டும் ஒரு தீர்வை உச்சத்திலிருக்கும் வண்ணம் நிலைத்திருப்பதால்,

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i^1 = \max \sum_{j=1}^{m} y_j^1 = \frac{1}{g}$$

விளையாட்டுப் பிரச்சினையை நேர்கோட்டுத் திட்டமாக எளிதாக அமைப்பதற்கான மற்றொரு முறை

முதலில் n சமனிலிகளைச் சமன்பாடுகளாகத் தளர்வான மாறிகளைப் (slack varibles) புகுத்திக் கீழ்கண்டவாறு பெறுகிறோம்:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - x_{m+1} = g$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m - x_{m+2} = g$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m - x_{m+n} = g$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$
$$x_i > 0$$

முதல் சமன்பாட்டை மற்ற ஒவ்வொரு சமன்பாடுகளிலிருந்து கழித்தால் சமமான ஒரு கோட்டுத் திட்ட முறையைக் காணலாம்.

உச்சப்படுத்து: $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - x_{m+1} = g$

நிபந்தனைகள்:

$$(a_{12} - a_{11})x_1 + (a_{22} - a_{21})x_2 + \dots + (a_{m2} - a_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+2} = 0.$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$(a_{1n} - a_{11})x_1 + (a_{2n} - a_{21})x_2 + \dots + (a_{mn} - a_{m1})x_m + x_{m+1} - x_{m+n} = 0$$
$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$
$$x_i > 0.$$

மாதிரி:

கீழ்க்காணும் விளையாட்டு இழப்பு—ஈட்டிப்புப் பிரச்சினையை ஒரு கோட்டுத் திட்ட அமைப்பாக மாற்றுக.

ஆட்டக்காரர் A \ ஆட்டக்காரர் B	Q_1	Q_2	Q_3
P_1	0	−1	1
P_2	1	1	−1
P_3	1	−1	0

ஆட்டக்காரர் A-க்கு அமைந்துள்ள ஆரம்பகட்ட நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு:

$$\left.\begin{aligned} &0x_1 + 1x_2 + 1x_3 \geqslant g \\ &-x_1 + 1x_2 - x_3 \geqslant g \\ &1x_1 - 1x_2 + 0x_3 \geqslant g \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}\right] \quad \ldots \quad (1)$$

ஆட்டக்காரர் B-க்கு அமைந்துள்ள ஆரம்பக்கட்ட நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு:

$$\left.\begin{aligned} &0\,y_1 - y_2 + y_3 \leqslant g \\ &y_1 + y_2 - y_3 \leqslant g \\ &y_1 - y_2 + 0\,y_3 \leqslant g \\ &y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ &y_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3 \end{aligned}\right] \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-லுள்ள தொடர்புகளில் தளர்வான மாறிகளைப் (slack variables) புகுத்திக் கீழ்கண்டவாறு பெறுகிறோம்.

$$\left.\begin{aligned} &x_2 + x_3 - x_4 = g \\ &-x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = g \\ &x_1 - x_2 - x_6 = g \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots 6 \end{aligned}\right] \quad \ldots \quad (3)$$

இதேபோன்று நேர் மாறியை (2)-லுள்ள தொடர்புகளில் உபரி மாறிகளைப் (Surplus variable) புகுத்திக் கீழ்கண்டவாறு பெறுகிறோம்.

$$\left.\begin{aligned} &-y_2 + y_3 + y_4 = g \\ &y_1 + y_2 - y_3 + y_5 = g \\ &y_1 - y_2 + y_6 = g \\ &y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ &y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots 6 \end{aligned}\right] \quad \ldots \quad (4)$$

(3)-ல் அமைந்துள்ள முதல் சமன்பாட்டை மாற்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து கழித்தால், கீழ்க்கண்ட நேர்கோட்டுத் திட்டப் பிரச்சினையை அமைக்கிறோம்.

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_i &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு, $x_2 + x_3 - x_4 = g$ என்ற சார்பை உச்சப்படுத்த வேண்டும்.

இதே போன்று B என்பவருக்கு,

$$\left.\begin{aligned} y_1 - 2y_2 - 2y_3 - y_4 + y_5 &= 0 \\ y_1 - y_3 - y_4 + y_6 &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_j \geqslant 0,\ j &= 1, 2, \ldots 6 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு, $-y_2 + y_3 + y_4 = g$ என்ற சார்பை நீசப்படுத்த வேண்டும்.

(5), (6) ஆகியவைகளிலுள்ள ஒரு கோட்டுத் திட்ட முறை ஒன்றுக்கொன்று இருமைப் பிரச்சினைகளாகும் (Dual Problems).

(6)-லுள்ள பிரச்சினையைக் கருத்தில் கொண்டால் அதன் இருமைப் பிரச்சினை கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது. அதாவது,

B-என்பவருக்கு
$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &\leqslant 0 \\ -2w_1 + w_3 &\leqslant -1 \\ -2w_1 - w_2 + w_3 &< 1 \\ -w_1 - w_2 &\leqslant 1 \\ w_1 &< 0 \\ w_2 &< 0 \end{aligned}$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு w_3ஐ உச்சப்படுத்தவேண்டும்.

இதே போன்று (5)-லுள்ள பிரச்சினையைக் கருத்தில் கொண்டால் அதன் இருமைப் பிரச்சினைக் கீழ்கண்டவாறு அமைகிறது. அதாவது, A-என்பவருக்கு

$$\begin{aligned}
&-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0 \\
&-2\lambda_2 + \lambda_3 > 1 \\
&-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 > 1 \\
&\lambda_1 + \lambda_2 > -1 \\
&x_1 > 0 \\
&-\lambda_2 > 0
\end{aligned}$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு λ_3ஐ நிசப்படுத்தவேண்டும்.

எனவே, (5)ஐயோ அல்லது(6)ஐயோ தீர்வுகண்டு, கொடுக்கப்பட்ட விளையாட்டுக்குத் தீர்வு காணலாம்.

பயிற்சி

1. கீழ்காணும் விளையாட்டு இழப்பு—ஈட்டிப்பு அட்டவணைகள் சேணப் புள்ளியைப் பெற்றுள்ளதா இல்லையா என்பதைக் கண்டு அவற்றிற்க்கான தீர்வை உச்சநீச—நீசஉச்ச முறையின் மூலம் காண்க.

(i)

		ஆட்டக்காரர் II		
		S	T	U
ஆட்டக்காரர் I	P	0	2	−3
	Q	−2	3	1
	R	1	5	4

(ii)

		ஆட்டக்காரர் M		
		c	d	e
ஆட்டக்காரர் L	a	2	0	1
	b	−3	1	−2

(iii) ஆட்டக்காரர் B

		1	2	3	4
ஆட்டக்காரர் A	1	−2	3	0	−3
	2	3	1	−1	−1
	3	−3	4	2	−5
	4	5	−2	4	−2

(iii) ஆட்டக்காரர் Q

		L	M	N
ஆட்டக்காரர் P	S	−2	3	0
	T	3	1	−1
	U	−3	4	2
	V	5	−2	−4

2. கீழ்க்காணும் விளையாட்டு அணிகளுக்கான தீர்வுகளைத் தகுந்த முறையின் மூலம் காண்க :

(i)

	1	2	3
1	9	1	4
2	0	6	3
3	5	2	8

(ii)

	1	2	3	4
1	−6	4	−1	−4
2	1	−5	9	−3
3	−4	0	−7	4
4	2	−3	5	−9

3. வரைபட முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் விளையாட்டு அணிக்குத் தீர்வு காண்க :

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

4. (2)-லுள்ள விளையாட்டு அணிகளுக்குச் சமமான நேர் கோட்டுத் திட்டப் பிரச்சினையை அமைத்துத் தீர்வு காண்க.

10. வலைப்பின்னல் அமைப்பு ஆய்வு

(Network Analysis)

அறிமுகம்

வாய்ப்பு வளங்கள் எப்போதும் வரையற்றதாக இருக்க முடியாது. அவை சமயங்களில் கிடைத்தற்கரியனவாகவும் இருக்கும். எடுத்துக்கொள்ளும் எந்த வேலைகளும் இருக்கக்கூடிய வாய்ப்பு வளங்களைப் பொறுத்தே அமைந்து செயல்படவேண்டியுள்ளன. எனவே, ஒரு நிறுவனத்தின் வளர்ச்சியும் அதன் தொழில் வெற்றியும், கிடைத்துள்ள வாய்ப்பு வளங்களை எந்தச் சிறந்த முறையில் உபயோகிக்கிறோம் என்பதைப் பொறுத்துள்ளது.

ஒரு திட்டத்தினைக் குறிப்பிட்ட கால நேரத்துக்குள் வெற்றிகரமாக முடிப்பதற்கு, திட்டத்திலுள்ள பலவித செயல்களை முன்கூட்டி வரிசைப்படுத்தித் திட்டத்துடன் செயல் படுத்தவேண்டும் என்பது நாம் அறிந்த விஷயமாகும். ஒரு தொழிற்சாலை பொறியாளர் தன் தொழிற்பட்டரையில் உற்பத்தியினை விரிசை முறைப்படுத்தும் வகையில் பலவித உத்திகளை அறிந்துகொள்ள தமது அறிவினைச் செலவிடுகின்றார். காண்ட் வரைபடம்(Gantt Chart), பார் வரைபடம் (Bar chart) போன்ற சில உத்திகள் அவருக்குச் சாதனங்களாகும். இருந்த போதிலும், திட்டத்தின் குழப்பமான சூழ்நிலைகள் அதிகரிக்கும் போது, இந்த உத்திகள் போதுமானவையாகத் தெரிவதில்லை. பல செயல்முறைகளின் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய தன்மை,நேர்மையான வரிசைமுறைகள் இவற்றினை காலவரிசைப்படி ஒரு வழிமுறையில் புகுத்தும் போது பலவகையான சிக்கல்கள் ஏற்படுகின்றன. எனவே, வலுக்கட்டாயமான இச் சூழ்நிலை ·திட்ட நிபுணர்களை மேலும் சிந்திக்க வைத்து இன்னும் சிறந்த வரிசைமுறை உத்திகளைக் கண்டுபிடிக்கத் தூண்டியது. அதன்விளைவே வலைப்பின்னல் அமைப்பு ஆய்வு (Net work Analysis) ஆகும்.

வலைப்பின்னல் அமைப்பு ஆய்வு ஒரு நவீன திட்ட முறையாகும். இது பழைய முறையிலிருந்தும் மாறுபட்டவாறு வேலை

களின் கால நேரத்தையும் முறைவரிசையையும் தனித் தனியே ஆராயப்படும் முறையாகும். இந்த அமைப்பாய்வில் இருமுக்கிய வழிகள் உண்டு. அவையாவன :

(i) அம்புக் குறை வரைபட வலைப்பின்னல் வரைதல்.

(ii) வரிசைப்படுத்துதல் ஆகும்.

(i) அம்புக் குறி வரைபடம் வரைதல்

ஒரு திட்டத்தைப் பலவித தனிப்பட்ட வேலைகள் அல்லது நிகழ்ச்சிகளின் தொகுப்பாகப் பிரித்துக் கொள்ளவும். நேர்மையான முறைவரிசை, பல்வேறு வேலைகளுக்கிடையேயான ஒன்றுக்கொன்றன் தொடர்பு இவற்றை ஓர் அம்புக்குறி வரைபடம் வடிவில் அமைத்துக் காட்டவும்.

(ii) வரிசை முறைப் படுத்தல்

ஒவ்வொரு வேலைக்குமான காலவரம்பின் மதிப்பீடுகள் கணிக்கப்படுகின்றன. ஒரு வேலை ஆரம்பிககப்படக் கூடிய மிக விரைவான காலநேரம், அது ஆரம்பிக்கப்படக்கூடிய மிகத் தாமதமான நேரம் (திட்டம் முடிவு பெருமல் இருக்கும் சமயத்தில்) இவை இரண்டும் ஓர் அம்புக்குறி வரைபடத்திஞல் வரையறுக்கப்பட்ட வேலைகளின் வரிசை முறைகளைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இந்த ஆய்விலிருந்து திட்டத்தின் மொத்த காலவரம்பிற்கு ஏற்றதான தீர்வுக் கட்ட வேலைகள் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு வேலைக்கும் கிடைக்கக்கூடிய மீந்த நேரமும் (மிகுதிப்பட்ட கால நேரம்) (spare time) கணிக்கப்படுகிறது.

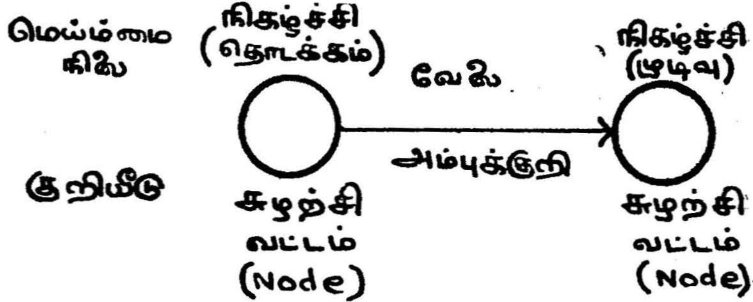
அம்புக்குறி வரைபடங்கள்

ஓர் அம்புக்குறி வரைபடம் பல்வேறு வேலைகள், நிகழ்ச்சிகள் அவற்றின் உடன் தொடர்பு இவற்றின் நேர்மையான வரிசை முறையைக் கட்புலஞக (visually) வர்ணிக்கிறது.

வேலைகளும் நிகழ்ச்சிகளும் (Jobs and Events)

ஒரு முழுமையான செயல்முறையை (உதாரணமாக ஒரு பாலம் கட்டுதல்) ஒரு திட்டம் என்று பொதுவாகக் கூறுகிரேம். அந்தச் செயல்முறையின் பகுதிகளை (உதாரணமாக அடித்தளம் அமைத்தல்) வேலைகள் அல்லது செயல் நடவடிக்கைகள் என்று வழங்குகின்ரேம். ஒரு நிகழ்ச்சி என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட வேலை அல்லது வேலைகள் முடிவுற்ற பின்னரும் அதற்கடுத்த வேலை ஆரம்பிக்கும் முன்னரும் உள்ள சூழ்நிலையை அல்லது

நிலைமையைக் குறிக்கும். ஒரு வேலையின் தொடக்கமும் முடிவும் நிகழ்ச்சிகள் என்று தெளிவாகத் தெரிகிறது. அம்புக்குறியின் தடித்தமுனை, வேலையின் தொடக்கத்தையும், அதன் தலைப்பாகம் வேலையின் முடிவினையும் குறிக்கிறது. ஒரு நிகழ்ச்சியானது ஒரு சுழற்சி வட்டத்தின் மூலம் (node) விளக்கப்படுகிறது.



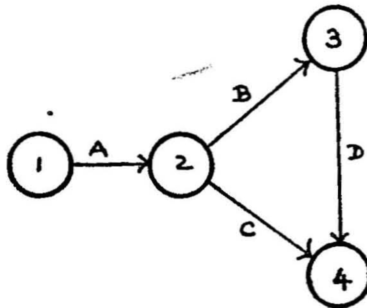
நிகழ்ச்சிகளை எண்ணால் குறித்தல்

நிகழ்ச்சிகளை எண்ணால் குறிப்பது வழக்கமான ஒரு முறையாகும். இதன்மூலம் ஒரு வேலையின் ஆரம்பத்தில் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி எண் வேலை முடிவில் உள்ள நிகழ்ச்சி எண்ணைவிட சிறியதாகக் காணப்படும். இத்தகைய முறையின் பயன் இரு வகைப்படும்.

(1) ஆரம்ப, முடிவு நிகழ்ச்சிகளால் வேலைகளை நிர்ணயிக்க முடிகிறது.

(2) வரிசை முறையில் ஒழுங்கான கணிப்புக்கு வழி வகுக்கிறது.

உதாரணம்

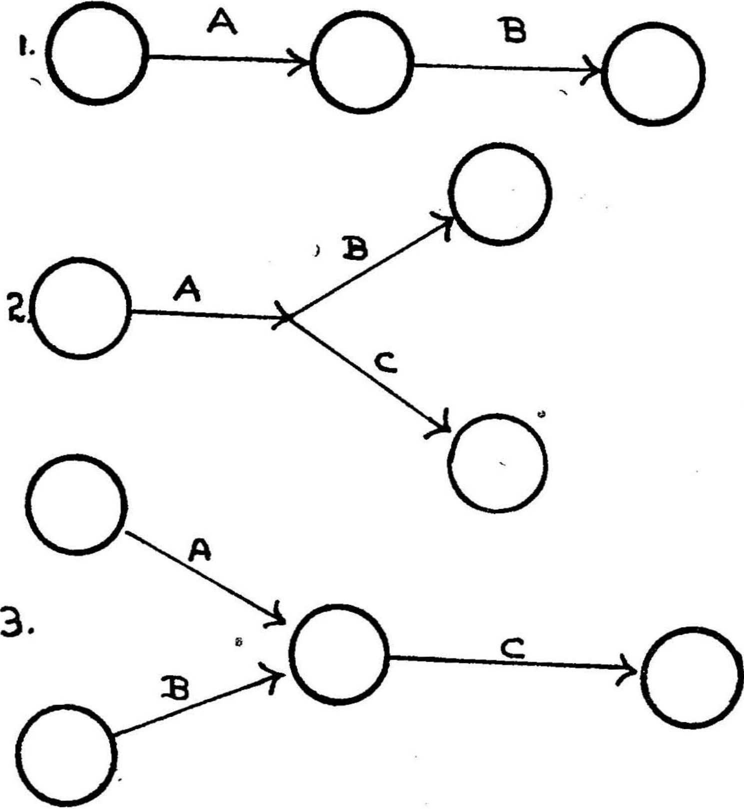


வேலை	விளக்கம்
A	(1, 2)
B	(2, 3)
C	(2, 4)
D	(3, 4)

அம்புக் குறி வலைப்பின்னலமைப்பின் அடிப்படை வடிவங்கள் (Basic forms of Arrow Network)

வேலைகளின் (சட்ட ரீதியான) நேர்மையான வரிசை முறையைக் காட்டும் பொருட்டு அம்புக்குறிகள் தொடர்ந்தாற்போல இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

உதாரணம்



விளக்கம்

(1) *B* வேலை ஆரம்பிக்கும் முன்னர் *A* வேலை முடிக்கப்பட வேண்டும்.

(2) *B* வேலை அல்லது *C* வேலை ஆரம்பிக்கும் முன்னர் *A* வேலை முடிக்கப்பட வேண்டும். *B*, *C* வேலைகள் இரண்டும் ஒரே சமயத்தில் செய்யப்பட வேண்டியவை.

(3) C வேலை ஆரம்பிக்கும் முன்னர் A, B இரு வேலைகளும் முடிக்கப்பட வேண்டும். A, B இரு வேலைகளும் ஒருங்கே நிகழக் கூடியவை.

மேற் கூறிய மூன்று உதாரணங்களும் அம்புக்குறி வலைப் பின்னல்களால் அமைக்கப்படும் அடிப்படை வடிவங்களைக் குறிக்கின்றன.

எண் குறிக்கும் முறை

எல்லா வேலைகளும் ஓர் அடைக்கப்பட்ட வலைப் பின்னல் அமைப்பாக ஆக்கப்பட்ட பின் நிகழ்ச்சிகளுக்கு எண்கள் ஒதுக்கப்படுகின்றன. நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கும் சுழற்சி வட்டங்கள் வலைப்பின்னல் அமைப்பின் ஆரம்பத்திலிருந்து கடைசி வரை அடுத்து அடுத்து எண்களால் குறிக்கப்படுகின்றன. எந்த ஒரு வேலைக்கும் முடிவு நிகழ்ச்சியின் j-எண் ஆனது, அதன் ஆரம்பிக்கும் நிகழ்ச்சியின் i-எண்ணை விட எப்போதும் கூடுதலாக இருக்கவேண்டும். இப்பொழுது எல்லா நிகழ்ச்சிகளும் எண்ணால் குறிக்கப்பட்டால் எந்த ஒரு வேலையையும் ஆரம்ப முடிவு நிகழ்ச்சிகளின் எண்களைக் கொண்டு சுலபமாகக் குறிப்பிட முடியும். பல்கர்சன் (Fulkerson) என்பவரால் விளக்கப்பட்ட இந்தக் கீழ் கண்ட எண் குறிக்கும் முறை மிகவும் பயன் உள்ளதாக காணப்படுகிறது.

(i) ஒரு முதல் நிகழ்ச்சியில் (initial event) அம்புக் குறி ஆரம்பம் ஆகிறதே தவிர அதன் முடிவு தெரிவதில்லை. முதல் நிகழ்ச்சியை கண்டு அறிந்து அதை 1 என்று எழுதுவோம்.

(ii) எண் குறிக்கப்பட்ட எல்லா நிகழ்ச்சிகளிலிருந்தும் கிளம்பும் எல்லா அம்புக் குறிகளையும் நீக்கிவிடவும். இதனால் குறைந்தபட்சம் ஒரு புதிய ஆரம்ப நிகழ்ச்சி ஏற்படும்.

(iii) எல்லா முதல் (initial) நிகழ்ச்சிகளையும் 2, 3 என்ற வாறு எண் கொண்டு குறிக்கவும். எந்த வரிசையில் எண் குறிக்கிறோம் என்பது இங்கு முக்கியமல்ல.

(iv) திரும்பவும் (எதிர்பாராமல்) கிளம்புகிற அம்புக் குறிகளை நீக்கிவிட்டு இதே முறையில் கடைசி நிகழ்ச்சியை அடையும் வரை தொடர்ந்து திரும்பச் செய்யவும்.

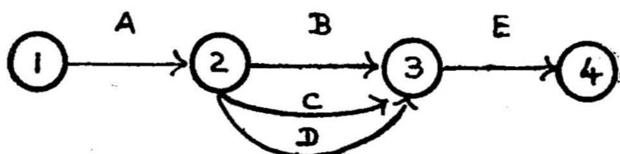
கடைசி நிகழ்ச்சியானது அதிலிருந்து ஓர் அம்புக் குறியும் கிளம்பாதவாறான நிகழ்ச்சியாகும்.

போலி அம்புக்குறிகள் (Dummy Arrows)

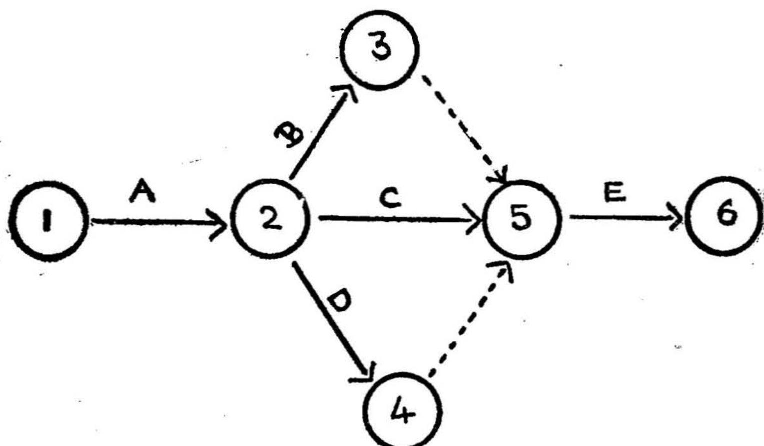
சில சமயங்களில் ஆரம்ப, முடிவு நிகழ்ச்சிகளால் வேலைகளைக் குறிக்கும்பொழுது ஏற்படும் தெளிவின்மையை (ambiguity) போக்குவதற்குப் போலி அம்புக்குறிகள் பயன்படுகின்றன.

உதாரணம்

A-வேலை முடிந்தவுடனேயே *B*, *C*, *D* மூன்று வேலைகளும் ஆரம்பிக்கின்றன எனக் கொள்வோம். மேலும், *B*, *C*, *D* மூன்று வேலைகள் எல்லாமே முடியும் வரை *E*-வேலை காத்திருக்க வேண்டும். இந்த வேலைகளின் நேர்மையான வரிசைமுறையை கீழ்க்கண்ட அம்புக்குறி வரைபடம் விளக்குகிறது. இங்கு நிகழ்ச்சிகளும் எண்களால் குறிக்கப்படுகிறது.



வேலைகளின் வரிசைமுறை சரியாகக் கொடுக்கப்பட்டு இருந்தபோதிலும் *B*, *C*, *D* மூன்று வேலைகளும் (2, 3)-ன் மூலம் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தத் தெளிவின்மையைப் போக்குவ



தற்கு வலைப் பின்னலமைப்பினுள் போலி அம்புக்குறிகள் புகுத்தப் படுகின்றன. போலி அம்புக்குறிகள் பூஜ்ய காலவரையைக் கொண்ட வேலைகளைக் குறிக்கின்றன. மேற்கண்ட வரை

படத்தில் புள்ளியிட்ட அம்புக் குறிகள்மூலம் அவை காட்டப் பட்டுள்ளன.

இங்கு B, C, D வேலைகள் தெளிவின்மைக்கு இடம் அற்ற வகையில் முறையே (2, 3), (2, 5), (2, 4) இவற்றால் குறிக்கப் படுகின்றன.

முந்தும் நேரங்களும் முடிவு நேரங்களும் (Lead Times and End Times)

ஒரு முழுமையான அம்புக்குறி வரைபடம் ஒரே ஒரு நுழைவு புள்ளியையும் ஒரே ஒரு வெளியேறும் புள்ளியையும் கொண் டிருக்கவேண்டும். இதற்காக எல்லா வேலைகளும் கீழ்க்கண்ட விதத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு முந்தும் நேரத்தையும் ஒரு முடிவு நேரத்தையும் கொண்டிருக்கவேண்டும்.

முந்தும் நேரம்—மற்ற எல்லா வேலைகளையும் முந்தி இருத்தல்.

முடிவு நேரம்—மற்ற எல்லா வேலைகளையும் தொடர்ந்து இருத்தல்.

இவை உண்மையான காலவரையையோ அல்லது புனைந்த செயற்பாங்கினையோ (போலிகளைப்போல) சார்ந்து இருக்கும். இவற்றின் ஒரே பயன் வலைப் பின்னலமைப்பின் தளர்ச்சியான முனைகளை இழுத்துக் கட்டுவதே ஆகும். வலைப்பின்னல் அமைப்பானது ஏற்கெனவே அடைபட்டதாக இருந்தால் புனைந்த முந்தும் நேரங்களையும் முடிவு நேரங்களையும் புகுத்தவேண்டிய அவசியம் இல்லை.

வலைப் பின்னலமைப்பிற்கான விதிமுறைகள் (Rules of the Net Work)

ஓர் அம்புக்குறி வரைபடம் வரைவதற்கான விதிமுறைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு சுருக்கமாகக் கூறலாம் :

(i) வலை அமைப்பின் ஒவ்வொரு செயற்பாங்கும் (activity) குறிக்கோளை அடையும் பொருட்டு செய்து முடிக்கப் பெற வேண்டும்.

(ii) ஒரு நிகழ்ச்சியானது அதனை எதிர் நோக்கக் கூடிய ஒவ்வொரு செயற்பாங்கினையும் முடித்த பின்னரே நிகழ்கிறது.

(iii) ஒரு நிகழ்ச்சி நடந்து முடியும் வரை அந்த நிகழ்ச்சிக்கு அடுத்த எந்த ஒரு செயற்பாங்கும் ஆரம்பிக்கப்பட முடியாது (தொடங்கப்பட முடியாது).

(iv) இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே ஒரு செயற்பாங்கு அல்லது வேலையால் இணைக்கப்பட முடியும்.

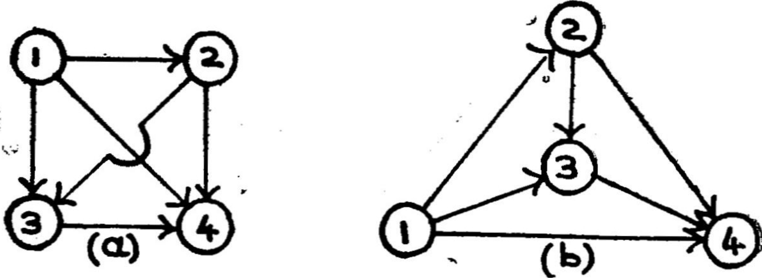
(v) ஒரு செயற்பாங்கு ஒரே ஓர் அம்புக் குறியால் குறிக்கப் பட வேண்டும்.

(vi) செயற் பாங்குகளின் ஒன்றுக்கொன்றுள தொடர்பு ஏதாவது இருப்பின் முடிந்தால் போலிகளின்மூலம் அவற்றைக் குறிக்கவேண்டும்.

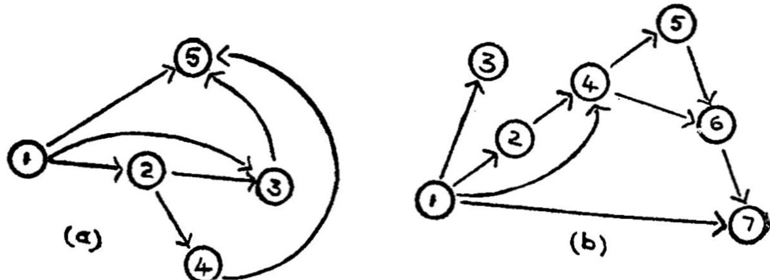
(vii) ஒரு வலையமைப்பிற்கு ஒரே ஒரு நுழைவுப்புள்ளி (entry point)யும், ஒரே ஒரு வெளியேறும் (exit point) புள்ளியும் இருக்க வேண்டும்.

வலைப் பின்னலமைப்பு வரைவதற்கான சில குறிப்புகள்

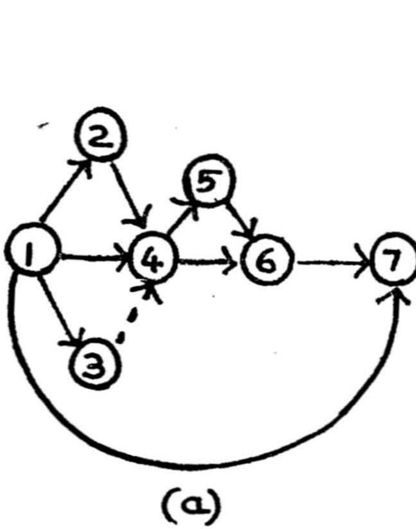
தனிப்பட்ட அம்புக்குறிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருக்கையில் சுலபமாக விளங்கக் கூடிய ஒரு நல்ல தொருவலைப் பின்னலமைப்பை வரைவது பொதுவாக கடினமான ஒரு காரிய மாகும். அனுபவத்தில் கண்டறிந்த சில கீழ்க்கண்ட வரை படங்கள் 1 முதல் 6 வரையான படங்களில் (b) வலைப் பின்னல் (a) வலைப் பின்னலை விடச் சிறந்ததென்று நன்கு காட்டுகிறது.



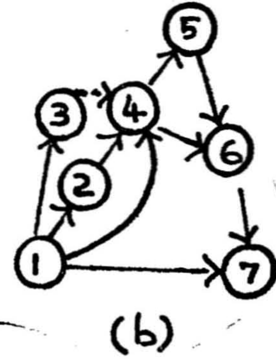
படம் 1: அம்புக்குறிகள் ஒன்றை யொன்று கடக்குமாறு வரை வதைத் தடுக்க முயலவும்,



படம் 2: எல்லா அம்புக்குறிகளையும் நேர்கோடுகளாக வரைய முயலவும்.

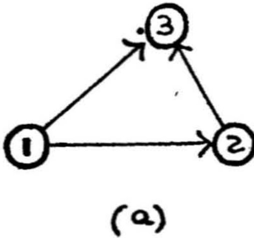


(a)

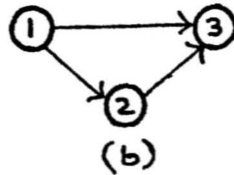


(b)

படம் 3: அம்புக்குறிகளின் நீளங்களில்பெருத்த மாறுபாடுகளைத் தவிர்க்க முயலவும்.

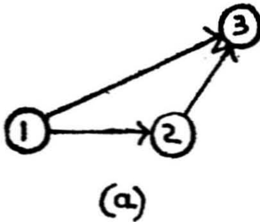


(a)

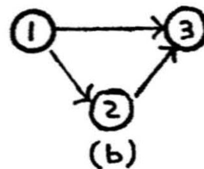


(b)

படம் 4: அம்புக் குறிகளுக்குகிடைப்பட்ட கோணங்களை முடிந்த அளவு பெரிதாக்கிக்காட்ட முயலவும்.



(a)



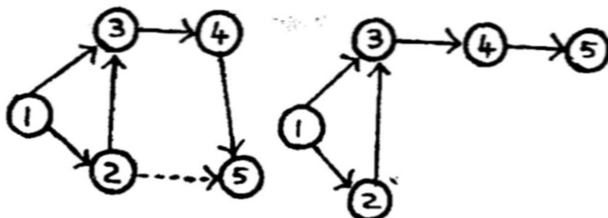
(b)

படம் 5: ஒவ்வோர் அம்புக் குறியிலும் இடம் இருந்து வலம்

என்ற அமைப்பைக் காக்க முயலவும். அதாவது அடுத்த நிகழ்ச்சியை முந்தைய நிகழ்ச்சிக்கு வலதுபுறமாக எப்போதும் வரைதல் வேண்டும்.

படம் 6 :

படம் 6-ல் நிகழ்ச்சி 5, நிகழ்ச்சி 4-க்குப் பின் வருகிறது; நிகழ்ச்சி 4, 3-க்குப் பின்னும், நிகழ்ச்சி 3, நிகழ்ச்சி 2-க்குப் பின்னரும் ஏற்படுகிறது. எனவே நிகழ்ச்சி 5, நிகழ்ச்சி 2 க்-குப் பின்னரே நிகழ வேண்டும். மேலும், (2,5) என்ற போலி அதிகப்படியான ஒன்று அதேசமயத்தில் மற்ற எல்லாத் தேவையான போலிகளும் புகுத்தப் பட்டுள்ளனவா என்று வரைபடத்தில் கவனித்துப் பார்க்க வேண்டும்.



படம் 6: தேவையற்ற போலிகளை நீக்கிவிடவேண்டும்.

கடைசி விதிமுறையானது வலைப்பின்னல் அமைப்பில் ஒரே ஒரு நுழைவுப் புள்ளியும் ஒரே ஒரு வெளியேறும் புள்ளியும் மட்டுமே இருக்கவேண்டும் என்பதை வலியுறுத்த வேண்டியுள்ளது.

முதல் ஐந்து விதிமுறைகளும் இலட்சிய நோக்குடையவை. ஆனால் அவற்றை முழுமையாக உபயோகிப்பது சிரமம். எனவே, அவற்றை ஒரு கடுமையான முறையாக ஏற்றுக் கொள்வதைவிட குறியிலக்குகளாகக் கொள்வதுதான் சிறந்தது ஆகும். மேலும், அம்புக் குறியின் நீளத்துக்கும் அந்த வேலைக்கான காலவரம்பிற்கும் யாதொரு சம்பந்தமும் இல்லை என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. வேலைகளும் நிகழ்ச்சிகளும் காலத்தால் ஒன்றுக் கொன்று எந்த விதத்தில் தொடர்பு உடையன என்பதைக் காட்டக் கூடிய வரிசை முறையாகவே அம்புக்குறிகள் பயன்படுகின்றன.

பர்ட் உத்தியும் தீர்வு கட்ட பாதை முறையும் (PERT & CPM)

அமெரிக்க ஏவுகணை, விண்வெளி அமைப்புத் திட்டங்களில் ஒரு பெரிய பிரச்சினை தோன்றியது. இருபது பெரிய கான்டிராக்டர்களும், நிறைய தொழில் வல்லுநர்களும் ஈடுபட்டிருக்கும்

சில பெரிய ஏவுகணைத் திட்டங்களுக்கான செயல் வரிசை முறைகள் ஒழுங்காகச் செயல்படுகின்றனவா என்பது அரசாங்கம் எவ்வாறு நிச்சயப்படுத்திக் கொள்வது? குறியிலக்குத் தேதிகளில் குறித்த படி வேலைகள் நடப்பதற்கு எவ்விதத்தில் செலவுகள் மேற்கொள்ளப்பட வேண்டும்? சிக்கல்கள் எங்கு உள்ளன? இத்தகைய பல்வகைப் பிரச்சினைகளை ஆராய்ந்து பார்க்கும்போது செயல்களின் வரிசை முறைகள் தேவைக்கேற்றபடி சரியாக அமையவில்லை என்று தெரிந்தது. ஒரு வெற்றிகரமான திட்டம் அமைவதற்கு முன்னர் பல இடையூறுகள் நடுவே ஏற்பட்டுக் குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் திட்டம் முழுமையாகப் பூர்த்தி செய்யப்படுவதில்லை. எனவே, வேலைகளின் நிச்சயமற்ற தன்மைகளைக் கவனித்துச் செயலாற்றுவதற்கு 1958ஆம் வருடத்தில் ஒரு புது வித உத்தி கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இதையே PERT "பர்ட் உத்தி" என்று கூறுகிறோம். அதாவது "திட்ட மதீப்பீடு, மறு சீராய்வு உத்தி" (Program Evaluation Review Technique) (P. E. R. T) என்பதாகும். பெரிய பராமரிப்புச் செயல்களை வரிசை முறைப்படுத்தித் திட்டமிட உதவிய சிலர் "தீர்வு கட்ட பாதை முறை" (Critical path Method) (C. P M.)-யையும் தோற்றுவித்தனர். ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்திற்குள் ஒரு திட்டத்தினை முடிப்பதற்கான செலவினை மீச்சிறுமமாக்கும் அளவிற்கு இம் முறை தோற்றுவிக்கப்பட்டது.

அம்புக் குறி வரைபடம் வேலைகளுக்கிடையேயான நேர்மையான உடன் தொடர்புகளைக் காட்டுகிறதே யொழிய ஒவ்வோர் வேலைக்கும் ஆகும் நேரத்தினைக் காட்டுவதில்லை. வரிசை முறையை ஒழுங்குபடுத்துவதற்கு ஒவ்வோர் வேலைக்குமான கால நேரத்தினை முதலில் மதிப்பீடு செய்து பிறகு இந்த மதிப்பீடுகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு கட்ட வேலைகள், மீந்த நேரங்கள் முதலியனவற்றைத் தீர்மானிக்க வேண்டியது அவசியமாகிறது.

வாய்ப்பு வளங்களின் இயல் நிலை மட்டத்தில் ஒவ்வோர் வேலைக்குமான சராசரி கால வரம்பின் சிறந்த மதிப்பீடுகள் கண்டு பிடிக்கப்படுகின்றன. முன்னரே தீர்மானிக்கப்பட்ட கால மதிப்புத் தகவுகள் (time standards) இருந்தால் அவை இங்கு பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவை இல்ல விட்டால், அந்த வேலைக்குப் பொறுப்பான நபரால் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட நேரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். அந்த வேலைக்குப் பொறுப்புள்ள நபர் கீழ்க்கண்ட நேரங்களை மதிப்பீடு செய்தால் அவற்றையே நம்பத்தக்க மதிப்பீடுகளாக நாம் கொள்ளலாம்.

(i) ஒரு வேலையினை, இதைவிடச் சிறந்த குறுகிய காலத்திற்குள் முடிக்க முடியாது என்ற கொள்ளக்கூடிய நேரம், அதாவது நலமார்ந்த நேரம் (Optimistic time) ஆகும். இந்த நேரத்தினை "a" என்று குறிக்கலாம்.

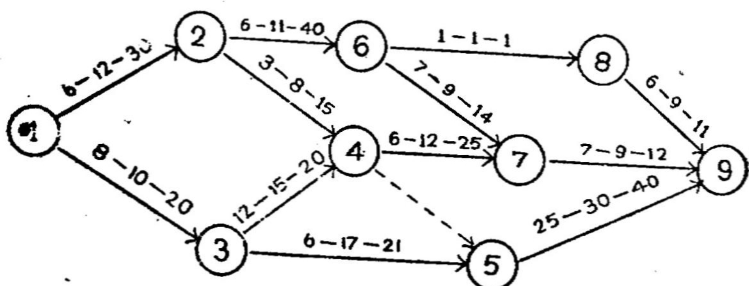
(ii) எதிர்பார்த்த அளவு கஷ்டத்துடனும், வேலைப்பளுவுடனும் ஒரு வேலையினைச் செய்து முடிக்க ஆகும் ஒரே ஒரு கால மதிப்பீடு, நிகழும் சாத்தியக் கூறுடைய நேரம் (most likely time) ஆகும். இதை "m" எனக் குறிக்கிறோம்.

(iii) ஒரு வேலை தோல்வியடைந்தால் அதை முழுதும் திரும்பச் செய்து விட ஆகும் நேரம் நம்பிக்கையற்ற நேரம் (Pessimistic time) ஆகும். இதை "b" என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

ஒரு வேலைக்கான இந்த மூன்று நேரங்களின் மதிப்பீடுகளையும் ஒருவர் கண்டறிந்தால் இவற்றிலிருந்து சிறந்த நம்பத்தக்க மதிப்பீட்டினைக் கணிக்க முடியும்.

இந்த வேலைக்கான சராசரி நேரமாக $\frac{a + 4m + b}{6}$ என்ற மதிப்பினைக் கொள்ளலாம். இந்த வேலைக் காலத்திற்கான மதிப்பீட்டின் மாறுபாடு (variance of estimate) $= \frac{(b-a)^2}{36}$ ஆகும். நலமார்ந்த நேர மதிப்பீடு நம்பிக்கையற்ற நேர மதிப்பீடு இவற்றுக்கான வீச்சினை இந்த மாறுபாடு விளைவிக்கிறது. வேலை வரம்புகளிலுள்ள நிச்சயமற்ற தன்மைகள் அல்லது நிகழ்தகவுக் காரணிகளைத் தீர்மானிக்க இந்த மாறுபாடு உதவுகிறது. ஒரு வேலையின் கால வரம்பிற்கான எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு, மாறுபாடு இவற்றினைக் கண்டறியும் முறையானது, கால வரம்பு ஒரு பீட்டா பரவலில் அமைந்துள்ளது என்று அனுமானத்தைச் சார்ந்து உள்ளது.

உதாரணம் 1.



முன்பக்கத்திற்கண்ட பர்ட் வலைப்பின்னல் அமைப்பு வரைபடத்தில் வேலைக் காலவரம்புக்கான நலமார்ந்த, நிகழும் சாத்தியக் கூறுடைய, நம்பிக்கையற்ற நேரங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன. (i) ஒவ்வொரு வேலைக்குமான எதிர்பார்த்த காலவரம்பினைக் கணிக்கவும். (ii) வேலை காலவரம்புகளின் மதிப்பீடுகளுக்கான மாறுபாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

இப்போது கீழ்க்காணும் வரையறைகளைக் (definitions) கவனிப்போம்.

காலவரம்பு (Duration)

இந்தக் காலவரம்பு எனும் பதம் வலைப்பின்னல் அமைப்பின் ஒரு வேலைக்காகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இந்த வேலையின் செயலாக்கத்துடன், முடியும் நேரத்தை அது குறிக்கின்றது.

காலநேரம் (Time)

நிகழ்ச்சிகள் எந்தச் சமயத்தில் அல்லது தேதியில் நிகழ்கிறதோ அதையே காலநேரம் குறிக்கின்றது.

தீர்வு கட்ட பாதை (Critical Path)

ஒரு செயல் திட்டத்தின் காலவரம்பை நேரடியாகப் பாதிக்கக்கூடிய வேலைகளைக் கொண்டு ஒரு வலைப்பின்னல் அமைப்பின் தீர்வு கட்ட பாதை அமைகிறது. வலை அமைப்பின் ஒழுங்கான ஆய்வு தனித்தனி வேலைகளை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. அவையாவன :

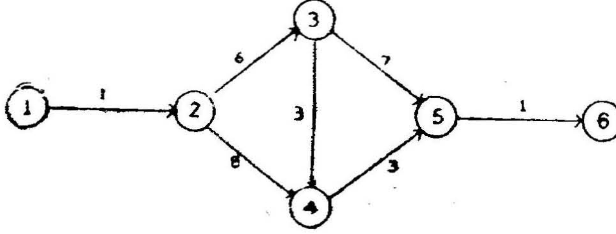
(i) தீர்வு கட்ட பகுதிகள்.

(ii) தீர்வு கட்ட மற்ற பகுதிகள் (Non-critical jobs) என்பனவாகும்.

உதாரணம்

பின்வரும் அம்புக்குறி வரைபடத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். வேலைகள் ஒவ்வொன்றின் கால வரம்பும் அந்த அந்த அம்புக்குறிகளின் இடையே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. திட்டத்தின் மொத்தக் காலவரம்பு 15 நாள்கள் என்று நன்கு தெரிகிறது. இரட்டைக் கோடுகளால் குறிக்கப்பட்ட வேலைகள் தீர்வு கட்ட வேலைகள் ஆகும்.

இவற்றை முடிப்பதில் ஏதாவது தாமதம் ஏற்பட்டால் திட்டத்திலும் தாமதம் ஏற்படும். எந்த ஒரு வலை அமைப்பில் குறைந்தபட்சம் ஒரு தீர்வுகட்ட பாதை இருக்குமோ, அந்தப் பாதையை உருவாக்கும் வேலைகள் தீர்வு கட்ட வேலைகள் ஆகும். ஒரு சிறிய வலை அமைப்பின் தீர்வுகட்ட பாதையை அந்த



அமைப்பின்மூலம் வழிகளைக் கொண்டு கண்டுபிடிக்கலாம். ஆனால், ஒரு பெரிய வலை அமைப்பிற்கு ஒரு மிகச் சிறந்த ஒழுங்கான வழிமுறை தேவைப்படுகிறது. ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான சீக்கிரமான, தாமதமான நேரங்களின் விவரத்தின்மூலம் தீர்வுகட்ட பாதையை நிர்ணயிப்பது சுலபமாகிறது.

சீக்கிரமான, தாமதமான, நிகழ்ச்சி நேரங்கள்
(Earliest and Latest Event Times)

சீக்கிரமான நிகழ்ச்சி நேரம் = மீப்பெரு { நுழைதல்கள் }
(E. E. T.) Max (Entries)

முதல் நிகழ்ச்சிக்கு E. E. T = 0

இப்பொழுது அடுத்த பக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ள வலை அமைப்பிற்கு, E. E. T., L. E. T. இரு நேரங்களும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக்கும் கண்டுபிடிப்போம்.

நிகழ்ச்சி 2-க்கு E.E.T = 3.
,, 3-க்கு ,, = 2.
,, 4-க்கு ,, = மீப்பெரு (6,2+2,3+5)= 8
,, 5-க்கு ,, = மீப்பெரு (3+7, 8+4) =12

தாமதமான நிகழ்ச்சி நேரம் L.E.T = *மீச்சிறு* (வெளியேறல்கள்)

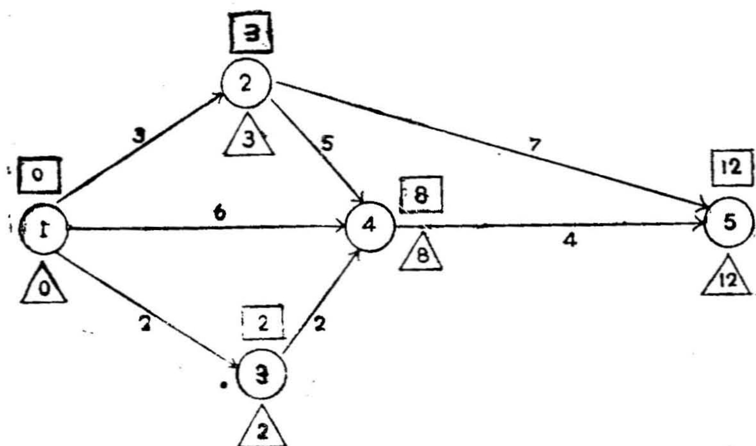
கடைசி நிகழ்ச்சிக்கு (இங்கு நிகழ்ச்சி 5) L.E.T-யும் E.E.T-யும் ஒன்றுகிறது. அதாவது L.E.T = 12

நிகழ்ச்சி 4-க்கு L.E.T $= 12 - 4 = 8$.

நிகழ்ச்சி 3-க்கு L.E.T $= (8-2) = 6$.

நிகழ்ச்சி 2-க்கு L.E.T $=$ மீச்சிறு $(12 - 7,\ 8 - 5) = 3$.

நிகழ்ச்சி 1-க்கு L.E.T $=$ மீச்சிறு $(3 - 3,\ 8 - 6,\ 6 - 2) = 0$.



சீக்கிரமான நிகழ்ச்சி நேரங்களைச் சதுரக்கட்டங்களிலும், தாமதமான நிகழ்ச்சி நேரங்களை முக்கோணக் கட்டங்களிலும் அம்புக் குறி வரைபடத்திலேயே அந்த அந்த நிகழ்ச்சிக்குப் பக்கத்திலேயே கொடுத்து உள்ளோம். சீக்கிரமான, தாமதமான நிகழ்ச்சி நேரங்கள் எந்த எந்த நிகழ்ச்சிக்களுக்கு ஒரே அளவில் இருக்கின்றனவோ அந்த நிகழ்ச்சிகள் தீர்வு கட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். அதாவது அவை தீர்வு கட்ட பாதையில் அமைகின்றன. தீர்வு கட்ட நிகழ்ச்சிகள் 1,2,4,5 ஆகும். நிகழ்ச்சிகள் 2,5 தீர்வுகட்ட நிகழ்ச்சிகளாக இருந்த போதிலும், (2,5) என்ற வேலை தீர்வு கட்ட வேலை அல்ல.

ஒரு வேலை தீர்வுகட்ட வேலையாக இருப்பதற்கான மற்றும் ஒரு நிபந்தனை; அந்த வேலைக்கு உண்டான நேரம் அந்தக் கால வரம்பிற்குச் (Duration) சமமாக இருத்தல் வேண்டும். இந்த உதாரணத்தில் தீர்வு கட்ட வேலைகள் (1,2),(2,4)(4,5) ஆகும். தீர்வு கட்ட பாதை 1-2-4-5 ஆகும்.

மிதவைகள் (Floats)

தீர்வு கட்ட வேலைகளுக்கு மீந்த நேரமே (spare time) கிடையாது. எனவே, அவ்வேலைகளில் ஏதாவது ஒன்றைச்செய்து முடிப்பதில் தாமதம் ஏதும் ஏற்பட்டால், அந்த அளவிற்கு முழு திட்டமும் பூர்த்தியாவதில் தாமதம் ஏற்படும். தீர்வு கட்டம் அல்லாத வேலைகளில் கிடைக்கும் மீந்த நேரத்தையே "மிதவை" (float) என்று அழைக்கின்றோம். வாய்ப்பு வளங்களின் தேவைகளைச் சரிக்கட்டவும், மேலும் அல்லது திட்டத்தின் காலவரம்பையோ, செலவையோ குறைப்பதற்கும் இது பயன்படுகின்றது.

மிதவைகளை ஒழுங்காகக் கணித்தல் (Systematic Computation of Floats)

எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட வேலைக்கும்,

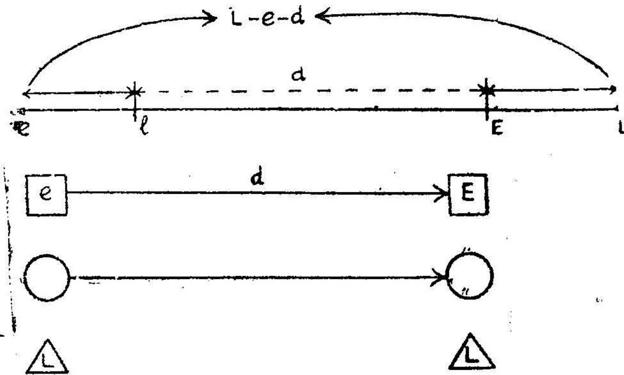
d என்பது வேலையின் கால வரம்பாகவும்,

e என்பது ஆரம்ப நிகழ்ச்சியின் விரைவான (சீக்கிரமான) நேரம் ஆகவும்,

l என்பது ஆரம்ப நிகழ்ச்சியின் தாமதமான நேரமாகவும்,

E என்பது கடைசி நிகழ்ச்சியின் விரைவான நேரமாகவும்,

L என்பது கடைசி நிகழ்ச்சியின் தாமதமான நேரமாகவும் கொள்வோம்.



அந்த வேலைக்குக் கிடைக்கும் மொத்த நேரம் $(L-e)$ ஆகும். அதன் கால வரம்பு d ஆகும். எனவே, கிடைக்கும் மொத்த மீந்த நேரம் $= L-e-d$.

இதையே மொத்த மிதவை (Total Float) என்கின்றோம். இது அதிகமானால் திட்டம் தாமதப்படும்.

மொத்த மிதவை

$= L-e-d = (E-e-d) + (L-E)$

இலவச

= (தாராளமான) மிதவை + குறுக்கீடான மிதவை
(Free Float) (Interfering float)

இலவச
(தாராளமான) மிதவை

$= E-e-d =$ வேலையினைச் சீக்கிரமாக ஆரம்பித்துச் சீக்கிரமாக முடிப்பதால் ஏற்படும் மிகுதிப்பட்ட நேரம் (excess time)

குறுக்கீடான மிதவை

$= L - E =$ வேலையை முடிப்பதற்கான விரைவான நேரத்துக்கும் தாமதமான நேரத்திற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு (difference)

இலவச
(தாராளமான) மிதவை

$= E-e-d = (l-e) + (E-l-d)$
= முந்திய வேலைக்கான குறுக்கீடான மிதவை + தனித்த மிதவை.

தனித்த மிதவை (Independent float)

$= E-l-d =$ வேலையினைத் தாமதமாக ஆரம்பித்து விரைவில் முடிப்பதால் கிடைக்கும் அதிகப்படியான நேரம்.

விளக்க உதாரணம்

ஒரு காண்டிராக்டர், தொழிற்சாலை ஒன்றிற்கான கான்டீன் ஷெட் ஒன்றை உருவாக்குவதற்கான மதிப்பீடுகளைப் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுத்திருக்கிறார். A வேலை மற்ற எல்லா வேலைகளையும்விட முன்னர் செய்யப்படவேண்டும். E வேலை மற்ற எல்லா வேலைகளுக்கும் பின்னர் செய்யப்படவேண்டும். இதைத்தவிர, மற்ற வேலைகள் ஒருங்கே நிகழக்கூடியவையாகும்.

இயல்பான, வேகமான செலவுகள்

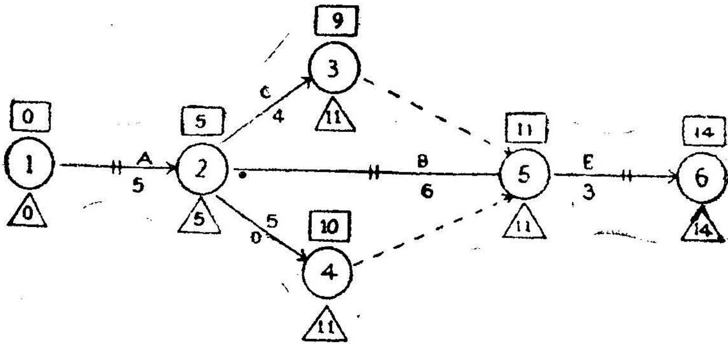
(Normal and Rapid Costs)

வேலை விளக்கம்	வேலை	இயல்பான காலவரம்பு (நாள்களில்)	இயல்பான செலவு (100 ரூபாய் களில்)	வேகமான காலவரம் (நாள்களில்)	வேகமான செலவு (100 ரூபாய் களில்)	நாள் ஒன்றுக்கான விகிதம் (100 ரூபாய் களில்)	மீப்பெரு அழுத்தம் (வீச்சு நாள் களில்)
A	பொருள்களை இடத்திற்குக் கொண்டு செல்லல்	5	30	4	40	10	1
B	ஷெட்டைப் போடுதல்	6	12	2	20	2	4
C	மின் சாதனம் அமைத்தல்	4	10	3	18	8	1
D	ஈயக் குழாய் முதலியவை அமைத்தல்	5	12	3	20	4	2
E	பணிகளைப் பூர்த்தி செய்து இணைப்புகளைக் கொடுத்தல்	3	16	3	16	—	—

மீப்பெரு பயன் எளிமையுடைய வாய்ப்பு வளங்களை உப யோகப் படுத்தி வேலையைப் பூர்த்தி செய்ய ஆகும் மீச்சிறு பய னெளிமையான நேரமே விரைவான நேரம் ஆகும். அலுவலகச் செலவுகள் (Over head costs) நாள் ஒன்றுக்கு 500 ரூபாய்கள் என்ற வீதத்தில் இருப்பின் திட்டத்திற்கான நேர-செலவு வாணி கத் தன்மையைத் தீர்மானிக்க வேண்டியது நமது பிரச்சினை யாகும்.

முதல் கட்டம்

வலைப் பின்னல் அமைப்பு முதலில் வரையப்படுகிறது. ஒவ்வோர் வேலைக்குமான இயல்பான கால வரம்பினைப் பயன் படுத்தி திட்டத்தின் கால வரம்பும், திட்டத்திற்கான இயல்பான (வழக்கமான) செலவும் தீர்மானிக்கப்படுகின்றது.



படம்—1. கொட்டகை அமைத்தல் (இயல்பான காலவரம்பு)
Erecting a shed (Normal Duration)

எனவே, இயல்பான கால வரம்பு = 14 நாள்களில்
நேரடிச் செலவு = ரூ. 8000 ரூபாயுடன்
திட்டம் முடியும்.

கட்டம் II

மிகக் குறைந்த வீதம் உடைய தீர்வு கட்ட வேலையான (2, 5)ஐத் தேர்ந்தெடு. அதன் கால வரம்பில் அதன் வீச்சு அல்லது ஒரு சிறு-தீர்வு கட்ட பாதை வழியான மிகக் குறைவான மிதவை இரண்டில் எது குறைவோ அந்த அளவினைக் குறை (கழி).

இங்கு வீச்சு (இந்த வேலைக்கு) = 4 நாள்கள்.

2—3—5-ன் வழியில் மொத்த மிதவை = 2 நாள்கள்.

2—4—5-ன் வழியில் மொத்த மிதவை = 1 நாள்.

எனவே (2, 5) வேலையின் கால வரம்பினை ஒரு நாளால் சுருக்குகிறோம். (குறைக்கிறோம்) (Compress)

மேற்கூறிய வரையறைப்படி (a) மொத்த மிதவை அதிக மானால், திட்டம் பூர்த்தியாகத் தாமதமாகும். பூஜ்யம் மொத்த மிதவையைக் காட்டும் வேலைத் தொடர் தீர்வு கட்ட பாதை யாகும்.

(b) இலவச மிதவை வேலைகளின் தொடரில் ஈர்த்துக் கொள்கிறது. நம் கவனத்தில் உள்ள வேலையுடன் இத் தொடர் அறுபடுகிறது. அதற்கு அடுத்தடுத்த வேலைகளுக்கு இந்த இலவச மிதவை இருக்காது.

(c) தனித்த மிதவையானது நம் கவனத்திலுள்ள வேலையில் முழுதுமாக ஈர்த்துக் கொள்ளும் மீந்த நேரமாகும். மற்ற வேலை களைச் சாராது இது அமையும்.

மிகக் குறைந்த செலவு வரிசை முறை (Least cost Scheduling)

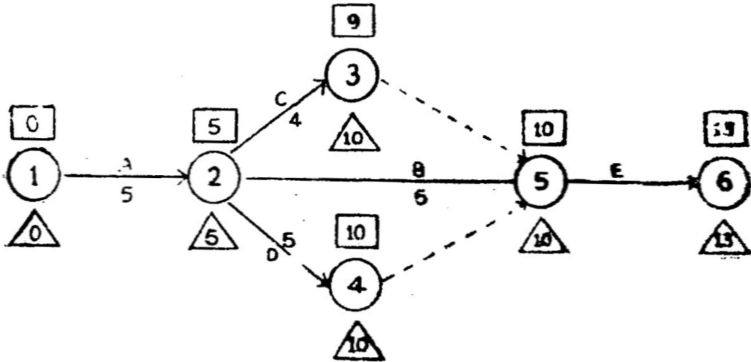
ஒரு திட்டத்தில் வேலைகளின் கால வரம்பினைச் செலவுகள் கட்டுப்படுத்தக் கூடிய சில உதாரணங்களைக் கூறலாம். சில குறிப்பிட்ட சந்தர்ப்பங்களில் திட்டத்தை விரைவாக்குவதற்கு (speed up) அதாவது விரைவாக முடிப்பதற்குக் கால வரம்புகளைக் குறைக்க வேண்டிய அவசியம் ஏற்படலாம். தேவையற்ற விவரங்களையெல்லாம் நீக்கி விட்டதாகக் கொண்டு, வேலைகளுக்கு நிறைய வாய்ப்பு வளங்களை ஒதுக்கீடு செய்வதன்மூலம் வேலை களை விரைவாக்க முடியும். அதாவது எதிர்பார்த்ததற்கு முன்ன ரேயே திட்டத்தை முடிப்பதற்கோ அல்லது வேறு ஏதாவது இலாபம் கருதியோ அதிகப்படியான செலவை மேற்கொள்ள வேண்டியுள்ளது. செலவுகளும் கால வரம்புகளும் இடையிணைப் பாகும்போது (interlink) வலைப்பின்னலமைப்பாய்வு கட்டுப் படுத்தக்கூடிய அளவில் இசைந்து கொடுக்கும் தன்மையைப் பெறுகிறது.

இப்போது (2, 5) வேலைக்கான கால வரம்பினை 6 நாள்கள் என்பதற்குப் பதில் 5 என்று எழுதி வலை அமைப்புப் படம் வரைவோம்.

புதிய கால வரம்பு = 13 நாள்கள்.

புதிய நேரடிச் செலவு = ரூ. 8000 + (1 × 200) ரூ.

= 8200/- ரூபாய்கள்.



படம்—2.

இந்த ஒரு நாள் குறைப்பு 2 — 4 — 5 என்ற ஒரு கூடுதலான தீர்வு கட்ட பாதையைத் தருகிறது என்று அறியவும்.

கட்டம் III

நாளொன்றுக்கு 200 ரூபாய் வீதத்தில் (2, 5) வேலையின் காலவரம்பினை குறைவானது, நாளொன்றுக்கு 400 ரூபாய் வீதத்தில் (2, 4) வேலையின் வழியாக ஏற்படும் குறைவினை ஒட்டி நிகழாது. அமைப்பில் 600 ரூபாய் என்ற மொத்த வீதம் இப்போதும் மிகக் குறைந்ததாகையால் இதையே இன்னும் சுருக்க முயற்சிப்போம். எவ்வளவு சுருக்குவது அல்லது குறைப்பது என்பதற்கு (2, 5)-ன் வீச்சு = 3 நாள்கள், (2, 4)-ன் வீச்சு=2நாள்கள்; 2—3—5 பாதையின் மொத்த மிதவை = 1 நாள் என்று காண்கிறோம்.

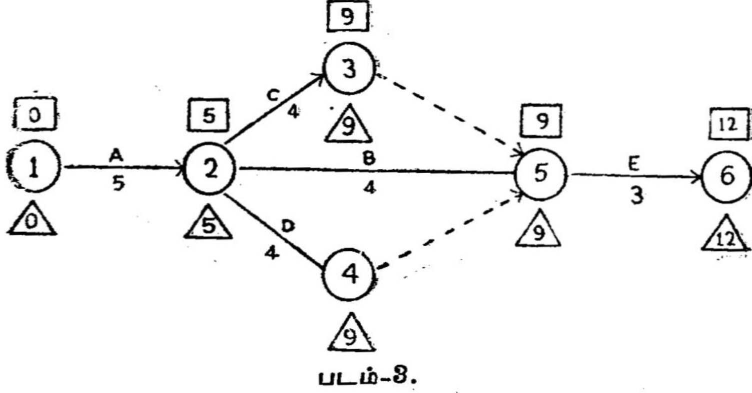
இவற்றில், மீச்சிறுமதிப்பு 1 நாள் என்பதால், (2, 4), (2, 5) இரண்டினையும் ஒரே சமயத்தில் ஒவ்வொன்றுக்கு ஒரு நாளாகக் குறைப்போம்.

புது கால வரம்பு = 12 நாட்கள்.

புது செலவு = 8200 + 600 = 8800 ரூபாய்கள்.

கூடுதலான தீர்வு கட்டபாதை 2—3—5 ஆகும்.

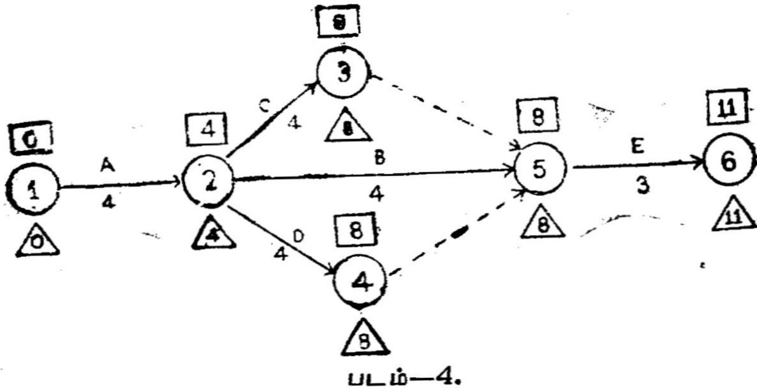
இங்கு எல்லா வேலைகளும் தீர்வு கட்ட பாதைகளாகும்.



படம்-3.

கட்டம் IV

இந்த சமயத்தில் (1,2) வேலை, நாளொன்றுக்கு 1000 ரூபாய் வீதத்தில், சுருக்கப்பட வேண்டும்; அல்லது நாளொன்றுக்கு 1400 ரூபாய் வீதத்தில் இணைந்த வீச்சு ஒரு நாளில் (2,3), (2,4) (2,5) வேலைகளை ஒரே சமயத்தில் குறைக்கவேண்டும். இங்கு எந்தவித கட்டுப்படுத்தப்பட்ட மிதவைகள் ஏதும் இல்லை. எனவே, முந்திய செயலே சிக்கனமானதாகும்.



படம்—4.

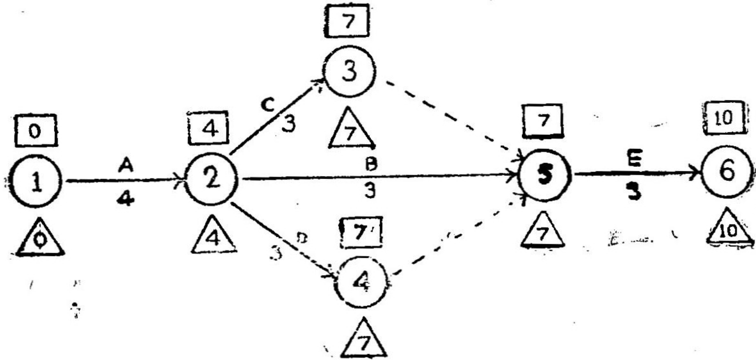
புதிய கால வரம்பு = 11 நாள்கள்.

புதிய செலவு = 8800 + 1000ரூ = ரூ. 9800/-

எல்லா வேலைகளும் தீர்வு கட்ட வேலைகளாகும். *A* வேலையானது தனது விரைவான காலவரம்பினை அடைந்து விட்டது.

கட்டம் V

இப்போது உள்ள ஒரே சாத்தியக் கூறு (posibility), (2,3), (2,4), (2,5) வேலைகளை ஒரே சமயத்தில் சுருக்குவதாகும்.



படம் – 5.

புதிய கால வரம்பு = 10 நாள்கள்.

புதிய செலவு = ரூ 9800 + ரூ 1400 = ரூ 11200/–.

இதற்கு மேல் எத்தகைய சுருக்கமும் செய்ய வழி இல்லை.

எனவே மேற்கூறிய ஆய்வின் விளைவுகளை விளக்ககாக பட்டியலில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

பட்டியல் : திட்ட கால வரம்பும் மொத்தச் செலவும்

திட்டத்தின் கால வரம்பு (நாள்கள்)	நேரடிச் செலவு (ரூ.)	மறைமுகச் செலவு (ரூ.)	மொத்தச் செலவு (ரூ.)
14	8000	7000	15000
13	8200	6500	**14700**
12	8500	6000	14800
11	9800	5500	15300
10	11200	5000	16200

எனவே, பெரிதும் உகந்த காலவரம்பு = 13 நாள்கள் ஆகும்.

மேற்கண்ட உதாரணம், நாம் எடுத்துக் கொண்ட எந்தத் திட்டத்திலும் செலவு—நேரம் தொடர்பின் கவனமான உபயோகத்தில் உள்ளடக்கிய தத்துவங்களை எடுத்துக் காட்டுகின்றது. நடைமுறையில் வலைப்பின்னல் அமைப்பு மிகப் பெரியதாகவும் தீர்வு கட்டபாதைகள் நிறைய கிளைகளைக் கொண்டதாகவும் தீர்வு கட்ட பாதைகள் நிறைய கிளைகளைக் கொண்டதாகவும் இருக்கும். வேலைகள், அவற்றின் மீப்பெரு வீச்சுகள் இவற்றின் மிகக் குறைந்த செலவுடைய சேர்க்கைகளை (least-cost combination) நிறைவற்றிலிருந்து பொறுக்கித் தேர்ந்தெடுக்க மின்கணிப் பானையும் பயன்படுத்த வேண்டிய சூழ்நிலை பல சமயங்களில் ஏற்படுகிறது.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு திட்டம் A முதல் G வரையான 7 நடவடிக்கைகளை (வேலைகளை) கொண்டுள்ளது. வரிசை முறையான தொடர்புகள் கீழ்க் கண்டவாறு தரப்பட்டிருந்தால், அந்தத் திட்டத்திற்கான ஒரு நேர்மையான வலைப்பின்னல் அமைப்பை வரைக.

B வேலை F வேலைக்குப் பின்னர் அமைய வேண்டும்.

D வேலை F வேலைக்குப் பின்னர் அமைய வேண்டும்.

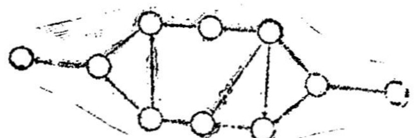
E வேலை G வேலைக்குப் பின்னர் அமைய வேண்டும்.

E வேலை D, F, G வேலைகளுக்குப் பின்னர் அமைய வேண்டும்.

F வேலை G, C வேலைகளுக்குப் பின்னர் அமைய வேண்டும்.

வலை அமைப்பில் நிகழ்ச்சிகளை எண்ணிக்கைப்படுத்துக.

2. கீழ்க் கண்ட வலைப் பின்னல் அமைப்பில் காணப்படும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு எண் கொடுக்க ஃபல்கர்சன் விதியினைப் பயன் படுத்துக.

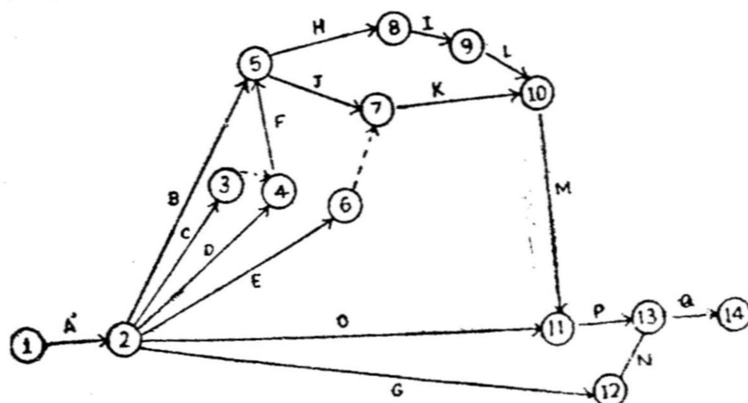


3. கீழ்க்கண்ட வேலைகளின் தொகுப்பினைக் கொண்டும், பொது அறிவினைப் பயன்படுத்தியும் (அவற்றின் வரிசை முறை

யான தொடர்பினைக் காணும் பொருட்டு), ஒரு படகினைக் கட்டு வதற்கான ஒரு வலைப் பின்னல் அமைப்பினை வரைக.

A திட்டங்கள் தீட்டப்பட வேண்டும். (= முந்தும் நேரம்)
B மரத்திற்கான வஜ்ஜிரப் பசைக்கு (resin glue) காத்திரு.
C படகின் உடற் பகுதி, (Rull) மரக்கலக் கூம்பு (mast) இவற்றுக்கான வெட்டும் இயந்திரத்திற்கு காத்திரு.
D மரத்திற்குக் காத்திரு.
E பெயின்ட், வார்னிஷ் இவற்றுக்குக் காத்திரு.
F மரத்தை வெட்டு.
G பாய்க் கித்தானுக்குக் காத்திரு.
H மரக்கலக் கூம்பினை (Mast) அமை அல்லது கட்டு.
I மரக்கலக் கூம்பினை நீட்டி சோதனை செய்.
J படகின் உடற்பகுதிச் தயார் செய்து ஒன்று சேர்.
K மரக்கல உடற் பகுதிக்கு வர்ணம் பூசு.
L மரக்கலக் கூம்பினுக்கு வார்னிஷ் கொடு.
M மரக்கலக் கூம்பினை உடற் பகுதியுடன் சேர்த்து இணை.
N பாய்க் கித்தானை வெட்டித் தயார் செய்.
O பாய்க் கயிற்றமைவு, (rigging) துணைச் சாதனங்களுக்கு காத்திரு.
P பாய்க் கயிற்றமைவினைத் தூக்கி நிறுத்து.
Q முழுமையாகப் பூர்த்தி செய் (= முடிவு நேரம்).

தீர்வு



4. பயிற்சிக் கணக்கு-3ல் படகு கட்டி முடிக்கும் வலைப் பின்னல் அமைப்பில் உள்ள *A* முதல் *Q* வரைக்குமான வேலை களின் காலநேரங்கள் (நாள்களில்) அடைப்புக் குறிகளில் அந்தந்த

வேலைக்குக் கீழ்க்கண்டவாறு தரப்பட்டுள்ளன. விரைவான, தாமதமான நிகழ்ச்சி நேரங்களைக் கண்டுபிடித்து தீர்வு கட்ட பாதையினைத் தீர்மானிக்கவும். படகு கட்டுவதில் உள்ள தீர்வு கட்டமான வேலைகளையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

A (3), *B* (2), *C* (2), *D* (1), *E* (2), *F* (1), *G* (2), *H* (1), *I* (2), *J* (4), *K* (1), *L* (1), *M* (1), *N* (3), *O* (3), *P* (2), *Q* (1),

5. கீழ்க்கண்டவற்றைப் பற்றிச் சிறுகுறிப்பு வரைக.

(a) மிதவைகளின் பல வகைகளினிடையே காணப்படும் வேறுபாடுகளும் அவற்றின் பயன்களும்.

(b) சாதாரண திட்ட உத்திகளிலிருந்தும் வேறுபட்ட வலைப் பின்னல் அமைப்பு ஆய்வின் சிறப்புத் தன்மை.

(c) பர்ட், தீர்வு கட்ட பாதை முறை இவற்றின் விளக்க வேறுபாடுகளும், பர்ட்முறையில் உள்ள அனுமானங்கள்.

6. ஒரு திட்டத்தில் உள்ள செயல்களுக்கான வேலை கால வரம்பு நேரங்களும் முந்துரிமைத் தொடர்புகளும் (precedance relationships) கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

வரிசை எண்	வேலை	கால வரை	முற்றுரிமை தொடர்புகள்	வரிசை எண்	வேலை	கால வரை	முற்றுரிமை தொடர்புகள்
1	A	5	—	10	J	5	F
2	B	10	—	11	K	5	F
3	C	5	Aயும் Bயும்	12	L	10	D
4	D	10	A	13	M	5	I-ம் J-ம்
5	E	5	A	14	N	10	I-ம் J-ம்
6	F	5	A	15	O	5	G-ம் H-ம்
7	G	5	C	16	P	5	K-ம், M-ம்
8	H	5	D	17	Q	5	O, L, N, P,
9	I	10	E				

(a) வலை பின்னல் அமைப்பு வரைபடம் வரைக. பல்கர்சன் விதியினை அனுசரித்து எண்ணிக்கையிட்டுக் காண்பி தொடங்கும், முடியும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான விரைவான, தாமதமான நேரங்களைத் தீர்மானிக்கவும்.

(b) தீர்வுகட்ட பாதையினைக் கண்டுபிடி.

(c) மொத்த, இலவச, குறுக்கீடான, தனித்த மிதவைகளுக்கான ஒரு பட்டியலைத் தயார் செய்க.

7. ஒரு நிறுவன அமைப்புக்கான திட்டத்தின் விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

குறி code	செயல் விளக்கம்	சார்ந்துள்ள விவரம்	காலவரை நாள்களில்
A	படிநிலை (Footings)	ஆரம்பி	5
B	சுவர்	A	10
C	சாதனங்கள் வாங்குதல் (Equipments)	ஆரம்பி	15
D	சாதனங்களை அடித்தளம் அமைத்தல்	A	4
E	கட்டடத்தின் மோடு உச்சிப்பகுதி (roof)	B	5
F	கட்டடத்துக்கு வர்ணம் பூசல்	E	5
G	சாதனத்துக்கு வர்ணம் பூசல்	F-ம் H-ம்	2
H	சாதனத்தை நிறுவுதல்	C-ம் D-ம் E-ம்	6
I	சானத்துக்கு மின் கம்பி இணைப்புக் கொடுத்தல்	H	10

(a) ஒரு வலைப்பின்னலமைப்பினை ஏற்படுத்து.

(b) திட்ட காலவரம்பினைக் கண்டுபிடி.

(c) தீர்வுகட்ட பாதையினைக் குறியிட்டுக் காட்டு.

(d) எல்லாச் செயல்களுக்குமான மொத்த மிதவைகளைக் கண்டறி.

(e) D–வேலையின் 'இலவச மிதவை' எவ்வளவு ?

(f) C–வேலையின் தனித்த மிதவையைக் கண்டுபிடி.

8. கீழ்க்காணும் பட்டியலில் அந்தந்த வேலைக்கான இயல்பான விரைவான நேரங்களும், செலவுகளும் தரப்பட்டுள்ளன. இத் திட்டத்தில் ஒவ்வொரு செயலுக்குமான பெரிதும் உகந்த காலவரம்பினைத் தீர்மானிக்கவும். கூடுதலான செலவு எவ்வளவு என்றும் கணக்கிடுக,

வேலை	நேரம்		செலவு		சரிவு Slope
	இயல்பான	விரைவான	இயல்பான	விரைவான	
(1, 2)	10	7	400	640	80
(1, 3)	19	11	600	1160	70
(2, 3)	10	8	500	600	50
(2, 4)	19	15	700	1000	75
(3, 4)	10	4	300	810	85
மொத்தம்			2500	4210	

9. ஐந்து நிகழ்ச்சிகள், 6 (செயற்கை நடவடிக்கைகள்) வேலைகளுடைய ஒரு திட்டத்திற்குக் கீழ்க்கண்ட விவரங்களை உபயோகித்துப் பெரிதும் உகந்த செலவு—காலவரைக்கான வளை கோட்டினைத் தீர்மானிக்கவும். அதிலிருந்து 21 நாள்களில் திட்டம் நிறைவேறக் கூடியவாறு ஒவ்வொரு வேலைக்கு (செயலுக்கு)மான பெரிதும் உகந்த காலவரம்பினைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

வேலை	கால வரை (இயல்பான)	கால வரை (திடீர்) Crash	செலவு சரிவு Cost Slope
(1, 2)	10	7	5
(1, 3)	8	6	7
(2, 4)	6	6	∞
(3, 4)	5	3	8
(3, 5)	20	15	11
(4, 5)	9	4	8

11. வேறு பல முக்கியப் பிரச்சினைகள்

(Other Related Problems)

விசையியக்கத் திட்ட அமைப்பு

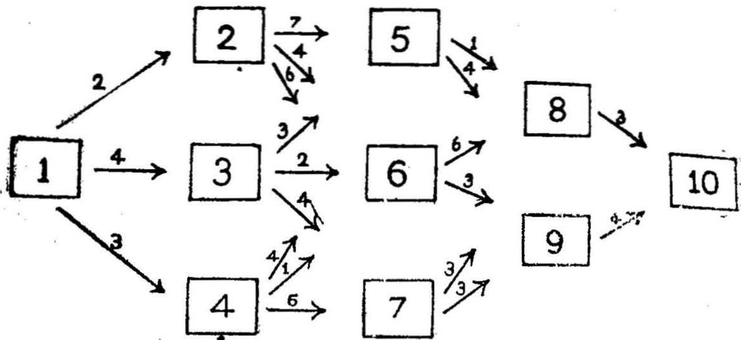
(Dynamic Programming)

இடையுறவான முடிவுகள் மேற்கொள்ளப்படும் ஒரு வரிசைத் தொகுதியைக் கொண்ட ஒரு முடிவு பிரச்சினையில் (decision problem) பெரிதும் உகந்த செயல்திற நுட்பங்களைக் (optimal policies) கணிக்கக் கூடிய ஒரு முறையை விசை இயக்கத் திட்ட அமைப்பு முறை என வழங்குகிறோம். ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் கீழே விளக்க இருக்கும் இத்தகைய பிரச்சினைகளின் தொகுதியை வரிசை முறையான முடிவுப் பிரச்சினைகள் (Sequential Decision Problems) என்றும், பல கட்ட முடிவுகள் ஆய்வு (Multi-stage Decision Analysis) அல்லது விசை இயக்க உத்தமமான பிரச்சினைகள் (Dynamic Optimisation Problems) என்றும் பல விதங்களில் கூறலாம். சரக்குத் தேக்கம், பட்டியல் பிரச்சினைகள், இட ஒதுக்கீடு, பதில் அமர்த்தீடு பிரச்சினைகள் போன்றவற்றுக்கு இந்த விசை இயக்கத் திட்ட அமைப்பின் மூலமும் செயல் முறைத் தீர்வு காண முடியும். இத்தகைய பிரச்சினைகளுக்கு அடிப்படைக் குணாதிசயம் என்னவென்றால், முடிவுகள் வரிசை முறையில் கண்டு பிடிக்கப்படுவதேயாகும்.

விசை இயக்கத் திட்ட முறையில் ஒரு பிரச்சினைக்கு முடிவு காணும்போது "பல கட்டங்கள் முடிவு" அல்லது "கூறுக்கச் சிதைவு" (decomposition) செய்வது ஒரு முக்கியக் கொள்கை ஆகும். எனவே, ஒரு பிரச்சினையானது விசையியக்கத் திட்ட முறையில் அணுகப்படும்போது, விசையியக்கத் திட்டப் பிரச்சினையின் பொது அமைப்பு முறையைப் பற்றிய கூர்மதியும் உள் நோக்குத் திறனும் (ingenuity and insight) தேவைப்படுகிறது. விசையியக்க முறை பயன்படுத்தப்படும் குறிப்பிடப் பட்ட சில பிரச்சினைகளை முறைமைப்படுத்த இத்தகைய கருத்து உபயோகப்படுகிறது.

இந்த வரிசை முறைத் தீர்வுப் பிரச்சினைகளின் கருத்தினையும், அப்பிரச்சினைகளை முடிவு காண விசையியக்கத் திட்ட உத்தி முறைகளின் உபயோகத்தையும் விளக்குவதற்காக கீழ்க்கண்ட குறுக்கு மறுக்குக் கட்ட (net work) உதாரணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

நகர் 1-ல் உள்ள விற்பனையாளர் இடையில் அமைந்த 10 நகர்களுக்கு வியாபார நிமித்தம் கீழ்க்காணும் படத்தில் கண்ட வாறு செல்ல விரும்புகிறார் எனக் கொள்வோம்.



i நகரிலிருந்து j நகருக்குச் செல்ல ஆகும் பயணச் செலவு c_{ij} எனக் கீழ்க்கண்டவாறு ஆகிறது.

i \ j	2	3	4
1	2	4	3

i \ j	5	6	7
2	7	4	6
3	3	2	4
4	4	1	5

i \ j	8	9
5	1	4
6	6	3
7	3	3

i \ j	10
8	3
9	4

மீச்சிறு செலவுக்கான வழித்தடம் எது என்பதே நமது பிரச்சினையாகும். இஃது ஒரு குறிப்பிடத்தக்க வரிசை முறையில் முடிவு காணும் பிரச்சினை (typical sequential decision-making problem) ஆகும். நகர் 1-ல், விற்பனையாளர் அடுத்ததாக எந்த நகருக்குச் செல்வது என்று தீர்மானிக்கிறார். அதாவது நகர் 1-லிருந்து நகர் 2-க்குப் போவதா அல்லது 3 அல்லது 4-க் குப் போவதா என்ற முடிவை எடுக்கவேண்டும். இதை ஒரு

"முதல் கட்ட முடிவு" (First stage Decision) என்று அழைக்கிறோம். இந்த முடிவின் காரணமாக அவர் 2, 3, 4 நகர்களில் ஏதாவது ஒன்றில் இருப்பார். அங்கு வந்த பிறகு அவர் இரண்டாவது கட்ட முடிவை (second stage Decision) மேற் கொள்ள வேண்டும். அதாவது 5, 6, 7 என்ற மூன்று நகர்களில் எங்காவது ஓரிடத்துக்குச் செல்ல வேண்டும். இந்த இரண்டாவது கட்ட முடிவு தற்சமயம் எந்த இடத்தில் உண்மையாக உள்ளார் என்பதைப் பொறுத்தவாறு அமையும். அதே போல மற்ற முடிவு கட்டங்களும் கண்டு உணரப்படுகின்றன. ஆகவே, இங்கு இந்தப் பிரச்சினையானது ஒரு நான்கு கட்ட வரிசை முறை முடிவுப் பிரச்சினையாகிறது. இவை யாவும் சார்பற்ற முடிவுகள் அல்ல என்பதும் தெரிகிறது.

ஒவ்வொரு அடுத்தடுத்த கட்டத்துக்குமான சிறந்த முடிவானது எல்லா கட்டங்களையும் உள்ளிட்ட சிறந்த முடிவினைத் தராது என்பதை நாம் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும். ஒவ்வொரு அடுத்தடுத்த கட்டத்தின் மூலமாகக் கிடைக்கும் முடிவினையும் சார்ந்தவாறு ஒரு திறமையான முடிவு (strategy) மொத்தத்தில் மிகக் குறைந்த பயணச் செலவுடன் கூடியதாக இருந்தால், அம் முடிவைச் சிறந்ததாக நாம் கருதலாம். இங்கு $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ என்ற வழித்தடம் 13 ரூபாய் மொத்த செலவினை உடையதாய் உள்ளது. ஒரு கட்டத்தில் கொஞ்சம் விட்டுக் கொடுத்தால் அதற்குப் பின்னர் வேறு சமயத்தில் அதிக அளவு சேமிப்புக் கிடைப்பதாக இருக்கலாம். உதாரணமாக, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ வழித்தடம் மொத்த முடிவைப் பொறுத்தவரை $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$ வழித்தடத்தைவிட மலிவான (செலவு குறைந்த) வழித்தடமாகிறது.

{ ஏனெனில் $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$-க்கான செலவு

$$= 3 + 1 = \text{ரூ. } 4$$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$-க்கான செலவு

$$= 2 + 4 = \text{ரூ. } 6$$

மொத்தத்தில் $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$-ன் செலவு

$$= 3 + 1 + 3 + 4 = \text{ரூ. } 11$$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$-ன் செலவு

$$= 2 + 4 + 3 + 4 = \text{ரூ. } 13$$ }

கடைசி முடிவு கட்டத்தைக் கட்டம் எண் 1 என்று (பின்னிருந்து முன்னாக) குறிக்கிறோம். விற்பனையாளர் நகர் 8 அல்லது

9-ல் இருக்கும்போது இந்நிலை ஏற்படுகிறது. எண் n-ல் ஏற்படும் முடிவை X_n என்று கொள்வோம். $n = 1, 2, 3, 4$ ஆகும். எனவே, $X_2^{*} = 8$ என்றால் கட்டம் 2-ல் நகர் (நிலை) 8-க்குப் போவது என்பது முடிவு ஆகும். s நிலையில் (நகரில்) விற்பனையாளர் இருப்பதாகவும், இந்த கட்டத்தில் X_n என்பது சேருமிடம் என்பதாகவும் (அதாவது அடுத்தபடியாக சேருமிடம் X_n என்று தேர்ந்தெடுக்கிறார் என்பதாகவும்) கொள்க.

$f_n(s, X_n)$ = கடைசி n கட்டங்களுக்கேற்ற மொத்த சிறந்த செயல்திற நுட்பத்துக்கு ஆகும் மொத்தச் செலவு.

s, n இவை தரப்பட்டிருந்தால், $f_n(s, x_n)$ மதிப்பை மீச்சிறுமமாக்கும் x_n-ன் மதிப்பை x_n^{*} எனவும், $f_n(s, x_n)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பை $f_n^{*}(s)$ எனவும் அழைப்போம்.

எனவே, $f_n^{*}(s) = \underset{x_n}{\text{மீச்சிறு}} \{ f_n(s, x_n) \}$

உதாரணமாக $f_2^{*}(5) = \text{மீச்சிறு} \{ f_2(5, 8), f_2(5, 9) \}$

$$= \underset{x_2 = 8, 9}{\text{மீச்சிறு}} \{ f_2(5, x_2) \}$$

விற்பனையாளர் ஒரே ஒரு கட்டம் தான் போக வேண்டியுள்ளது என்ற சமயத்தில், அவரது வழித்தடம் கடைசிச் சேருமிடத்தினால் முழுமையாலுமே தீர்மானிக்கப்படுகிறது. ஆகவே, இந்த ஒரு கட்ட பிரச்சனைக்கான உடன்முடிவு (immediate solution) கீழே தரப்பட்டது போல் அமைகிறது.

s	$f_1^{*}(s)$	x_1^{*}
8	3	10
9	4	10

இப்போது விற்பனையாளர் இன்னும் இரண்டு கட்டங்களைக் கடக்க வேண்டியுள்ளது எனக் கொள்வோம். உதாரணமாக அவர் நிலை 5-ல் (நகர் 5-ல்) இருப்பதாகக் கொள்வோம். முறையே ரூ. 1, ரூ. 4 செலவுகளுடன் கூடிய நிலை 8ஐயோ அல்லது நிலை 9ஐயோ அவர் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அவர் 8ஆவது நிலை

யைத் தேர்ந்தெடுத்தால் அந்த நிலையை அடைந்த பிறகு ஆகும் மிகக் குறைந்த கூடுதல் செலவு ரூ 3 என்று அட்டவணை மூலம் அறிகிறோம். எனவே இந்த முடிவிற்கான மொத்த செலவு $1+3=$ரூ. 4 ஆகிறது. இதே போல் அவர் நிலை-9 ஐத் தேர்ந்தெடுத்தால் மொத்தச் செலவு $f_2^*(5) = 4$ என்பதால் $x_2^* = 8$ ஆகிறது. எனவே அவர் நிலை-8ஐத் தேர்ந்தெடுக்கின்றார்.

அதாவது $f_2^*(5, x_2) =$ மீச்சிறு $\{f_2(5, 8), f_2(5, 9)\}$

$f_2(5,8)=$நகர் 5 லிருந்து நகர் 8-க்குச் செல்லும் பயணச் செலவு C_{58} + நகர் 8-லிருந்து நகர் 10-க்குச் செல்ல ஆகும். மீச்சிறுஅதிகப்படி செலவு பின்னால் கூறப்பட்ட செலவு $= f_1^*(8)$

$$\therefore \quad f_2(5, 8) = C_{58} + f_1^*(8) = 1 + 3 = 4$$

$$f_2(5, 9) = C_{59} + f_1^*(9) = 4 + 4 = 8$$

பொதுவாக கட்டம் 2-ல், நிலை 5-ல் நமது முடிவு X_2 என்றால்,

$$f_2(5, X_2) = C_{5X_2} + f_1^*(X_2)$$

$$f_2^*(5) = \text{மீச்சிறு } \{C_{5X_2} + f_1^*(X_2)\}$$

[இங்கு மீச்சிறுமம் X_2-ன் எல்லாவித நிகழக்கூடிய மதிப்புகள். அதாவது இங்கு மதிப்புகள் 8, 9 என்பன.]

i.e. $f_2^*(5) =$ மீச்சிறு $\{4, 8\} = 4.$

இதேபோல், $f_2^*(6)$, $f_2^*(7)$ மதிப்புகளையும் கீழ்க்கண்டவாறு கணிக்கலாம்:

H_2 / s	$f_2(s, X_2) = C_{sX_2} + f_1^*(s)$		$f_2^*(s)$	X_2^*
	8	8		
5	4	9	4	8
6	9	7	7	9
7	6	7	6	8

இதேபோல், மூன்றுகட்டப்பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணலாம்.

இங்கு, $f_3(s, X_3) = C_{sX_3} = f_2^*(X_3)$

உதாரணமாக, விற்பனையாளர் நிலை 2-லிருந்து அடுத்த படியாக நிலை 5-க்குப் போக விரும்பினால், மீச்சிறு மொத்தச் செலவு f_3 (2, 5)

என்றால்,

$$f_3(2, 5) = C_{25} + f_2^*(5)$$

= கட்டம் 1-ன் செலவு + நிலை 5-லிருந்து தொடர்வதற்கான மிகக் குறைந்த செலவு

$$= 7 + 4 = 11$$

இதைப்போலவே,

$$f_3(2, 6) = 4 + 7 = 11$$
$$\{ C_{26} + f_2^*(6) = 4 + 7 = 11 \}$$
$$f_3(2, 7) = 6 + 6 = 12$$

$\therefore \quad f_3^*(2) =$ மீச்சிறு $\{ f_3(2, 5), f_3(2, 6), f_3(2, 7) \}$

= மீச்சிறு $\{ 11, 11, 12 \}$

$$= 11$$

எனவே உடன் அடுத்த சேருமிடம் (immediate destination) $X_3^* = 5$ அல்லது 6 ஆகும்.

எனவே, மூன்றுகட்ட பிரச்சினைக்கான முழு முடிவுகள் கீழ்கண்டவாறு அமைகின்றன :

X_3 \ s	$f_3(s, X_2) = C_{sx3} + f_2^*(X_3)$			$f_3^*(s)$	X_3^*
	5	6	7		
2	11	11	12	11	5 அல்லது 6
3	7	9	10	7	5
4	8	8	11	8	5 அல்லது 6

நான்காவது கட்டமாகப் பெரிதும் உகந்த செயல்திற நுட்பத்தின் செலவு, உடனடுத்த சேருமிடம் தரப்பட்ட போது, இந்தக் கட்டத்திற்கான செலவு+அதற்குப்பின்னர் ஆகும் மீச்சிறு செலவு ஆகிறது.

X_4	$f_4(s, X_4) = C_{sX_4} + f_3^*(X_4)$			$f_4^*(s)$	X_4^*
s	2	3	4		
1	13	11	11	11	3 அல்லது 4

இப்பொழுது பெரிதும் உகந்த தீர்வினை எழுத முடியும் விற்பனையாளர் ஆரம்பத்தில் நகர் 3 அல்லது 4-க்குச் செல்ல வேண்டும். அவர் நகர் 3-க்குப் போனால், அடுத்த வழித்தடம் நகர் 5 ஆகும், பிறகு 8, பிறகு 10 ஆகும். எனவே, பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வு $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$. அவர் நகர் 1-லிருந்து நகர் 4-க்குப் போனால் கிடைக்கும் இரண்டு விதமான பெரிதும் உகந்த வழித்தடங்கள்.

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10$$

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$$

பெரிதும் உகந்த வழித்தடங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ரூ. 11 செலவாகிறது.

$\therefore \; f_4^*(1) = 11$ என அறிகிறோம்.

மேற்கூறிய தீர்வுப் பிரச்சினையில், f_n^*, f_{n-1}^* இரு சார்பலன்களின் இடையே உள்ள பொது உறவைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$f_n^*(s) = \underset{X_n}{\text{மீச்சிறு}} \; \{ C_s X_n + f_{n-1}^*(X_n) \}$$

இந்த இரண்டு தொடர்ச்சியான கட்டங்களின் மறு தடர்வுத் தொடர்பு (recurrence relation) ஒரு பிரச்சினையை விசையியக்கத் திட்ட அமைப்பில் முறைப் படுத்தும்போது முக்கியப் பங்கு ஆற்றுகிறது.

மேற்படி பிரச்சினைக்கான சிறந்த வழித்தடங்கள் ஒரு மிக முக்கிய வினைவைத் தருகின்றது. எந்த நகரிலிருந்தும் அதாவது நகர் 5-லிருந்து 10 வரையான சிறந்த வழித்தடம், நகர் 5-க்கு எந்த முறையில் வந்திருந்தபோதும், ஒரே மாதிரியாக உள்ளது. அதாவது, ஒரு கட்டத்தில் பெரிதும் உகந்த ஒரு முடிவானது, முடிவு செய்யும் காலத்தில் எந்த நிலையில் உள்ளதோ அதை மட்டுமே சார்ந்து உள்ளது. அந்த நிலைக்கு வருவதற்கு முன்னிருந்த நிலைகளைச் சாராமலும் உள்ளது. இந்தத் தத்துவம் பெரிதும் உகந்த தத்துவமாகும். 'பெல்மேனின்' (Bellman)

பெரிதும் உகந்த கொள்கையானது "ஆரம்ப கட்டமும் முடிவும் எப்படி இருப்பினும், எஞ்சியுள்ள மற்ற முடிவுகள் முதல் முடிவிலிருந்து விளைந்த நிலைக்குச் சார்ந்ததொரு பெரிதும் உகந்த கொள்கையைக் கொண்டிருக்கும்."

ஒரு வரிசை முறை முடிவுப் பிரச்சினையில் "நிலைகளையும்" (states) இக் கொள்கைக்கு ஏற்ப நாம் வரையறுக்க முடியுமானால் ஒரு விசையியக்கத் திட்ட அமைப்பு முறையை நாம் இங்கு உபயோகப்படுத்த முடியும்.

விசையியக்கத் திட்ட அமைப்புப் பிரச்சினைகளின் குணப் பண்புகள்

1. ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் தேவையான ஒரு முடிவுக்கேற்றவாறு பிரச்சினையைப் பல கட்டங்களாகப் பிரித்துக்கொள்ள வேண்டும். முன் உதாரணத்தில், 4 கட்டங்கள் இருந்தன; அந்தக் கட்டத்தின் முடிவானது, அக் கட்டத்திற்கான சேருமிடம் ஆகும்.

2. ஒவ்வொரு கட்டமும் பல நிலைகளைக் கொண்டுள்ளது. முன் உதாரணத்தில் கட்டம் 2 ஆனது, நிலைகளை 5, 6, 7 (நகரங்களைக்) கொண்டது ஆகும். நிலைகள் எண்ணிக்கை ஒரு முடிவானதாகவோ அல்லது முடிவற்றதாகவோ இருக்கலாம்.

3. ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் செய்யப்படும் முடிவின் பலன், தற்போதைய நிலையை அடுத்த கட்டத்துக்கு உரிய ஒரு நிலைக்கு மாற்றுவதாகும். (ஒரு நிகழ்தகவுப் பரவலைச் சார்ந்தும் இருக்கலாம்). விற்பனையாளரின் அடுத்த சேருமிடத்துக்கான முடிவு அவரது தற்போதைய நிலையிலிருந்து பயணத்தின் அடுத்த நிலைக்கு, அவரைக் கொண்டு செல்கிறது.

4. தற்போதைய நிலை தரப்பட்டால் எஞ்சிய கட்டங்களுக்கான ஒரு சிறந்த கொள்கை, முந்தைய கட்டங்களில் மேற்கொள்ளப்பட்ட கொள்கையைச் சாராமல் உள்ளது. நம் உதாரணத்தில் விற்பனையாளரின் தற்போதைய நிலை தெரிந்தால் அந்த நிலைக்கு மேலிருந்து கிடைக்கும் ஒரு பெரிதும் உகந்த கொள்கையானது. அந்த நிலைக்கு எவ்வாறு வந்தார் என்பதைச் சாராது அமையும்.

5. தீர்வு முறையானது கடைசி கட்டத்தின் ஒவ்வொரு நிலைக்குமான பெரிதும் உகந்ததொரு கொள்கையைக் கண்டுபிடிப்பதில் ஆரம்பிக்கிறது.

6. $(n-1)$ கட்டங்கள் எஞ்சி இருக்கையில் ஒவ்வொரு நிலைக்குமான பெரிதும் உகந்த கொள்கை தரப்பட்டிருந்தால், n கட்டங்கள் எஞ்சி இருக்கையில் ஒவ்வொரு நிலைக்குமான பெரிதும் உகந்த கொள்கையைத் தீர்மானிக்கக்கூடிய ஒரு மறு தரவுத் தொடர்பு கிடைக்கிறது. இந்த மறுதரவுத் தொடர்பினைப் பயன்படுத்தித் தீர்வுப் பிரச்சினை ஒவ்வொரு கட்டமாகப் பின்னோக்கி நகர்கிறது; ஒவ்வொரு தடவையும் அந்த கட்டத்தின் ஒவ்வொரு நிலையிலும் பெரிதும் உகந்த கொள்கையைக் கண்டு பிடிக்கிறது; ஆரம்ப கட்டத்தின் தொடக்கத்தில் அஃது ஒரு பெரிதும் உகந்த கொள்கையைக் கண்டு பிடிக்கும் வரையில் பின்னோக்கி நகர்ந்துகொண்டே இருக்கும்.

எல்லா D. P. பிரச்சினைக்களுக்கும், ஒவ்வொரு ($n=1, 2, \ldots N$ என்ற) கட்டத்துக்குமான கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை அமைக்கலாம் :

s	$f_n^*(s)$	X_n^*
...	...	...
...	...	...
...	...	...

ஆரம்ப கட்டத்துக்கான ($n = N$-க்கான) அட்டவணையைக் கடைசியாக வரையும்போது பிரச்சினைக்குத் தீர்வு கிடைத்து விடுகிறது.

பொதுத்தீர்வு முறைகள்

பிரச்சினையில் n கட்டங்கள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். கட்டங்களைப் பின்னோக்கி எண்ணுதல் குறிப்போம். மேலும், ஒரே ஒரு முடிவுதான் செய்யப்பட வேண்டுமென்ற கடைசிக் கட்டத்தைக் கட்டம் 1 என்று குறிப்போம்.

(a) கடைசிக் கட்டத்தின் ஒவ்வொரு s நிலைக்குமான பெரிதும் உகந்த கொள்கையைக் கண்டுபிடி. அதாவது $f_1(s, X_1)$ மதிப்பை மீப்பெருமமாக்கும் (மீச்சிறுமமாக்கும்) X_1-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி. அந்த X_1ஐ X_1^* என்று குறிப்பிடு. இத்தகைய கடைசிக் கட்டத்தின் இத்தகைய எல்லா நிலைகளுக்கும் பின்கண்டவாறு அட்டவணை தயார் செய் :

s	$f_1^*(s)$	$X_1^*(s)$

கீழ்க்கண்ட ஒரு மறு தரவு தொடர்பினைக் கண்டுபிடி.

(b) $f_R^*(s) =$ மீப்பெரு/மீச்சிறு $[f_k(s, X_k)]$

X_k

இங்கு $f_k(s, X_k) = r(s, X_2) + [g(s, X_k)]$

$r(s, X_k), g(s, X_k)$ இவை தெரிந்த சார்பலன்கள் என்னும் போது $f^*_k(s)$ வரையறுக்கப்படுகிறது. $r(s, X_k)$ பொதுவாக உடனடி மீட்சியைக் (immediate return) குறிக்கிறது.

கட்டம் k-ல், நிலை s-ல் முடிவு X_2 என்ருல், கட்டம் $(k-1)$-ல் உள்ள நிலை $g(s, X_k)$ ஆகும்.

மேலேகண்ட மறுதரவினைப் பயன்படுத்தி, எல்லா s-களுக்கும் $f^*_{k-1}(s)$ தரப்பட்டிருந்தால், எல்லா (s)-களுக்கும் $f_k(s)$ கண்டுபிடி.

இதற்கு, தரப்பட்ட s, X_k மதிப்புகளுக்கு $r(s, X_k)$, $g(s, X_k)$ மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி. இப்போது $f_{k-1}^*\{g(s, X_k)\}$ ஐயும் கணிக்கவும். எல்லா x_kகளுக்கும் இந்தக் கூட்டலைக் கண்டுபிடித்தால் $f_k(s, X_k)$ஐ மீப்பெருமப்படுத்தும் (மீச்சிறுமப்படுத்தும்) $X_k^*(s$, மதிப்பைக் கண்டு உணரலாம். $f^*_k(s)$ என்பது தான் இந்த மீப்பெரு (மீச்சிறு) மதிப்பு ஆகும். ஆகவே, கட்டம் k-ன் எல்லா வித s நிலைகளுக்கும் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

s	$f_k^*(s)$	$X_k^*(s)$

(c) (a) முறையின்மூலம் எல்லா s-களுக்கும் $f_1^*(s)$ தெரிந்துள்ளதால், (b)-ல் குறிப்பிட்ட வழிமுறைகளினுல் எல்லா s-களுக்கும் $f_2^*(s)$ கண்டுபிடிக்கமுடியும். இதேபோல $f_3^*(s), \ldots\ldots, f_k^*(s$

மதிப்புகள் எல்லா s களுக்கும் குறிப்பாக ஆரம்ப நிலை 'a' க்கும் கண்டு பிடிக்கப்படுகிறது. $f_n^*(a)$ ஒரு பெரிதும் உகந்த மீட்சி மதிப்பைத் தருகிறது.

விசையியக்கத் திட்ட முறைகளைப் பயன்படுத்தும் துறைகள் பலப்பல; இதற்கான நீண்டதொரு பட்டியலே தயார் செய்யக் கூடிய அளவுக்கு இதன் உபயோகம் உள்ளது. முன்னர் குறிப்பிட்டது போல, வாய்ப்பு வளங்களின் இடஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினைகள் ஒழுங்கு முறைத்திட்ட அமைப்பு, நம்பத்தக்க உருப்படிவங்கள், சரக்குத் தேக்கக்கட்டுப்பாடுகள், உற்பத்தி வரிசை முறை போன்ற பல துறைகளில் இந்த விசையியக்கத் திட்ட முறைகளைப் பயன்படுத்தி முடிவுகள் பெறப்படுகின்றன. இதில் காணப்படும் ஒரு நடைமுறைக் குறைபாடு யாதெனில் இடையே காணப்படும் நிறைய அளவு விவரங்களைச் சேமித்து வைத்தலேயாகும்.

நேர்கோடற்ற திட்ட அமைப்பு
(Non-linear Programming)

அறிமுகம்

கணிதத் திட்ட அமைப்புப் பிரச்சினையைக் கீழ்க்கண்டவாறு குறிக்கலாம் :

$f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ என்ற சார்பலனை,

$g_1(X_1, \ldots X_n) < 0$

$g_2(X_1, \ldots X_n) < 0$

$g_m(X_1, \ldots X_n) < 0$

என்ற m கட்டுப்பாடுகளுக்கேற்றவாறு மீப்பெருமமாக்கும் $(X_1, \ldots X_n)$ என்ற n மாறிகளுக்கு மதிப்பைக் கண்டு அறிய வேண்டும். f, g_i என்ற எல்லா சார்பலன்களும், ஒரு படித்தானவை (நேர்கோட்டுக்குரியவை) என்றால், இத்தகைய பிரச்சினையை நேர்கோட்டுத் திட்ட அமைப்பு முறையில் நாம் முன்பே விளக்கியுள்ளோம். எந்த ஒரு g_i கட்டுப்பாட்டுச் சார்பலனோ அல்லது கொள்குறிச் சார்பலனோ (f), நேர்கோட்டுத் தன்மையற்றதாக இருந்தால், சிம்ப்ளக்ஸ் உத்தி முறையை நேரடியாகப் பயன்படுத்த முடியாது. செயல்முறை ஆராய்ச்சியின் நடைமுறைப் பயன்பாடுகளில் (practical application) நேர்கோடற்ற தன்மையைப் (non-linearity) பல இடங்களில் காணலாம். இவற்றில் சில நேர்கோடற்ற தன்மைகளைச் சிம்ப்

ளக்ஸ் முறையின் திருத்தமைவுகளின் (modifications) மூலம் மேற்கொள்ளமுடியும். மற்றவற்றை முற்றிலும் புதிய செய்தது—செய்தல் உத்தி முறைகளின்மூலம் மேற்கொள்ளலாம். இத்தகைய முறையானது மிகவும் சிக்கலானதால் இந்த உத்திகளுக்கான சில சாராம்சக் கருத்துகளை மட்டும் சிறிது விளக்குவோம்.

முழு எண் திட்ட அமைப்பு (Integer Programming)

சில அல்லது எல்லா மாறிகளின் தீர்வு மதிப்புக்களும் முழு எண்களாக அமையவேண்டிய கட்டுப்பாடு சில உண்மைப் பிரச்சினைகளில் தோன்றும்போது, நேர்கோட்டுத் திட்ட அமைப்பு முறை தோல்வியடைகிறது. போக்குவரத்துப் பிரச்சினையும், பங்கீட்டுப் பிரச்சினையும் எவ்வாறு இத்தகைய விதத்தினைச் சேர்ந்தவை என்று நாம் முன்னரே பார்த்தோம். சில சமயங்களில், ஒரு முழு எண் திட்ட அமைப்புப் பிரச்சினைக்கு, முழு எண் கட்டுப்பாடுகளை நீக்கி, பிறகு சிம்ப்ளக்ஸ் உத்தி முறையில் கிடைத்த தீர்வினை ஏறத்தாழப் பயனெளிமையுடைய

முழு எண் தீர்வு கிடைக்குமாறு திருத்தி, தோராயத் தீர்வைக் காண்கிறோம். இருந்தாலும், இந்தத் தோராயம் எப்போதும் சிறந்ததாக இருக்கமுடியாது.

ஒரு நேர்கோட்டுத் திட்ட அமைப்பு உருப்படிவத்தில் (LP மாடல்) X_1, X_2 இரு முடிவு மாறிகளைக் கொண்ட கட்டுப்பாடு வெளி (constraint space) *OABC* எனக் கொள்வோம்.

"$Z = 10$" என்ற கோடு 10 மதிப்புடைய ஒரு கொள்குறிச் சார்பலனைக் குறிக்கட்டும் X_1. X_2 இரண்டின் மதிப்புக்களும் முழு எண் மதிப்புக்களாக இருக்கவேண்டும். நமக்கு 7 பய னெளிமையுடைய முழு எண் தீர்வுகள் இருப்பதையும் அவற்றுள் C (0,2) தீர்வானது பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வாக உள்ளது என்பதையும் காண்கிறோம்.

இப்போது முழு எண் கட்டுப்பாடுகளை நீக்கிவிட்டு எஞ்சி யுள்ள LP பிரச்சினைக்குத் (Linear Programming) தீர்வு காண்ப தாகக் கொள்வோம். இங்குத் தீர்வு காணும் X_1. X_2 மாறிகளின் மதிப்புகள் முழு எண்களாக இருப்பின் நாம் முழு எண் திட்ட அமைப்புப் பிரச்சினைக்கான தீர்வினையும் கண்டுவிட்டதாகக் கொள்வோம். நம் உதாரணத்தில் *B* பெரிதும் உகந்த ஒரு உச்சி (நேர்கோட்டமைப்பிற்கு); ஆனால் இதன் மதிப்பு முழு எண் மதிப்பாக இல்லாததால் இந்தத் தீர்வு முழு எண் திட்ட அமைப்புத் தீர்வாகாது. எனவே, நமது செயல்திறனானது, முழு எண் இல்லாத பயனெளிமைத் தீர்வுகளை (பெரிதும் உகந்த தீர்வையும் சேர்த்து) மட்டுமே எடுத்துக்கொண்ட ஒரு பகுதியைக் கட்டுப்பாட்டு வெளியினின்றும் "வெட்டி" (cut) நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டத்தை மாற்றியமைப்பதாகும். புதிய கட்டுப் பாட்டை(கட்டுப்பாடுகளை)க் குறித்தவாறு இந்த 'வெட்டுதல்' செய்யப்படுகிறது. எந்த புதிய கட்டுப்பாடுகளைச் சேர்க்க வேண்டும் என்று முழு எண் திட்ட அமைப்பு முறை நமக்குத் துல்யமாக விளங்குகிறது.

இங்குப் புதிய கட்டுப்பாடு வெளி *OCDEA*-யைக் கொண்ட தொரு கட்டுப்பாட்டை (படத்தில் "cut $\neq$ 1" என்றவாறு குறித்து வரைந்தால்) நமது உதாரணத்தில் சேர்க்கின்றோம். இத்தகைய LP பிரச்சினைக்குத் தீர்வு *D* புள்ளியில் அமைகிறது; ஆனால், அது திரும்பவும் முழு எண் நிபந்தனைகளை ஒட்டி அமையாதிருப்பதைப் பார்க்கின்றோம்.

எனவே, D ஐயும் மற்ற முழு எண் அல்லாத தீர்வுகளையும் விலக்குவதற்காக மற்றொரு கட்டுப்பாடினைச் சேர்க்கிறோம். $OCEA$ என்ற புதிய பயனெளிமைப் பகுதிக்கேற்றவாறு C, E புள்ளிகளைச் சேர்த்த ஒரு கோடு இங்கு அந்தக் கட்டுப்பாடு ஆகிறது. இந்த LP பிரச்சினைக்குத் தீர்வு, X_1, X_2 இரண்டும் முழு எண்களாக இருக்கக்கூடிய C புள்ளியில் அமைகிறது. எனவே, C புள்ளியானது முழு எண் திட்ட அமைப்புப் பிரச்சினைக்குமான தீர்வாகிறது.

பொதுவாக, ஒவ்வொரு படியிலும் (every step) எல்லா மூல முதலான முழு மதிப்புப் பயனெளிமைத் தீர்வுகளையும் தக்க வைத்துக்கொண்டு, முழு எண் அல்லாத பலப்பல தீர்வு மதிப்புக்களை விலக்கிப் புதிய கட்டுப்பாடுகளைச் சேர்க்கின்றோம் இந்த முறையை LP பிரச்சினையின் தீர்வானது முழு எண்களை முழுதுமாகக் கொண்டிருக்கும்வரை, மேற்கொள்ளுகிறோம்.

LP பிரச்சினைகளில், முழு எண் நிபந்தனையானது, பங்கீட்டுப் பிரச்சினைகளில் காணப்படுவதுபோலவே இயல்பாக அமையலாம். "நிலைத்த விலை" (fixed charge) பிரச்சினையிலும் இந்த முழு எண் கட்டுப்பாடு காணப்படுகிறது. இங்கு X_i மட்டத்தில் (level) i நடவடிக்கைக்கான செலவு

$$= C_i X_i + k_1, \qquad X_i > 0$$
$$= 0 \qquad \text{மற்ற இடங்களில்,}$$

(k_1 என்பது நிலைத்த விலையாகும்).

இரு விசைப்படித் திட்ட அமைப்பு
(Quadratic Programming)

மீப்பெருமப்படுத்தப்படும் கொள்குறிச் சார்பலன் f நேர் கோட்டுக்கு உரியதல்லாமல் இரு வரிசைப்படி அமைந்திருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i=1}^{n} c_1\, x_i$$

இங்கு $d_{ij} = d_{ji}$ ஆகும்.

அனுபவ ரீதியான புள்ளி விவரங்களுக்கு இரண்டு விசைப்படி வளைகோட்டைப் பொருத்துகையில் இத்தகைய ஓர் இரு விசைப்படிக் கொள்குறிச் சார்பலன் கிடைக்கிறது.

(i) எல்லாக் கட்டுப்பாடுகளும் நேர் கோட்டுத் தன்மை யுடையனவையாக இருக்கும் போதும்

(ii) $f(x_1, .. x_n)$ ஒரு குழிவான சார்பலன் என்பதற்கான சில நிபந்தனைகளை d_{ij} மாறிலிகள் பூர்த்தி செய்யும் போதும் இந்த இரு விசைப்படித் திட்டப் பிரச்சினையை மேற்கொள்ளுவதற்குச் சிம்ப்ளக்ஸ் உத்தி முறையில் சில எளிதான மாற்றங்களைச் செய்ய வேண்டியதாகிறது.

இச்சமயத்தில் இரு விசைப்படித் திட்டப் பிரச்சினை கீழ்க் கண்டவாறு குறிக்கப்படுகிறது;

(i) $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \ldots x_n \geqslant 0$ என்றும்

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots m$ என்றும் தரப்பட்டிருந்

தால் $f(x_1, .. x_n)$ஐ மீப்பெருமப்படுத்துக." மேற்படி பிரச்சினைக் கான தீர்வினை, கீழ்க்கண்ட LP பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணும் வகையில், கண்டறியலாம்.

(i) $x_j \geqslant 0,\ y_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots (n + m)$ என்றும்

(ii) $z_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots n$ என்றும் தரப்பட்டு

(iii) $\sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, x_k + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, y_{n+i} - y_j + c_j\, z_j = c_j,\ j = 1, 2, \ldots n$

(iv) $\Sigma\, a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, 2, \ \ldots\ m$ என்றும் தரப் பட்டு, மேலும் நேர் கோடற்ற அதிகப்படியான கட்டுப்பாடுகள் $x_j\, y_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots (n + m)$ என்றும் தரப்பட்டிருந்தால்,

$\sum_{j=1}^{n} z_j$ ஐ மீச்சிறுமமாக்கு."

குறைந்த பட்சம் ஒரு x_j யோ அல்லது y_i யோ பூச்சியமாக இருக்கக்கூடிய அடிப்படைத் தீர்வுகளை மட்டுமே கொண்டவாறு சிம்ப்ளக்ஸ் உத்தி முறையில் இந்த நேர்கோடு அற்ற கட்டுப் பாடுகள் இடம் பெறுகின்றன.

இருமைப் பிரச்சினைகள்
அல்லது
இரட்டைத் தன்மைப் பிரச்சினைகள்

(Duality problems)

ஒவ்வொரு நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டத்தையும் சார்ந்த ஒரு பெரிதும் உகந்த தன்மைக்கான பிரச்சினையை' இருமைப் பிரச்சினை' என வழங்குகிறோம். மூல முதல் பிரச்சினையை 'முதல் நிலைப் பிரச்சினை' (primal problem) என்கிறோம். இந்த இரண்டு பிரச்சினைகளிலும் எந்த ஒரு பிரச்சினையின் தீர்வும் மற்றப் பிரச்சினையின், பெரிதும் உகந்த தீர்வைப் பொறுத்த விவரங்களை விளக்கமாகக்காட்டுகிறது. மூலமுதல் பிரச்சினைக்கான (primal problem) ஆரம்ப சிம்ப்ளக்ஸ் பட்டியல் ஒரு $m \times m$ அலகுஅணி (unit matrix) யைக் கொண்டிருந்தால், இரண்டில் எந்தப் பிரச்சினையின் சிம்ப்ளக்ஸ் முறைத் தீர்வும் மற்றதொரு பிரச்சினையின் வெளிப்படைத் தீர்வைக்கொடுக்கிறது என்கிறோம்.

ஒரு நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டப் பிரச்சினையில் ஏதாவது ஒரு முறையில் பெரிதுமுகந்த தீர்வு ஒன்றினை நாம் அடைந்து விட்டதாக முதலில் கொள்வோம். மாறிகளில் ஏதாவது ஒன்றின் விலை சிறிது மாறுவதாகக் கொள்வோம். மீப் பெரும இலாபத்தில் சிறிதுமாற்றம் ஏற்பட்ட போதிலும், உற்பத்திசெய்ய வேண்டிய மீப்பெரும மதிப்புகள் மாருமல் அதே அளவில் இருக்க வாய்ப்பு உண்டு. நாம் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வை இப்போது எவ்விதம் சரிபார்க்கலாம் என்பதை விளக்குவோம்.

கீழ்க் கண்ட ஒரு நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டப்பிரச்சினையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$40x + 25y < 1000$$

$$35x + 28y < 980$$

$$25x + 35y < 875$$

$x > 0, y > 0$ என்றவாறு $Z = 1.2x + 1.4y$ ஐ மீப் பெருமமாக்கும் பிரச்சினையாகும்.

[$x = 16\frac{29}{31} > 0$; $y = 12\frac{28}{31} > 0$ என்றும் தீர்வைக் காண்கிறோம்.]

1. பூஜ்பமற்ற மாறிகளின் நிரல்களைக் கொண்டும், விளைவுகளை அதற்குத் தருந்த விலைக் கெழுக்களால் சமன்பாடு செய்தும், w_1, w_2, w_3 என்ற எடைகளுக்கான சமன்பாடுகளை வடிவாக்குகிறோம். தீர்வில் $x > 0$, $y > 0$ என்பதால், அந்த நிரல்களின் எடைக் கூட்டல்கள் (weighted sum), Z-ன் அவற்றின் கெழுக்களுக்கு சமமாக இருக்கும்.

அதாவது, $40w_1 + 35w_2 + 25w_3 = 1.2$

$$25w_1 + 28w_2 + 35w_3 = 1.4$$

2. நிபந்தனைகள் கண்டிப்பான சமநிலிகளாக இருக்கக் கூடிய அந்த எடைகளை மட்டும் பூச்சியமாக்கி விட்டு, எஞ்சியுள்ள எடைகளுக்குச், சமன்பாட்டுத் தீர்வு காண்கிறோம்.

உதாரணத்தில், $x.y$-ன் எண் தீர்வு மதிப்புகளை ($x=16{\cdot}73$, $y = 12.90$) நிபந்தனைகளில் சரிபார்த்தால், முதல், மூன்றும் மதிப்புகள் சரியாக உள்ளதெனவும், இரண்டாவது மட்டும் ஒரு கண்டிப்பான சமநிலி என்றும் காண்கிறோம். எனவே, $w_2 = 0$ என்பதால் w_1, w_3 க்குத் தீர்வு, கீழ்க்கண்டவாறு காண்கின்றோம்:

$$40w_1 + 25w_3 = 1{\cdot}2$$

$$25w_1 \times 35w_3 = 1{\cdot}4$$

தீர்வு

$$w_1 = 0{\cdot}0091; \quad w_3 = 0{\cdot}0335.$$

3. $Z_j - C_j$ நிரைக்குத் தவிர, ஒவ்வொரு நிரலிலும் (a_0 என்ற நிலையான திசையிலியைத் தவிர) உள்ள மதிப்புகளை அதற்குத் தக்க எடைகளால் பெருக்கிக்கூட்டவும். வந்த மதிப்பை மூல முதலான $Z_j - C_j$ நிறையிலுள்ள மதிப்புகளிலிருந்து கழித்து எழுதவும். தளர் மாறிகள் வகையில், '0'-லிருந்து கழிக்கவும்.

உதாரணத்தில்

a_1 நிரலுக்கு, $40(0{\cdot}0091) + 35(0) + 25(0{\cdot}0335) = 1{\cdot}2$

a_2 ,, $25(0{\cdot}0091) + 28(0) + 35(0{\cdot}0335) = 1{\cdot}4$

a_3 ,, $1(0{\cdot}0091) = 0{\cdot}0091$

a_4 ,, $1(0) = 0$

a_5 ,, $1(0{\cdot}0335) = 0{\cdot}0335$

இப்போது $>$ நிரை மதிப்புகளிலிருந்து கழித்தால்,

a_1 நிரலுக்கு, $1{\cdot}2 - 1{\cdot}2 = 0$

a_2 ,, $1{\cdot}4 - 1{\cdot}4 = 0$

a_3 ,, $0 - 0{\cdot}0091 = -0{\cdot}0091$

a_4 ,, $0 - 0 \qquad = 0$

a_5 ,, $0 - 0{\cdot}0235 = -0{\cdot}0335$

4. நமக்கு $\triangle$ நிறை இப்போது முழுமையாக கிடைக்கிறது. இங்கு எல்லா மதிப்புக்களும் >0 இல்லாதபோது, குறிப்பிட்ட தீர்வு சரிபார்க்கப்பட்டுவிட்டது ஆகிறது. உண்மையாகவே நமது உதாரணத்தில் $\triangle$ நிரையில் திருத்தப்பட்ட மதிப்புகள் >0 என்று இல்லாததால், தீர்வு சரி என்று தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

எடைகளை வேறு விதத்திலும் குறிப்பிடலாம்,

அந்த எடைகள் கிடைத்த பின்னர், அவற்றை மூல முதலான a_0-ல் உள்ள மதிப்புகளால் பெருக்கிக் கூட்டினல் Z-ன் பெரிதும் உகந்த மதிப்பைக் காணலாம்.

ஏனெனில் Z என்பது அதன் மூல முதல் மதிப்பு—

$Z =$ (மூலமுதல் மதிப்பு)—(a_0 நிரலை மாற்றப்பட்ட, மூலமுதல் நிரைகளின் எடைக் கூட்டல்)

(இங்கு கழிக்கப்படும் மதிப்புக்கள் எல்லாம் $= 0$).

நம் உதாரணத்தில்

$$Z = 1.2x + 1.4y - 0.0091\,(40x + 25y + u - 1000) - 0.0335\,(25x + 35y + w - 875)$$

$$= -\,0.0091u - 0.0335w + [0{\cdot}0091 \times 1000 + 0.0335 \times 875]$$

இந்த வடிவத்தில் கெழுக்கள் $= 0$ என்றே (x, y, u இங்கு)

அல்லது மாறிகள் $= 0$ மதிப்புகள் என்றே (இங்கு u, w) நாம் அறிகிறோம். எஞ்சியுள்ள உறுப்புக்கள் a_0 நிரலில், மதிப்புகளின் எடைக் கூட்டல்; எனவே எடைக் கூட்டல் $= Z$ மதிப்பு.

இப்போது நாம் எல்லா(இத்தகைய) எடைகளும் கீழ்க்கண்ட பண்புகளைப் பெற்றிருக்கும் எனக் காட்டுவோம்.

1. Z-ன் பயனெளிவான மதிப்புகள் ஏதும் a_0 நிரலின் எடைக் கூட்டலைவிட அதிகமாக இருக்காது.

2. ஏதாவது ஒரு a_0 நிரலின் எடைக் கூட்டலாவது Z-ன் பயனெளிவான மதிப்புக்குச் சமமாக இருந்தால் Z-ன் மீப்பெருமமதிப்பு கிடைக்கிறது; மேலும், எடைக் கூட்டல்களின் மீச்சிறும மதிப்பும் கிடைக்கிறது; மேலும் எடைக் கூட்டல்களின் மீச்சிறும மதிப்பும் கிடைக்கிறது.

எனவே, நமது உதாரணத்தில் கண்டுபிடித்த 'w' மாறிகள்

$$"40w_1 + 35w_2 + 25w_3 > 1.2$$

$$25w_1 + 28w_2 + 35w_3 > 1.4$$

$w_1 > 0, w_2 > 0, w_3 > 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டவாறு.

$Y = 1000w_1 + 980w_2 + 875w_3$ ஐ மீச்சிறுமமாக்குக." என்பதேயாகும்.

இப்போது மூல முதலான பொதுவான பிரச்சினையைக் கீழ்க்கண்டவாறு

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n < b_1 \\ a_2 x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n}x_n < b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n < b_m \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\text{எல்லா} \quad x_j > 0 \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு, $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ஐ மீப்பெருமமாக்குக.

இங்கு Y மாறியை வரையறுப்போம்.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m > C_1 \\ a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m > C_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m > C_n \end{array}\right\} \quad \dots (3)$$

$$w_1 > 0,\ w_2 \geqslant 0,\ \dots w_m \geqslant 0 \quad \dots (4)$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்றவாறு,

$Y = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$ ஐ வரையறுக்கிறோம்.

ஒரு பொதுவான மூல முதலான நேர்கோட்டு அமைப்புத் திட்டப் பிரச்சினையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} + \dots + a_{1n} x_n < b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leqslant b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n < b_m \end{array}\right\} \quad \dots (1)$$

$$x_1 \geqslant 0,\quad x_2 > 0,\ \dots\dots\dots,\ x_n > 0 \quad \dots (2)$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்கேற்றவாறு x_j-க்கள் இருந்தால்

$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$-ஐ மீப்பெருமப்படுத்துக ... (3)

இப்போது $w_1, w_2, \dots w_m$ என்ற மாறிகளை

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m > c_1 \\ a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m > c_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m > c_n \end{array}\right\} \quad \dots (4)$$

$$w_1 > 0,\quad w_2 > 0,\ \dots\dots\ w_m > 0 \quad \dots (5)$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்கேற்றவாறு y மாறியை கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

$$y = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m \quad \dots (6)$$

எல்லா $x_i \geqslant 0$ என்பதால், (4)-ன் அடுத்தடுத்த சமனிலிகளை $x_1, x_2 \ldots x_n$-ஆல் முறையே பெருக்கிக்கூட்டினால், பிறகு வரிசைக் கிரமமாக கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம்.

$$\begin{aligned} & w_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n) \\ & + w_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \ldots + a_{2n} x_n) \\ & + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & + w_m (a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n) \geqslant c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ & \qquad + \ldots + c_n x_n = Z \end{aligned}$$

ஆனால் (1)-ன் மூலம் நாம் அறிவது யாதெனில், மேலே அடைப்புக் குறிகளுக்குள் உள்ள ஒவ்வோர் அளவுகளும் முறையே $\leqslant b_1, b_2 \ldots b_m$ என்றவாறு இருக்கின்றன.

எனவே $w_1 b_1 + w_2 b_2 + \ldots w_m b_m$

$$\leqslant c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

அதாவது (1) முதல் (6) வரையான நிபந்தனைகளைத் திருப்திப்படுத்துகின்ற எல்லா $(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $(w_1, w_2, \ldots w_m)$ மதிப்புகளுக்கும் $y \geqslant z$ என்று ஆகிறது. ஆதலால் $y = z$ என்றவாறு ஒரு x-களின் தொகுதியையும் 'w'-களின் தொகுதியையும் நாம் கண்டு பிடித்தால், மீப்பெரும் Z-ம், மீச்சிறும Y-ம் நமக்குக் கிடைக்கிறது என்று அறிகிறோம்.

Yஆனது மீச்சிறும மதிப்பு இல்லையென்றால், மீச்சிறும் Yயானது ஏதாவது ஒரு Z-ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும்; ஆனால் அவ்வாறு இருக்க முடியாது. முடிவு தரவாக தரவு முடிவாக மாறிய விதிப்படியும் (conversly) இது உண்மையாகிறது.

Y-ஐ மீச்சிறுமப்படுத்தும் பிரச்சினையை ஒரு இருமைம பிரச்சினை அல்லது இரட்டைத் தன்மைப் பிரச்சின (Dual problem) என வழங்குகிறோம்.

Zஐ மீப்பெருமப்படுத்தும் பிரச்சினையை ஒரு முதல் நிலைப் பிரச்சினை (primal problem) என்று வழங்குகிறோம்.

ஒரு முதல் நிலைப் பிரச்சினையிலிருந்து ஓர் இருமைப் பிரச்சினையை எவ்வாறு அடையலாம் என்று நாம் கண்டோம். ஓர் இருமைப் பிரச்சினையிலிருந்தும், முதல்நிலைப் பிரச்சினையைப் பின்குறித்த காரணங்களின்படி எளிதாகத் தீர்வு காணலாம்.

(a) $a_{j1}w_1 + a_{2j2}w_2 + \ldots + a_{jm}w_m > c_j$ எல்லா j-க்களுக்கும் என்றால், $x_j = 0$ என்று இருக்கவேண்டும்.

(b) $w_i > 0$ என்றால், $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ என்று இருக்கவேண்டும்.

சில சமயங்களில் இருமைப் பிரச்சினைக்கான தீர்வை நாம் ஊகிக்கமுடியும்.

(a), (b)-யிலிருந்து முதல்நிலைத் தீர்வினை நாம் கண்டால் மேலும் அது முதல்நிலைக்கான எல்லா நிபந்தனைகளையும் திருப்திப் படுத்தினால், நாம் இரு தீர்வுகளையும் ஒரே சமயத்தில் சரிபார்க்க முடியும்.

முதல்நிலை, இருமைப் பிரச்சினைகள் (Primal and Dual Problems)

ஒரு ஜோடி LP உருப்படிவங்களை நாம் கவனிப்போம்.

$$\text{‘}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \ldots (1)$$

$$\text{எல்லா } x_i \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \ldots (2)$$

என்ற நிபந்தனைகளின்படி x_j காணப்பட்டால்,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ ஐ மீப்பெருமமாக்குக'} \quad \ldots (3)$$

என்ற பிரச்சினையையும்,

$$\text{‘}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \ldots (4)$$

$$\text{எல்லா } y_i > 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \ldots (5)$$

என்ற நிபந்தனைகளின்படி y_i காணப்பட்டால்,

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_j \text{ ஐ மீச்சிறுமமாக்குக'} \quad \ldots (6)$$

என்ற பிரச்சினையையும் இணையாக எடுத்துக்கொள்வோம். நன்கு விளக்குவதற்காக (1), (2), (3) மூன்றையும் சேர்த்து ஒரு

முதல் நிலைப் பிரச்சினை என்றும், (4), (5), (6) மூன்றினையும் சேர்த்து ஓர் இருமைப் பிரச்சினை என்றும் விதிக்கட்டு இன்றி வழங்குகிறோம்.

உதாரணத்தின்மூலம் விளக்குவதற்குக் கீழ்க்கண்ட இணைப் பிரச்சினைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்:

'$x_1 + x_2 + 2x_3 < 16$

$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 < 25$

$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ என்ற நிபந்தனைகளின்படி x_j-க்கள் இருப்பின்,

$Z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3$ஐ மீப்பெருமமாக்குக'

என்ற பிரச்சினையையும்

'$y_1 + 7y_2 > 4$

$y_1 + 5y_2 > 5$

$2y_1 + 3y_3 > 9$

$y_1 > 0, y_2 > 0$ என்ற நிபந்தனைகளின்படி y_i-க்கள் இருப்பின்,

$Y = 16y_1 + 25y_2$ஐ மீச்சிறுமமாக்குக' என்ற பிரச்சினையையும் விளக்கிக் காட்டுகிறோம். எனவே, முதல் நிலை உருப்படிவத்தின் ஒரு பக்கத்தை இலேசாகக் கீழ்க்கண்டவாறு நொடித்து இயக்கினால் கிடைப்பதுதான் இருமைப் பிரச்சினையாகும்.

(i) முதல் நிலையில் கெழுக்களின் jஆவது நிரல் ஆனது, இருமையில் கெழுக்களின் iஆவது நிரையாக இருக்கும்.

(ii) முதல் நிலைக் கொள்குறிச் சார்பலனின் கெழுக்களுக்கான நிரையானது இருமையின் வலப் பக்கத்திலுள்ள மாறிலிகளின் நிரல் ஆகிறது (நிரலுக்குச் சமமாகிறது).

(iii) முதல் நிலையின் வலப் பக்கத்திலுள்ள மாறிலிகளின் நிரலானது இருமை கொள்குறிச் சார்பலனின் கெழுக்களின் நிரையாகிறது.

(iv) சமனிலிகளின் திசையும் (direction), பெரிதும் உகந்த தன்மையின் பாங்கும் (sense of optimization) இந்த இணைப் பிரச்சினைகளில் தலைகீழாக மாற்றப்படுகின்றன.

இருமைத் தேற்றம் (Dual Theorem)

(a) முதல் நிலை, இருமைப் பிரச்சினைகள் இரண்டுமே பயனெளிமையுடைய தீர்வுகளைக் கொண்டிருந்தால், முதல் நிலைப் பிரச்சினை x_j^* $(j = 1, 2, \ldots, n)$ என்ற பெரிதும் உகந்த தீர்வினையும், இருமைப் பிரச்சினை y_i^* $(i = 1, 2, \ldots, m)$ என்ற பெரிதும் உகந்த தீர்வினையும் கொண்டிருக்கும்; மேலும்

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \text{ என்றும் இருக்கும்.}$$

(b) ஒரு முதல் நிலைப் பிரச்சினையோ அல்லது ஓர் இருமைப் பிரச்சினையோ, ஒரு நிலைத்த பெரிதும் உகந்த கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்புடன் கூடிய, ஒரு பயனெளிமையுடைய தீர்வைக் கொண்டிருந்தால், மற்றப் பிரச்சினையானது, அதே, பெரிதும் உகந்த கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்புடன் கூடிய (with the same optimal objective function value) ஒரு பயனெளிமையுடைய தீர்வைக் கொண்டிருக்கும். x_j மாறிகள், முதல்நிலை நிபந்தனைகளை நிஜமாகவே திருப்திப்படுத்துவதாகவும், அதே போல y_i மாறிகள் இருமை நிபந்தனைகளைத் (dual constraints) திருப்திப்படுத்துவதாகவும் கொள்வோம்.

முதல் நிலையில் iஆவது நிபந்தனையை y_i ஆல் பெருக்குவோம். இதேபோல இருமையில் jஆவது கட்டுப்பாட்டினை x_jஆல் பெருக்குவோம்.

$y_i \geqslant 0$, $x_j \geqslant 0$ என்பதால் சமனிலிகளின் திசைகள், பெருக்குவதால் மாறுமல் இருக்கின்றன.

முதல்நிலையிலிருந்து, எல்லா, விளைவான கட்டுப்பாடுகளையும் (resultant constraints) இப்போது கூட்டினால்

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right] \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \text{ என்று கிடைக்கிறது.}$$

இதேபோல இருமையிலிருந்து எல்லா, விளைவான கட்டுப்பாடுகளையும் சேர்த்துக் கூட்டினால்

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right] \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ என்று கிடைக்கிறது.}$$

இவ்விரண்டு சமனிலிகளையும் ஒருங்கிணைத்து எழுதினால்

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

அதாவது,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

இதன் விளைவாக, இந்த இரண்டு பிரச்சினைகளில் ஒன்றின் பயனெளிமைத் தீர்வுக்கான கொள்குறிச்சார்பலனின் மதிப்பானது மற்றப் பிரச்சினையில் பெரிதும் உகந்த ஒரு தீர்வையும் சேர்த்த எந்த ஒரு பயனெளிமைத் தீர்வுக்கான கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பையும் கட்டுப்படுத்துகிறது.

உதாரணமாக, நமது எடுத்துக்காட்டில் எந்த ஒரு பயனெளிமையுடைய முதல் நிலை, இருமைத் தீர்வுகளுக்கும் $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \leqslant 16y_1 + 25y_2$ என்று இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

முதல் நிலைப் பிரச்சினைக்கான பயனெளிமையான தீர்வு

$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 8$ ஆகும்.

இத் தீர்விற்கான கொள்குறிச் சார்பலனின் மதிப்பு=72 ஆகிறது.

இருமைப் பிரச்சினைக்கான பயனெளிமைத் தீர்வு

$y_1 = 5;\ \ y_2 = 0.$

இதன் கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்பு = 80.

எனவே முதல்நிலை, இருமைப்பிரச்சினைகள் இரண்டிற்குமான பெரிதும் உகந்த கொள்குறிச் சார்பலன் மதிப்பு (72, 80) இடைவெளிக்குள் அமைகிறது.

ஒரு பிரச்சினைக்குக் கட்டுப்பாடற்ற பெரிதும் உகந்த தீர்வு (unbounded optimals olution) கிடைத்தால், மற்றப் பிரச்சினைக்குப் பயனெளிமையான ஒரு தீர்வு கிடைக்காது. முதல் நிலைப் பிரச்சினைகளுக்கு, ஆய்வுக்குரிய ஒரு பயனெளிமைத் தீர்விற்கான, பெரிதும் உகந்த தன்மையைக் கண்டுபிடிக்க ஓர் அடிப்படைச்சோதனையை

இருமைத்தேற்றம் குறிக்கிறது என்று நாம் கூறலாம். இரண்டு கொள்குறிச்சார்பலன்களின் மதிப்புகளும் சரிசமமாக இருக்குமாறு இருமைப்பிரச்சினைக்கு ஒரு தகுந்த பயனெளிமைத் தீர்வு கிடைத்தால், அந்த இரண்டு பிரச்சினைகளின் முறையேயான இரு தீர்வுகளும் பெரிதும் உகந்ததாக இருக்கும்.

மேற்படி தேற்றத்தின் சுவாரசியமான கிளைத் தேற்றம் (corollary), முழுமையாக்குகிற (நிரப்புகிற) தளர்வுத் தேற்றம் அல்லது நிரப்பு தளர்வுத் தேற்றம் (Complementary Slackness Theorem) கீழே தரப்படுகிறது.

கிளைத்தேற்றம்

முதல்நிலை, இருமைப் பிரச்சினைகளுக்கான பயனெளிமையான தீர்வுகள் முறையே x_j^* $(j = 1, 2, \ldots, n)$

y_i^* $(i = 1, 2, \ldots, m)$ என்று இருக்கட்டும்.

$$y_i^* \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* - b_i \right] = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_i^* \left[\sum a_{ij}\, y_i^* - c_j \right] = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$$ என்று இருந்தால் மட்டுமே, அந்த இரண்டு தீர்வுகளும் பெரிதும் உதகந்தவையாகும்.

இது எதைக் குறிக்கிறது என்றால், ஏதாவது ஒரு பிரச்சினையில் தளர்வுடன்கூடிய ஒரு கட்டுப்பாடு, கண்டிப்பான சமனிலியாக இருக்கும் சமயத்தில், மற்றொரு பிரச்சினையில் அதற்குத் தகுந்த மாறியின் (அதற்கான மாறியின்) மதிப்புப் பூஜ்யத்துக்குச் சமமாகும் என்பதேயாகும்.

முதல்நிலை, இருமைப் பிரச்சினைகளை (1) முதல் (6) மூலமாகக் குறிப்பிட்ட விதிமுறை தழுவிய வடிவங்களை நாம் உபயோகித்தோம். எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட பிரச்சினைக்கும், மூலமுதலான விவர்த்தை உருமாற்றுவதற்கு (1), (2), (3) வடிவங்களையோ அல்லது (4), (5), (6) வடிவங்களையோ சார்ந்த முறைகளைக் மேற்கொள்ளவேண்டும்.

(விளக்கப்பட்ட) விசாலமாக்கப்பட்ட ஒழுங்குமுறை விதிகளைப் பின்பற்றிய பின்வரும் இணைப் பிரச்சினைகளைக் கவனிப்போம்.

முதல் பிரச்சினை

(i) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j < b_i \quad i = 1, 2, \ldots, h < m$

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_j \quad i = h_{+1}, h_{+2}, \ldots, m$

(iii) $x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k < n$

(iv) x_j மதிப்புகள் ($j = k_{+1}, \ldots, n$-க்கு) குறியினுக்குக் கட்டுப்பட்டவையல்ல என்ற நான்கு நிபந்தனைகளுக்கும் உட்பட்டவாறு

(v) $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ஐ மீப்பெருமமாக்குக.

அடுத்த பிரச்சினை

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i > c_j,\ j = 1, 2, \ldots, k$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i = c_j,\ j = k + 1, k + 2, \ldots, n$$

$$y_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, h$$

y_i ($i = h + 1, h + 2, \ldots, m$-க்கு) குறியினுக்குக் கட்டுப்பட்டவையல்ல என்ற நான்கு நிபந்தனைகளுக்கும் உட்பட்டவாறு,

$\sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i$ஐ மீச்சிறுமமாக்குக.

இந்த இரண்டு பிரச்சினைகளுக்கும் இருமைத் தேற்றம் பொருந்துகிறது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. '$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 13$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 5$$

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$ என்றவாறுள்ள x_i மதிப்புகளை ஒட்டியவாறு $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ஐ மீப்பெருமமாக்கு'. இப் பிரச்சினைக்கான இருமைப் பிரச்சினையை எழுதவும். தீர்வு $x_1 = 0;\ x_2 = 0{\cdot}75;\ x_3 = 5{\cdot}75$ என்று உள்ளதா என்று சரி பார்க்கவும்.

2. கீழே காணும் இருமைப் பிரச்சினைக்குத் தகுந்த முதல் நிலைப் பிரச்சினையை எழுதி, இரண்டு பிரச்சினைகளுக்கும் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் தீர்வு காணவும் :

$$2w_1 + w_2 + 2w_3 \leqslant 2$$

$$4w_1 + 2w_2 + w_3 \geqslant 2$$

$w_1, w_2\ w_3 \geqslant 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக் கேற்ப

$$w_1 + w_2 + w_3\text{ஐ}$$

மீப்பெருமமாக்குக.

3. கீழே குறித்த பிரச்சினைக்குச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் தீர்வு காண் :

$$2x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2$$

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$ என்றவாறு

$2x_1 - 3x_2$ஐ மீச்சிறுமமாக்குக.

இப் பிரச்சினையின் இருமையை எழுதி அதற்குத் தீர்வு காண்

செயற்போலி
அல்லது பாவிப்பு முறைகள்
(Simulations)

ஒரு சோதனைக்குரிய ஒரு பொருளைத் தேர்வாய்வு செய்வதை விட, அப் பொருளின் உருப்படிவத்தைத் தேர்வாய்வு செய்யும் செயற்பாங்கினைப் 'பாவிப்பு முறை' (simulation) என்று வழங்குகிறோம். ஆகாய விமானம் பறக்கும் ஆற்றலைப் பாவிப்பதில் (செயற்போலி செய்வதில்) மாதிரி விமானங்களையும் காற்றுக் குழல்களையும் உபயோகிப்பது நாம் நன்றாக அறிந்த விவரமாகும். ஒரு சிற்பி தமது எண்ணங்களைச் செயல் வடிவாக்கும் சமயத்தில், சிறிய கட்டடங்களையும், சாலைகளையும் தேர்வு ஆய்வு முறையில் சிந்தித்துப் பாவிக்கின்றார். மனித விண்வெளிப் பயணத்தின் (manned space flight) பாவிப்பு (செயற்போலி) ஆனது விண்வெளிப் பயணிகளை அவர்களது குறிக்கோள் பணியில் (mission) பயிற்றுவிப்பதற்கு உபயோகமாக அமைகிறது. புள்ளிவிவரங்களை மேற்கொள்ளும்போது கணிப்பான் தனது முழுத் திறமையுடன் செயல்படுவதானது 'பாவிப்பு முறைக்கு' முற்றிலும் புதியதொரு பாங்கினையும், குறிப்பிடத்தக்க பொருள் நுட்பத்தையும் ஏற்படுத்தித் தந்துள்ளது. தற்சமயம் கணிப்பான் பாவிப்பு முறையானது (computer simulation) விஞ்ஞானச் சோதனையின் ஒரு தகுதியான போற்றத்தக்க முறையாகும். இந்த முறையை உபயோகிக்காத எந்த ஒரு மனிதாபிமானச் செயல் நடவடிக்கையும் நாம் இவ்வுலகில் காண முடியாது என்று நிச்சயமாகக் கூறலாம். ஓர் ஒழுங்கு முறையின் கணித முறைகளிலோ அல்லது தர்க்கரீதியிலோ இது முக்கியமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. செயல்முறை ஆராய்ச்சி உருப்படிவங்கள் (OR models) இவ்வகையைச் சார்ந்தமையால், இந்தத் துறையில் 'கணிப்பான் பாவிப்பு' நன்கு உறுதிப் படுத்தப்பட்ட ஒரு பயிற்சி முறை ஆகாது.

நாம் ஏன் செயற்போலி முறையை மேற்கொள்ளவேண்டும்? நேரடித் தேர்வாய்வு ஒரு பொருளிற்கு மிகவும் (உயர்ந்த) செலாக்கியமான முறையாகும். ஏனெனில், அதன் உருப்படிவத்தை உண்டாக்கும்போது தவறுகள் மிகவும் குறைவாக இருக்கும். ஆனால், நேரடித் தேர்வாய்வு நிகழ முடியாது. ஏனென்றால்,

(i) உண்மையான ஒழுங்கு முறையைத் தேர்வாய்வுக்காகக் கையாள முடியாது.

(ii) அத்தகைய ஓர் உண்மை ஒழுங்கு முறையே, அமைப்பு முறையில்தான் உள்ளதே தவிரச் செயல்முறையில் இருக்க வில்லை. மேலும்,

(iii) நேரடித் தேர்வாய்வு அபாயகரமானது; செலவு அதிகமாகக் கூடியது; அதிக நேரத்தையும் எடுத்துக்கொள்ளக் கூடியது ஆகும்.

ஒரு நிறுவனத்தின் தீர்வு காணும் பிரச்சினையில் காணப்படும் பலவித ஒழுங்குமுறைகள் மேலே குறிப்பிடப்பட்ட ஒன்றுக்குமேற் பட்ட காரணங்களால், நேரடித் தேர்வாய்விற்கு அப்பாற்பட்ட வையாகும். எனவே, இந்தப் பிரச்சினையை வேறு ஒரு தகுந்த உருப்படிவத்தின்மூலம் அணுகவேண்டும்.

செயல் ஆராய்ச்சி முறையில் தீர்வுப் பிரச்சினையை உருப் படிவம் அமைத்தலிலும் ஆய்தலிலும் கணித முறைதான் மிகவும் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. இந்தக் கணித உருப் படிவங்களின் முக்கியப் பயன் யாதெனில், பிரச்சினையில் உள்ள பல மாறிகள் அல்லது காரணிகளின் இடையே காணப்படும் காரணம்-விளைவு-உறவுகளை இது நன்கு வெளி உணர்த்துகிறது. மேலும், கணித உருப்படிவத்தில் பிரச்சினையை ஐயப்பாடு இன்றி (unambiguously) விளக்க முடியும். அதேபோல் தீர்வினையும் ஐயப்பாடு இல்லாமல் தருவதற்கு உருப்படிவத்தின் கணிதமுறை ஆய்வு பயன்படுகிறது. இருப்பினும், நிறையச் சந்தர்ப்பங்களில் OR-ன் இத்தகைய கணித உருப்படிவமும் மிகவும் குழம்பிய நிலையில் பயன்படாமல் போவதும் உண்டு. இத்தகைய குழப் பங்கள் (சிக்கல்கள்) கீழ்க்கண்ட காரணங்களால் நிகழ்கின்றன :

(i) ஒழுங்கு முறையில் (system) நிறைய அளவு மாறிகளும் உள் உறுப்புகளும் (ஆக்கக் கூறுகளும்) (components) இருத்தல்.

(ii) அவ்வித ஆக்கக் கூறுகளினிடையே உள்ள இடை வினைவுகளின் (interactions) சிக்கலான தன்மைகள்.

(iii) ராண்டம் மாறிகளும், மற்ற நிச்சயமற்ற தன்மை உடைய உறுப்புகளும் இருத்தல்.

இத்தகைய குழப்பங்கள் (சிக்கல்கள்) தோன்றுவதால் ஒரு 'வழிமுறைக்குகந்த உருப்படிவ'த்தைத் (procedural model)

தோற்றுவிக்கிறோம். இது கணித/தர்க்கக் கூறுகளைக் கொண்டு அமைவதுடன், ஒவ்வோர் உறுப்பும் எவ்வாறு செயல்படுகிறது, எல்லாக் காலங்களிலும் மற்ற உறுப்புகளுடன் எவ்வாறு இடைவிளைவுகளை ஏற்படுத்துகிறது என்பதை விளக்குகிறது. ஆனால், ஒழுங்குமுறையின் கூட்டு மொத்தப் போக்கானது (behaviour) கணித ஆய்வுக்கு அப்பாற்பட்டது. இந்த நடைமுறைக்குகந்த உருப்படிவம், ஒழுங்குமுறையைச் செயற்போலி முறையில் இயங்க அல்லது பாவிக்க உபயோகப்படுகிறது.

செயற்போலி முறையானது:

(i) சில குறிப்பிட்ட நிலையில் ஒழுங்குமுறையை ஆரம்பிப்பது.

(ii) ஒழுங்குமுறைக்கு உட்பாடுகளை (inputs) உருவாக்குதல் (generation).

(iii) நடைமுறைக்குகந்த உருப்படிவத்திற்கான விதிமுறைகளை அனுசரித்து ஒரு குறிப்பிட்ட நிலைஉட்பாட்டு உருவாக்கத்தின்படி (under particular state input configuration) ஒழுங்குமுறையினைச் செயல்படுத்துதல்.

(iv) ஒழுங்குமுறையினைச் செயலாக்க, புள்ளிவிவரங்களை கண்டு உணர்ந்து சேகரித்தல்.

இதை விளக்குவதற்கு, ஓர் எண்ணெய்க் கம்பெனியை ஓர் உதாரணமாக எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரு நெடுஞ்சாலையில் எண்ணெய்க் கம்பெனியின் சேவை நிலையத் (service station) தைக் கட்டி அங்கு எத்தனை எண்ணெய்க் குழாய்களை அமைப்பது எனத் தீர்மானிக்கும் பிரச்சினையை எடுத்துக் கொள்வோம். போக்குவரவு நடமாட்ட ஆய்வின் (traffic analysis) மூலம், சேவை நிலையத்துக்குச் சேவைக்காக எதிர்பார்க்கக் கூடிய தானியங்கிகளின் (automobiles—மோட்டார் வண்டிகள்) சராசரி எண்ணிக்கை 20 என்றும், இரண்டு வண்டி வருகைகளுக்கு இடையே உள்ள கால அளவு ஒரு ராண்டம் மாறி எனவும், அந்த மாறிகள் 2, 3, 4 நிமிடங்கள் என்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0·3, 0·4, 0·3 எனவும் அறிய வருகிறோம். ஒரு குழாய் ஒரு மணிக்குச் சராசரியாக 10 மோட்டார் (தானியங்கி) வண்டிகளைச் சீர்செய்யமுடியும் (car service). ஆனால், ஒரு மோட்டார் வண்டியைச் சீர்செய்யத் தேவைப்படும் உண்மையான கால அளவு ஒரு ராண்டம் மாறி ஆகும். அந்த ராண்டம் மாறியின் மதிப்புகள் 4, 5, 6, 7, 8 நிமிடங்கள் முறையே

0·1, 0·2, 0·4, 0·2, 0·1 என்ற நிகழ்தகவுகளைக் கொண்டவாறு இருக்கும். சராசரி வருகையையும், சீர் செய்யும் வீதத்தையும் (service rate) பற்றிய அடிப்படையைக் கொண்டு, 2 குழாய்கள் (இருந்தால்) அமைத்தால் போதுமானது என்று தெரியவருகிறது. ஆனால் அந்த எண்ணெய்க் கம்பெனி, ஒழுங்குமுறையைச் செயற்போலியாக்கி (simulate) அஃது எவ்வாறு செயல்படுகிறது என்றறிய விரும்புகிறது. 'முதலில் வருபவர்க்கு முதலில் சேவை' (First come first served) என்ற விதி முறையைக் கடைப்பிடிப்போம். இரண்டு குழாய்களும் வேலையற்று இருக்கையில் ஒரு மோட்டார் வண்டி சேவைக்காக வருவதாகக் கொள்வோம். அப்போது அது குழாய் எண் 1-ல் சீர்செய்யப்படும்.

முதல் நிலையிலிருந்து ஒழுங்குமுறையினை ஆரம்பித்துச் செயற்போலி பாவித்து எந்த ஒரு மோட்டார் வண்டியும் சேவைக்காகக் காத்திருக்கவும் இல்லை; சீர் செய்யப்படவுமில்லை என்ற ஆரம்ப நிலையிலிருந்து 10 மோட்டார் வண்டிகள் சீர்செய்யப்படும் வரை ஒழுங்கு முறையினைச் செயற்போலியாக்குவோம். எனவே, ஆரம்பக் கட்டத்தில் இரண்டு எண்ணெய்க் குழாய்களும் வேலை செய்யாமல் பயனற்று இருக்கின்றன. தரப்பட்ட நிகழ்தகவு விதி முறையை அனுசரித்து மோட்டார் வண்டிகளின் உட்பாட்டு வருகையை (stream) உருவாக்கவேண்டியது அவசியமாகிறது. 'ராண்டம் எண்கள்' முறையைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறு செய்யலாம். இந்த எண்களை ராண்டம் எண்கள் பட்டியலில் இருந்து கிடைக்கப் பெறலாம். '0'-க்கும் '1'-க்கும் இடையே சீரான பரவலில் இந்த எண்கள் அமைவதைக் காணலாம். மோட்டார் வண்டிகளின் வருகைகளை உருவாக்குவதற்குக் கீழ்க்கண்ட முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்:

ராண்டம் எண் X இவ்வாறு இருந்தால்	அடுத்த மோட்டார் வண்டி t நிமிடங்களுக்குப் பின் வருகை தரும்
$X < 0{\cdot}3$	$t = 2$ நிமிடங்கள்
$0{\cdot}3 \leq X < 0{\cdot}7$	$t = 3$ நிமிடங்கள்
$X \geq 0{\cdot}7$	$t = 4$ நிமிடங்கள்

மேற்படி பட்டியலிலிருந்து அடுத்த வருகைக்கான கால நேரம் அல்லது 'வருகைகளுக்கிடையே கால நேரம்' (inter-

arrival time) நமக்குக் கிடைக்க வருகிறது. எனவே, அடுத்த வண்டிக்கான உண்மையான வருகை நேரத்தைக் கண்டு பிடிக்க. இந்த வருகைகளுக்கு இடையேயுள்ள கால நேரத்தை. முந்திய வண்டி வருகைதந்த நேரத்துடன் கூட்டவேண்டும். வருகை தரும் ஒவ்வொரு வண்டிக்கும் அதற்குத் தேவையான சீர்செய்யும் கால நேரத்தினைக் கீழ்க்கண்டவாறு செயற்போலி யாக்குகிறோம்:

ராண்டம் எண் X இவ்வாறு இருந்தால்	தேவையான சீர் செய்யும் காலநேரம்
$X < 0{\cdot}1$	4 நிமிடங்கள்
$0{\cdot}1 \leqslant X < 0{\cdot}3$	5 ,,
$0{\cdot}3 \leqslant X < 0{\cdot}7$	6 ,,
$0{\cdot}7 \leqslant X < 0{\cdot}9$	7 ,,
$X \geqslant 0{\cdot}9$	8 ,,

இப்போது ஒரு செயற்போலி ஓட்டத்தினுடைய முதல் 10 வண்டிகளுக்கான வருகை நேரங்களும் தேவைப்படும். சீர் செய்யும் நேரங்களும் பின்வரும் அட்டவணையில் 2 ஆவது, 3 ஆவது நிரல்களில் தரப்பட்டுள்ளன. 4 ஆவது நிரல் வண்டியைச் சீர்செய்தல் எப்போது ஆரம்பித்தது என்றும், எந்தக் குழாய் அதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்டது என்றும் காட்டுகிறது. ஒவ்வொரு குழாயும் செயல்பட்ட நேரங்களை 5 ஆவது நிரலில் காணலாம். இந்த ஒவ்வொரு வண்டியின் வருகை, சீர்செய் நேரங்களைக் கொண்டு, இந்த ஒழுங்குமுறையின் நிறைவேற்றத்தைச் செயற்போலியாக்கி, 4, 5 நிரல்களைப் பூர்த்தி செய்கிறோம்.

நிரல்கள் (2), (4)-க்கிடையேயுள்ள விலக்கம் (difference) ஒரு குறிப்பிட்ட வண்டி காத்திருக்கவேண்டிய கால நேரத்தைக் காட்டுகிறது. இந்த உதாரணத்தில் 4ஆவது 6ஆவது வண்டிகள் மட்டுமே சீர்செய்யக் காத்திருக்கவேண்டியுள்ளன. அதுவும்

முறையே 1, 2 நிமிடங்கள் காத்துள்ளன. இந்த அட்டவணையின் மூலம் நாம் விரும்பும் எந்தப் புள்ளிவிவரங்களையும் நாம் அளிக்க

மோட்டார் வண்டி	வருகை நேரம் ஆரம்பத்திலிருந்து (நிமிடங்கள்)	சீர் செய்யும் நேரம் (நிமிடங்கள்)	சீர் செய்ய ஆரம்பித்த நேரம்	குழாய்கள் செயல் பட்ட கால நேரங்கள்	
				குழாய் I	குழாய் II
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
1	3	5	3 (I)	3 — 8	
2	5	8	5 (II)		5—13
3	8	6	8 (I)	8 — 14	
4	12	8	13 (II)		13—21
5	16	6	16 (I)	16 — 22	
6	19	5	21 (II)		21—26
7	23	5	23 (I)	23 — 28	
8	27	4	27 (II)		27—31
9	29	6	29 (I)	29 — 35	
10	32	7	32 (II)		32—39

முடியும். குறிப்பாகச் சேவைக்காகக் காத்திருக்கும் வண்டிகளின் சராசரி எண், ஒன்றோ அதற்கு மேற்பட்டதோவான குழாய்கள் வீணாக் (செயலற்று) இருக்கும் நேரங்களின் சதவீதம், வரிசையில் சேவைக்காக நிற்கும் வண்டி காத்திருக்கவேண்டிய சராசரி நேரம் இவற்றைக் கணிக்க முடியும்.

மனிதனால் செயற்போலியாக்கப்படும் (பாவிக்கப்படும்) எளிதான மேற்படி உதாரணத்தின்மூலம் செயற்போலி உத்தி

முறையை (பாவிப்பு உத்திமுறை) வர்ணிக்கிறோம். OR ஆய்வாளர்களின் நிறையப் பிரச்சினைகள் மனிதச் செயற்போலிக்கு (manual simulation) ஏற்றவாறல்லாமல் பெரிய பிரச்சினைகள் ஆதலால் கணிப்பானின் உதவி தேவைப்படுகிறது. இன்றைய நிலையில். கணிப்பான் செயற்போலி ஆராய்ச்சியானது (computer simulation study) ஒரு தனிப்பட்ட விஞ்ஞானப் படிப்பாகக் கருதப்படுகிறது. கணிப்பான் செயற்போலி ஆராய்ச்சியில், நமது பெருமளவு முயற்சி, கணிப்பானைத் திட்ட அமைப்புச் செய்வதிலேயே (programming) கழிவதால் திட்ட அமைப்பு முயற்சிச் சிரமங்களைக் குறைக்கும் நிமித்தம், சிறந்த முற்போக்கான (special advanced) 'செயற்போலி மொழிகள்' (simulation languages) உருவாக்கப்பட்டு வளர்ச்சியடைவதற்கு மிகுந்த கவனம் தரப்படுகிறது. பொது நோக்கச் செயற்போலி ஒழுங்கு முறை (General Purpose Simulation System-GPSS) என்றும், SIMSCRIPT என்றும் சில குறிப்பான மொழிவழி முறைகள் இப்போது புழக்கத்தில் உள்ளன என்று அறிகிறோம். இம் மொழிகளைப் பயன்படுத்துபவர்கள் செய்யவேண்டியது என்னவென்றால், ஒழுங்கு அமைப்பையும், அதற்கான செயல்படும் விதிகளையும் கணிப்பானுக்கு மேற்படி மொழிவழி முறையில் விவரித்து எழுதவேண்டும். வெளிப்பாட்டுக்கான (output) சரியான செயற்போலியும், புள்ளியியல் விவரங்களின் ஒழுங்குச் சேகரிப்பும் எளிதானது. ஒழுங்கமைப்பில், ராண்டம் உறுப்புகளின் செயற்போலி நோக்கத்திற்கான 'ராண்டம் எண் இயக்கிகள்' (Random number generators) இம் மொழிகளில் தரப்பட்டுள்ளன. இம் மொழிகளின் தோற்றமானது, கணிப்பான் செயற்போலியின் மதிப்பை மிகவும் அதிகமாக்குகிறது.

இந்தச் செயற்போலி முறையின் ஒரு பெரிய குறைபாடு என்னவெனில், பகுமுறையுடன் (analytic approach) இதை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கையில், செயற்போலி முறையினால் கண்ட விளைவு (தீர்வு) பொதுவாக முழு முடிவாக (less conclusive) அமைவதில்லை. நம் உதாரணத்தில், வேறு ஒரு ராண்டம் எண்களின் தொகுதியை எடுத்தால், அதன் செயற்போலியில் நமது அனுபவம் முழுதும் வேறுபட்டதாக இருக்கும். மேலும், நமது உதாரணத்தில் 10ஆவது வருகைக்குப் பின்னும் வண்டிகளின் அதே செயற்போலி ஓட்டத்தைத் தொடர்ச்சியாகக் கவனிக்க முனைந்தால் சேவைக்காகக் காத்திருக்கும் வண்டிகளின் நீண்ட தொரு வரிசையையே கண்டிருக்க முடியும். ராண்டம் உறுப்புகளுடன் கூடிய பல விசையியக்க ஒழுங்கமைவுகளில் ஒழுங்கு முறை ஆரம்பித்த நிலையினின்றும் சார்பற்றதான நிலைத்தன்மை

(steady state) ஏற்படுகிறதா என்ற வினு எழுகிறது. நிலைத்த தன்மையில் ஒழுங்கமைவின் செயல் நிறைவேற்றம் முக்கியத் துவம் வாய்ந்ததாகும். அதாவது ஒழுங்குமுறையின் தொடக்க நிலையில் செயற்போலி ஆரம்பித்த உடனே காணப்படும் சில மதிப்புகளை நாம் எடுத்துக் கொள்ளக்கூடாது. ஏனெனில், தொடக்க நிலை மதிப்புகள், மற்ற மதிப்புகளை ஆக்கத் திரிபு (influence) உண்டாக்கக்கூடும். செயற்போலியில் ஓர் உண்மைப் பிரச்சினை என்னவென்ருல், செயற்போலி விவரங்களிலிருந்தே அந்த ஒழுங்குமுறை நிலைத்த தன்மையை (stability) அடைந்து விட்டதா இல்லையா என்று தீர்மானிக்கிருேம்.

மேலும், செயற்போலி ஓட்டத்தின் அடிப்படையில் நாம் கணிக்கும் எந்தப் புள்ளியியல் மாறியும் சில பிழைகளுக்குட் பட்டவாறு அமையும் என்பது தெரிந்த உண்மையாகும் எனவே, இந்தப் புள்ளியியல் விவரங்களினுல் கண்டறியும் எந்த ஒரு தீர்வும் பிழைக்குட்பட்ட தீர்வாகிறது. இந்தக் காரணத்திஞல் நாம் முன்பே, செயற்போலி அணுகு நெறி முழுமையான முடிவைத் தருவதில்லை என்று கூறிஞேம். ஆகையால், செயற் போலி முறைகளின் செயல் திட்டங்களுக்கும், ஆய்வினுக்கும் (design and analysis) பொருத்தமான புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தி இந்தப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணமுடியும். செயற் போலி ஆராய்ச்சிப் படிப்பில், சோதனைத் திட்ட அமைப்பு, கூறு முறைகள், எடுகோள் சோதனைகள், கூறு அளவைத் தீர் மானித்தல், எதிர்செயல் பரப்பு ஆய்வு (response - surface analysis) முதலிய படிப்பினைகள் மிகவும் உபயோகமாக உள்ளன.

விற்பனை முன்கணிப்பு
(Sales Forecasting)

பொருப்புக்குரிய விற்பனை முன்கணிப்பின் தேவையானது மிகவும் அத்தியாவசிமானது என்பது எல்லோரும் அறிந்ததே. உற்பத்தியைப் பெருக்குவதிலிருந்து விலை நிர்ணயிப்பது வரை, விற்பனை முன்கணிப்புகள் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை யாகும். இங்கு விற்பனை முன்கணிப்பு முறைகள், விற்பனை முன் கணிப்புகளில் ஏற்படும் பிழைகளை மதிப்பீடு செய்தல், நிறுவன அமைப்பில் முடிவுகளை எடுப்பதற்கு இந்த விற்பனை முன்கணிப்புகள் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பனபற்றி நாம் கவனிப்போம்.

தொழிற்சாலையில் கண்காணிக்கப்பட்டு வரும் விற்பனைக் குறிப்புகள் ஏற்கெனவே இருப்பவற்றிலிருந்து விற்பனை முன்கணிப்பு

களுக்கான விவரங்கள் கிடைக்கவரும். அல்லது அரசாங்கத் துறைகளால் வெளியிடப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்தோ அல்லது மத்திய புள்ளியயில் நிறுவனத்திலிருந்தோ கிடைக்கப் பெறும் விவரங்களிலிருந்தோ விற்பனை முன்கணிப்புகளைப் பற்றிய விவரங்களைக் கண்டறியலாம். கடந்த காலக் குறிப்பு களில் விற்பனைப் புள்ளி விவரங்கள் கிடைக்காவிட்டால், புதிய ஆராய்ச்சி அவசியமாகிறது. நம்பத்தக்க செய்தி ஆதாரங்களைக் கொண்டு விற்பனை விவரங்களைப் பற்றிய ஆய்வினைத் தொடங்குகிரும்.

விற்பனை முன்கணிப்பு முறைகள் (Sales Forecasting Methods)

விற்பனைப் பருமன், கால நேரம் இரண்டினையும் வரை படத்தின் (graph) மூலம் கவனித்தால், விற்பனை நிலவரம் எப்படி என்று நன்கு விளங்கும். சிலவற்றில் ஓர் ஏறும் போக்கினை அல்லது இறங்கும் போக்கினை (increasing or decreasing trend) காணலாம். போக்கு அல்லது இயக்கப் போக்கு (trend) இருப் பதாகச் சந்தேகித்தோமானுல், அந்தப் போக்கினை மதிப்பீடு செய்வது ஒரு பிரச்சினையாகிவிடும். ஆனுல், விற்பனை விவரங்கள் ஒருவிதப் போக்கினையும் காட்டாமல் இருந்தால், முன்கணிப்பு முறை மிகவும் சுலபமானதாக ஆகிவிடுகிறது. இத்தகைய தருணங்களில் நகரும் சராசரிகள், அடுக்குக்குறி மெல்லிழைப்பு உத்திகள் (exponential smoothing technique) பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

நகரும் சராசரிகள் (Moving Averages)

நகரும் சராசரி முறைகள் மிகவும் பழக்கத்தில் உள்ளவை யாகும். வழக்கமாக முன்கணிப்பில் 3, 6, 12 மாதங்களின் நகரும் சராசரிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. X_t என்பது முதல் பகுதிக்கான (first period) விற்பனை என்ருல், N பகுதி நகரும்

$$\text{சராசரி} = m_t = \frac{X_{t-N+1} + X_{t-N+2} + \ldots + X_t}{N} \text{ ஆகும்.}$$

tஆவது பகுதியில் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட $(t+k)$ஆவது பகுதிக்கான முன்கணிப்பு $f_{t+k} = m_t$ ஆகும். பழைய மதிப்பு களைவிட (புள்ளிவிவரங்களை) நடப்பு மதிப்புகளுக்கு நாம் அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்கிரும். விற்பனையின் பாங்கு நீண்ட பகுதி நேரங்களுக்குத் தொடர்ந்து ஒரே மட்டத்தில் இருந் தால், ஒரு பெரிய N மதிப்பை உபயோகப்படுத்தவேண்டும். விற்பனையின் சராசரி மட்டம் அடிக்கடி மாறிக் கொண்டிருப்பின், N-ன் மதிப்புச் சிறியதாக இருப்பது உசிதம்.

விளக்க உதாரணம்

ஒரு *XYZ* கம்பெனி கம்பளி உடையினை விற்றதில் கிடைத்த விற்பனை மதிப்புகள் (நூறுகளில்) கீழ்க்காணும் பட்டியலில் காணப்படுகின்றன :

பட்டியல்—1.

	ஆண்டுகள்		
	1966	1967	1968
ஜனவரி	242	2[illegible]8	250
பிப்ரவரி	232	235	215
மார்ச்	215	226	210
ஏப்ரல்	196	2[illegible]0	200
மே	176	180	182
ஜூன்	165	156	172
ஜூலை	135	148	150
ஆகஸ்ட்	181	158	175
செப்டம்பர்	214	231	225
அக்டோபர்	261	250	240
நவம்பர்	278	250	260
டிசம்பர்	328	280	300
	2623	2562	2579

ஒரு 3 மாத நகரும் சராசரியினைக் கண்டுபிடித்தால சராசரியினை நடு மாதத்துக்கெதிரே எழுதுதல் வேண்டும். அதாவது ஜனவரி, பிப்ரவரி, மார்ச் 1966-க்கான 3 மாத நகரும் சராசரியினைப் பிப்ரவரி 1966-க்கு நேராகக் குறிக்கவேண்டும். மேலும் பிப்ரவரி, மார்ச், ஏப்ரலுக்கு மார்ச் மாதத்துக்கு நேராகவும், இதே போன்ற முறையில் மற்ற நகரும் சராசரி மதிப்புகளையும் குறித்தல் வேண்டும். பட்டியல்—2-ல் இந்த நகரும் சராசரிகள் காணப்படுகின்றன. இந்த நகரும் சராசரிகளைக் கவனித்துப் பார்த்தால் காலங்களுக்கான ஏற்றமும் இறக்கமும் நன்கு தெரிய வருகின்றன. அதே சமயம் 12 மாதங்களுக்கான நகரும் சராசரிகளைக் கணித்தால், இத்தகைய காலங்களுக்கான ஏற்ற இறக்கங்கள் சமப்படுத்தப்பட்டு (ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டு) உள்ளது தெரியவரும். 3ஆவது பட்டியல் 12 மாதங்களுக்கான நகரும் சராசரியினைக் காட்டுகிறது.

பட்டியல்—2

3 மாத நகரும் சராசரி (XYZ கம்பளி உடைக் கம்பெனிக்கானது)

	1966			1967			1968		
	விற்பனைகள்	நகரும் மொத்தம்	நகரும் சராசரி	விற்பனைகள்	நகரும் மொத்தம்	நகரும் சராசரி	விற்பனைகள்	நகரும் மொத்தம்	நகரும் சராசரி
ஜனவரி	242	—	—	238	801	267	250	745	238
பிப்ரவரி	232	689	230	235	699	233	215	675	225
மார்ச்	215	643	214	226	671	224	210	625	208
ஏப்ரல்	196	587	196	210	616	202	200	592	197
மே	176	537	179	180	546	182	182	554	185
ஜூன்	165	476	125	156	484	161	172	504	165
ஜூலை	135	481	160	148	462	154	150	497	166
ஆகஸ்டு	181	530	177	158	537	179	175	550	183
செப்டம்பர்	214	656	219	231	639	213	225	640	213
அக்டோபர்	261	753	251	250	731	244	240	725	242
நவம்பர்	278	867	289	250	780	260	260	600	267
டிசம்பர்	328	844	281	280	780	260	300	—	—

பட்டியல்—3

12 மாதங்களுக்கான நகரும் சராசரிகள்

	1966		1967		1968	
	நகரும் மொத்தம்	நகரும் சராசரி	நகரும் மொத்தம்	நகரும் சராசரி	நகரும் மொத்தம்	நகரும் சராசரி
ஜனவரி				220		213
			2632		2565	
பிப்ரவரி				220		213·5
			2649		2559	
மார்ச்				220 5		212·5
			2638		2549	
ஏப்ரல்				219		212·5
			2610		2559	
மே				216		214
			2562		2579	
ஜூன்				214·5		215
	2619		2574			
ஜூலை		218·5		214		
	2622		2554			
ஆகஸ்ட்		219		212·5		
	2633		2538			
செப்டம்பர்		220		211·5		
	2647		2528			
அக்டோபர்		221		211		
	2651		2530			
நவம்பர்		22·05		211·5		
	2642		2546			
டிசம்பர்		220 5		212		
	2655		2548			

Nஐப் பற்றிய முடிவு, அதாவது, நகரும் சராசரிக்கான பகுதியின் முடிவு விற்பனைப் பருமனின் நோக்கத்தையும் பாங்கினையும் சார்ந்துள்ளது. நகரும் சராசரி முறைகளுக்கு ஒத்த மற்ற பல முறைகளும் உள்ளன. மதிப்புகளுக்குள்ள எடை அங்கு வெவ்வேறு பட்டதாக இருக்கும். நகரும் சராசரி முறையில் அந்த எல்லா N மதிப்புகளுக்கும் எடை $\frac{1}{N}$ என்று ஒரே அளவில் இருக்கும். இதைவிடச் சிறந்த முன்கணிப்பு முறையில் நிறையக் கடந்தகால மதிப்புகளுக்குக் குறைந்த எடையைக் கொடுத்து முன்கணிப்புக் கண்டுபிடிப்பதாகும். அதாவது

பழைய விற்பனை மதிப்புகளுக்குப் புதிய விற்பனை மதிப்புகளைவிட எடை (weightage) குறைவாக இருக்கும். அடுக்குக்குறி மெல் லினைழவு உத்திகள் இந்த முறையைப் பின்பற்றியதாகும்.

அடுக்குக்குறி மெல்லினைழவுத் தன்மை (Fxponential Smoothing)

கீழ்க்கண்டவாறு விற்பனை முன்கணிப்பினை இங்குச் செய்வோம்.

அடுத்த (பீரியட்) காலக் கூறுக்காகக் கண்டுபிடித்த

புதிய முன்கணிப்பு = இந்தக் காலக் கூறுக்குக் கண்டுபிடித்த பழைய முன்கணிப்பு + α நடைமுறையில் உள்ள விற்பனை —actual sal s).

tஆவது (பீரியடில்) காலக்கூறில் கண்டுபிடித்த $(t+1)$ ஆவது காலக் கூறுக்கான முன்கணிப்பை m_t என்று கொள்வோம்.

tஆவது காலக் கூறிற்கான விற்பனையை X_t என்று கொள்க.

இப்போது $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, என்றும்,

$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i = 1$ என்றும் கொண்டால்

$$m_t = \alpha X_t + \alpha \beta X_{t-1} + \alpha \beta^2 X_{t-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

இந்த உருப்படிவத்தினை (models) எடுத்துக்கொண்டால் பழைய புள்ளிவிவரங்களுக்குக் குறைந்த எடை மதிப்புக் கிடைக்கிறது.

இப்போது,

$$m_t = \alpha X_t + \alpha \beta X_{t-1} + \alpha \beta^2 X_{t-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i = \alpha (1 + \beta + \beta^2 + \ldots\ldots) = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

$= 1$ என்பதால்

$\alpha = 1 - \beta$ அல்லது $\beta = 1 - \alpha$ ஆகிறது.

எனவே,

$$m_t = \alpha . X_t + \alpha (1 - \alpha) x_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2{}_{t-2} + \ldots \infty$$

$$= \alpha X_t + (1 - \alpha) [\alpha X_{t-1} + \alpha (1-\alpha) X_{t-2} + \ldots\ldots]$$

$$= \alpha X_t + (1 - \alpha) m_{t-1}$$

அதாவது,

$$m_t = \alpha (X_t - m_{t-1}) + m_{t-1}$$

ஆகவே, நடையினிய (elegant) முன்கணிப்பு விதியானது,

புதிய முன்கணிப்பு = முந்திய முன்கணிப்பு + α [நடைமுறையில் உள்ள விற்பனை — முந்திய முன்கணிப்பு].

இங்கு $0 < \alpha < 1$ என்பது கவனிக்கவேண்டியது. முன் கணிப்பிற்கான இம் முறையை உபயோகிக்கையில் நடைமுறை அனுபவத்தில் α-ன் மதிப்பு 0·1-லிருந்து 0·3-க்குள் இருந்தால் சரியான முன்கணிப்பு ஏற்படுகிறது. நிலைத்த விற்பனைப்பாங்கிற்கு α-ன் மதிப்புக் கீழ்நிலையை நோக்கியும், அடிக்கடி மாறுபட்ட விற்பனைப்பாங்கிற்கு α-ன் மதிப்பு மேல்நிலையைநோக்கியும் செல்வதைக் காண்கிறோம்.

அடுக்குக் குறி மெல்லிழைவு, நகரும் சராசரிகள் ஆகிய இந்த இரண்டு முறைகளுமே விற்பனையின் இயக்கப் போக்கினை ஏற்படுத்தும் வகையில் தகுதியற்றவையாகும்.

முன்கணிப்புப் போக்குகள் (Forecasting Trends)

போக்கு வெளிப்படையாகத் தெரிந்தால் பழைய விற்பனை முறையின்மூலம் எதிர்கால விற்பனை முறையினை அறிய முற்படலாம். ஏற்றத் தாழ்வுகளுக்கு இடையே, விற்பனைகள் கால நேரத்தின் ஒரு நேர்கோட்டுச் சார்பலனாக, ஏற்றமுடன் அல்லது இறக்கத்துடன் உள்ளன. இச் சார்பலன் முன்கணிப்பினைச் செய்வதற்குப் பயன்படுகிறது. தொடர்புப் போக்கு (regression) உத்திகளைப் பயன்படுத்தி இயக்கப் (trend) போக்கினைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

மீச்சிறு வர்க்க முறை (Method of Least Squares)

தொடர்புப் போக்குச் சார்பலன் $y = a + bx$ என்றால் a, b இரண்டும் மாறிலிகள். கொடுக்கப்பட்ட y மதிப்புக்கும் $a+bx$ மதிப்புக்கும் இடையேயான வேறுபாடுகளின் வர்க்கக் கூட்டலை மீச்சிறுமமாக்குவதே இம் முறையாகும். விற்பனை மதிப்பீட்டிற்கான திட்டப் பிழை s என்றால்,

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i)^2$$

இங்கு y_i = கண்டறிந்த விற்பனை மதிப்புகள். y_i = மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட விற்பனை மதிப்புகள். n = மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை. y-களின் சராசரி $\bar{y}$ என்றால், 95 சதகிவீத விற்பனைப்புள்ளி விவரங்கள் $\bar{y} \pm 2s$ என்ற வீச்சிற்குள் விழுவதாக எதிர்பார்க்கலாம்.

திருத்தப்பட்ட அடுக்குக்குறி மெல்லிழைவுத்தன்மை (Modified Exponential Smoothing)

சாதாரண அடுக்குக்குறி மெல்லிழைபு முறையில் போக்கினைக் கண்டறியும் பொருட்டு மேலும் சில மாறிகள் புகுத்தப்படுகின்றன. இதற்கான சூத்திரம் கணிதவடிவில் tஆவது காலக்கூறில் $(t+1)$ ஆவது காலக்கூறுக்காகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட புதிய முன் கணிப்பு

= t ஆவது காலக்கூறில் $(t+1)$ ஆவது காலக்கூறுக்காகக் கண்டுபிடித்த பழைய முன்கணிப்பு + α_1 (tஆவதுகாலக்கூறுக்கான நடைமுறையில் உள்ள விற்பனை — tஆவது காலக்கூறுக்கான பழைய முன்கணிப்பு)

இங்கு முன்கணிப்பு = $m_t + r_t$

m_t முன்னரே வரையறுக்கப்பட்டது. r_t=போக்கின் மதிப்பீடு, எனவே, போக்கினை மதிப்பீடுசெய்வதற்கான இன்னொரு சூத்திரம் $r_t = r_{t-1} + \alpha_2$ (நடைமுறை விற்பனைகள் —முந்திய முன் கணிப்பு). இந்தச் சூத்திரங்களில் α-ம், α_2-உ$(0, 1)$ என்ற வீச்சில் உள்ளன. முன்பே கூறப்பட்டபடி நடைமுறை அனுபவத்தின்படி $0 \cdot 1 < \alpha_1 < 0 \cdot 3$, $0 < \alpha_2 < 0 \cdot 03$ என்ற α_1, α_2-ன் வீச்சு சிலாக்கியமானதாக (பொருத்தமானதாக) அறிகிறோம். $\alpha_1 = 0 \cdot 1$, $\alpha_2 = 0 \cdot 01$ மதிப்புகள் மிகவும் பொருத்தமான மதிப்புகளாகும்.

உற்பத்தி, பகிர்ந்தளிப்பு இவற்றில் விற்பனை முன்கணிப்புகளின் உபயோகங்கள் (Uses of Sales Forecasts in Production and Distribution)

மேலே கூறப்பட்ட முறைகளின்மூலம் கண்டுபிடிக்கப்படும் முன்கணிப்புகள் உண்மையான நிலையிலிருந்து பெரிதும் மாறுபட்டதாக இல்லை என்று தெரிகிறது. இருப்பினும், விற்பனை விவரங்களில் காணப்படும் ராண்டம் இடையீடுகள் (random disturbances) உண்மையான விற்பனைகளிலிருந்து முன்கணிப்பைச் சிறிதளவு விலக்கிக் காட்டுகின்றன. எப்படி இருந்தபோதிலும், பழைய விற்பனைகளின் புள்ளியியல் ஆய்வினைப் பின்பற்றிய முன் கணிப்பு, நிறுவன அமைப்புகளில் முடிவுக்கு மேற்கொள்ள

வேண்டிய பிரச்சினைகளில் முன்னோடி (வழிகாட்டி)யாக விளங்குகின்றன.

சரக்குப் பட்டியல் கொள்கை (Inventory Policy)

'எவ்வளவு தருவிக்க வேண்டும்?' 'எப்போது தருவிக்க ஆணை பிறப்பிக்க வேண்டும்?' என்ற பிரச்சினைகளுக்கு விடை காணும் தீர்மானங்கள் தேவையின் முன்கணிப்பைச் சார்ந்து அமைகின்றன. விற்பனை முன்கணிப்பில் ஏற்படும் பிழையைப் பொறுத்து வேண்டிய அளவிற்குக் குறைவாகவோ அதிகமாகவோ சரக்குகளைச் சேமித்து வைக்கலாம். வருடாந்தர தேவை முன்கணிப்பில் ஏற்படும் பிழை $+p\,\%$ என்றால், ஆணை பிறப்பிக்கும் அளவில் ஏற்படும் பிழை $\sqrt{1 \pm p/100}$ ஆகும்.

உற்பத்தித் தொகுதி அளவையும்(Batch size)திட்டமும்

சரக்குப் பட்டியல் கட்டுப்பாட்டினைப் போன்றே தொகுதி அளவையைத் தீர்மானிப்பதும் விற்பனை முன்கணிப்பைச் சார்ந்து அமைகிறது. உற்பத்திக்கான திட்டமிடுதலும், குறிப்பிட்ட தேதிக்குள் உற்பத்திக் குறியிலக்குகளை அடைய முற்படுதலும் விற்பனை முன்கணிப்புகளால் எளிதாக்கப்படுகின்றன. உற்பத்திக் கால வரிசை முறைப்படி நிகழ்வதற்கு விற்பனை முன்கணிப்பு வழி வகுக்கின்றது. வெவ்வேறு பொருள்களின் தேவைகளுக்கிடையேயான தொடர்புகளைப்பற்றிய செய்தி முன்கணிப்பு (information forecast) ஆள்பலனையும் (man power)இயந்திரங்களையும் பெரிதும் உகந்த அளவில் பயன்படுத்திக்கொள்ள உதவுகிறது. தொழிற்சாலையில் கிடைக்கும் வருவாயினை எந்தச் சிறந்த முறையில் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம் என்பதை விற்பனை முன்கணிப்பின் முழு ஆய்வின்மூலம் அறிந்து கொள்கிறோம்.

உற்பத்திப் பெருக்கமும் விலை நிர்ணயமும் (Production Planning and Pricing)

ஆராயப்பட்ட விற்பனைகளின் போக்குகள் (trend) உற்பத்தியைப் பெருக்குவதற்குப் பெரும் அளவில் உதவுகின்ற சில பொருள்களின் உற்பத்தியைப் பெருக்குவதோ அல்லது (குறைத்தலோ) சுருக்குவதோ நிறுவன அமைப்பின் ஒரு முக்கியமான முடிவு ஆகும்; ஏனென்றால், வாய்ப்பு வகைகள் அந்த முடிவினைத் தழுவி உபயோகப்படுத்தப்படுகின்றன. விலை நிர்ணயக்கொள்கைகள் விற்பனை அளவையும் சந்தைப்பங்கீடுகளையும்(market shares) சந்தையில் போட்டி நிலைமையையும் பொறுத்து அமைகின்றன.

விற்பனை அளவைக்கான விற்பனை முன்கணிப்பும், நேரடி அல்லது மறைமுக முறைகள் மூலம் சந்தைப் பங்கீடுகளை மதிப்பீடு செய்வதும், விலை நிர்ணயத்துக்கு மிகவும் அவசியமானவை யாகும். விற்பனை முன்னேற்றத்துக்காக உற்பத்தித் தீவிரம் விளம்பரப்படுத்துதல் முதலியவற்றை, விற்பனை முன்கணிப்பை ஆதாரமாகக் கொண்டு முன்கூட்டியே திட்டமிட வேண்டியுள்ளது.

விளக்க உதாரணம்

ஒரு *ABC* ஸ்குரு கம்பெனியில் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுடை ஸ்குரு விற்பனை (மாதாந்திர விற்பனை) கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

மாதம்	45 × 12 அளவு ஸ்குருக்கள் விற்பனை	
	1967	1968
ஜனவரி	9122	8245
பிப்ரவரி	7826	7657
மார்ச்	8168	10850
ஏப்ரல்	6106	6796
மே	10790	8475
ஜூன்	7858	10502
ஜூலை	9566	10543
ஆகஸ்ட்	7568	6872
செப்டம்பர்	10968	8367
அக்டோபர்	8666	9423
நவம்பர்	7056	8201
டிசம்பர்	4054	5897

1967 ஜனவரிக்கான ஆரம்ப முன்கணிப்பினை (முந்தைய விற்பனையைக் கொண்டு) உபயோகித்து அடுத்த மாதங்களுக்கான விற்பனை முன்கணிப்பினைக் கண்டறிய ஆரம்பிப்போம். அடுக்குக்குறி மெல்லிழைவுத் தன்மைக்கான சூத்திரத்தைக் கீழே கண்டவாறு எழுதுவோம்:

அடுத்த மாதத்திற்கான முன்கணிப்பு = இம்மாத முன்கணிப்பு + α [இம்மாத உண்மை விற்பனை — இம்மாத முன்கணிப்பு].

இங்கு, α மதிப்பு 0·1, 0·3-க்கு நடுவே அமையும்.

சரியான α மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க, வெவ்வேறு α-க்களை உபயோகித்து எந்த α-விற்கு மிகக்குறைந்த திட்டப்பிழை கிடைக்கிறதோ அந்த α-வைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். அதாவது,

Y_i என்பது (உண்மையான) கண்டறிந்த விற்பனையாகவும்

y_i ,, முன்கணிப்பாகவும்,

n ,, மொத்த எண்களாகவும் இருந்தால்,

$\Sigma (Y_i - y_i)^2$-ன் மதிப்பு மீச்சிறுமமாக இருக்கக்கூடிய α மதிப்பை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

1967 ஜனவரி முன்கணிப்பை 9000 எனக் கொண்டு ஆரம்பிப்போம் $\alpha = 0 \cdot 1$, $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0 \cdot 3$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு முன் கணிப்புகளைப் பின்வருமாறு பட்டியலிட்டுக் காட்டுவோம்.

	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$
சராசரிப் பிழை :			
$\frac{1}{n}\Sigma (y_i - y_i)$	− 296	− 195	− 166
திட்டப்பிழை :			
$\frac{1}{n}\Sigma (y_i - y_i)^2$	1814	1871	1919

மாதம்	உண்மையான விற்பனை	1967 முன் கணிப்பு $\alpha = 01$	1967 முன் கணிப்பு $\alpha = \cdot 2$	1967 முன் கணிப்பு $\alpha = .3$	உண்மையான விற்பனை	1968 முன் கணிப்பு $\alpha = \cdot 1$	1968 முன் கணிப்பு $\alpha = \cdot 2$	1968 முன் கணிப்பு $\alpha = \cdot 3$
ஜனவரி	9122	9000	9000	90.0	8245	8187	7628	7107
பிப்ரவரி	7326	9012	9024	9036	7657	8193	7751	7448
மார்ச்	8168	8843	8684	8524	10850	8139	7732	7511
ஏப்ரல்	6106	8776	8581	8417	6796	8410	8356	8513
மே	10799	8509	8086	7724	8475	8249	8044	7998
ஜூன்	7858	8737	8627	8644	10502	8272	8130	8141
ஜூலை	9366	8649	8473	8408	10543	8495	8604	8849
ஆகஸ்ட்	7568	8721	8652	8695	6872	8700	8992	9357
செப்டம்பர்	10968	8606	8435	8357	8367	8517	8568	8612
அக்டோபர்	8666	8842	8942	9144	9423	8502	8528	8539
டிசம்பர்	7056	8824	8687	8998	8201	8594	8707	8804
நவம்பர்	4054	8647	8521	8415	5897	8555	8606	8623
மொத்தம்					97048	105166	103912	103359
					+ 101828	+ 100813	+ 99646	+ 9950
					198876	205979	203558	202861

இதிலிருந்து α-ன் மதிப்பு 0·1-க்குக் குறைவாக இருந்தால் திட்டப்பிழை இன்னும் குறையும். இதேபோல $\alpha = 0{\cdot}05$, $\alpha = 0.08$ முதலிய மதிப்புகளுக்கான பட்டியல் தயார்செய்து எந்த α மதிப்புக்குத் திட்டப்பிழை மிகச்சிறுமமாக உள்ளதோ அந்த α மதிப்பினை எடுத்துக் கொண்டு எதிர்கால முன்கணிப்பினைக் கண்டுபிடிக்கலாம். நடைமுறையில், குறைந்தபட்சம் 30 மாதவிற்பனை மதிப்புகள் அவசியம் தேவைப்படும்.